高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：94.09.27					
範圍	Book5 1-1,2 條件機率、獨立事件	班級	普三 班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

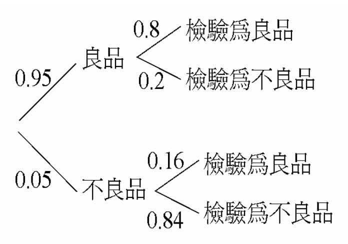
1. 根據過去紀錄知，某電腦工廠檢驗其產品的過程中，將良品檢驗爲不良品的機率爲 0.20，將不良品檢驗爲良品的機率爲 0.16。又知該產品中，不良品占 5%，良品 95%。若一件產品被檢驗爲良品，但該產品實際上爲不良品之機率爲

(A) $\dfrac{1}{100}$ (B) $\dfrac{1}{96}$ (C) $\dfrac{3}{96}$ (D) $\dfrac{5}{96}$ (E) $\dfrac{7}{96}$

【解答】(B)

【詳解】

由樹形圖



設 A 表產品是良品事件，B 表產品檢驗爲良品之事件

一產品被檢驗爲良品的機率爲

$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(A')P(B\mid A')=0.95\times 0.8+0.05\times 0.16=0.76+0.008=0.768$

故 $P(A'\mid B)=\dfrac{P(A'\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(A')P(B\mid A')}{P(B)}=\dfrac{0.008}{0.768}=\dfrac{8}{768}=\dfrac{1}{96}$

2. 擲三粒公正的骰子一次，在出現最大點數爲 5 的條件下，其最小點數爲 2 的機率爲

(A) $\dfrac{15}{61}$ (B) $\dfrac{17}{61}$ (C) $\dfrac{18}{61}$ (D) $\dfrac{19}{61}$

【解答】(C)

【詳解】

A表出現最大點數 5，B表出現最小點數 2

$n(A)=5^3-4^3=61$（共可出現 1，2，3，4，5，扣除只出現 1，2，3，4）

552 $\rightarrow$ 3 種，542 $\rightarrow$ 6 種，532 $\rightarrow$ 6 種，522 $\rightarrow$ 3 種

$n(A\cap B)=3+6+6+3=18$，$P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{18}{61}$

3. 投擲三枚相同且均勻的銅板一次，則在至少出現一個正面的條件下，恰好出現兩個正面的機率爲(A) $\dfrac{3}{7}$ (B) $\dfrac{7}{8}$ (C) $\dfrac{3}{8}$ (D) $\dfrac{1}{8}$ (E) $\dfrac{4}{7}$

【解答】(A)

【詳解】

設 A 表至少出現一正面之事件，B 表恰出現兩正面的事件

則 $A=\{$(正，反，反)，(反，正，反)，(反，反，正)，(正，正，反)，(正，反，正)，

(反，正，正)，(正，正，正)}

$B=\{$(正，正，反)，(正，反，正)，(反，正，正)$\}\Rightarrow\quad A\cap B=B$

$\therefore\ P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{3}{7}$

4. (複選)某牌之燈泡由 A 廠及 B 廠各生產 30％及 70％，A 廠生產的產品中有 1％瑕疵品；B 廠生產的產品中有 5%瑕疵品。某日退貨部門收一件瑕疵品，則下列敘述那些是正確的？

(A)猜此瑕疵品是由 A 廠製造的，猜對的機率較大

(B)猜此瑕疵品是由 B 廠製造的，猜對的機率較大　(C)此瑕疵品由 A 廠製造的機率為 $\dfrac{3}{38}$

(D)此瑕疵品由 A 廠製造的機率為 $\dfrac{30}{10000}$　(E)此瑕疵品由 B 廠製造的機率為 $\dfrac{350}{1000}$

【解答】(B)(C)

【詳解】

設 D 表瑕疵品的事件

則 $P(A\mid D)=\dfrac{\frac{30}{100}\times\frac{1}{100}}{\frac{30}{100}\times\frac{1}{100}+\frac{70}{100}\times\frac{5}{100}}=\dfrac{3}{38}$，$P(B\mid D)=\dfrac{\frac{70}{100}\times\frac{5}{100}}{\frac{30}{100}\times\frac{1}{100}+\frac{70}{100}\times\frac{5}{100}}=\dfrac{35}{38}$

5. (複選)設 A，B 為獨立事件，已知 $P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P(A\cup B)=\dfrac{2}{3}$，則下列何者為真？

(A) $P(B)=\dfrac{1}{3}$ (B) $P(A\cap B)=\dfrac{1}{4}$　(C) $P(A\cap B)=\dfrac{1}{3}$　(D) $P(B'\mid A')=\dfrac{2}{3}$　(E) $P(A'\cup B')=\dfrac{5}{6}$

【解答】(A)(D)(E)

【詳解】

(1)$\because$　A，B 為獨立事件　$\therefore$　$P(A\cap B)=P(A)\,P(B)$

$\because$　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)\,P(B)$

$\therefore$　$\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}+P(B)-\dfrac{1}{2}P(B)\quad\Rightarrow\quad P(B)=\dfrac{1}{3}$

(2) $P(A\cap B)=P(A)\,P(B)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

(3) $P(B'\mid A')=\dfrac{P(B'\cap A')}{P(A')}=\dfrac{P(A')P(B')}{1-P(A)}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$

(4) $P(A'\cup B')=P(A')+P(B')-P(A'\cap B')=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{3+4-2}{6}=\dfrac{5}{6}$

$\therefore$　(A)，(D)，(E)真

6. (複選)甲、乙、丙三人同解一數學題，其能解出之機率分別為 $\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{1}{3}$，今三人各自獨立解此題，則下列敘述何者是真確？

(A)此題三人都解不出之機率為 $\dfrac{1}{10}$　　(B)此題被解出之機率為 $\dfrac{1}{10}$

(C)此題三人都解出之機率爲$\frac{9}{10}$　　　(D)此題只被一人解出的機率爲$\frac{5}{12}$

(E)已知此題只被一人解出，求得由甲解出的機率爲$\frac{4}{25}$

【解答】(A)(D)(E)

【詳解】

設 A，B，C 分別表甲、乙、丙三人解出此數學題的事件

則 $P(A)=\frac{2}{5}$，$P(B)=\frac{3}{4}$，$P(C)=\frac{1}{3}$ 且 A，B，C 爲獨立事件

(1)此題三人都解不出之機率爲

$$P(A'\cap B'\cap C')=P(A')P(B')P(C')=(1-\frac{2}{5})(1-\frac{3}{4})(1-\frac{1}{3})=\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{10}$$

(2)此題被解出的機率 $=1-$(三人都解不出的機率)$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

(3)此題三人都解出的機率爲 $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$

(4)此題只被一人解出機率爲 $P(A\cap B'\cap C')+P(A'\cap B\cap C')+P(A'\cap B'\cap C)$

$$=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{4+18+3}{60}=\frac{25}{60}=\frac{5}{12}$$

(5)已知只一人解出之條件下，恰甲解出的機率

$$=P(\text{甲解出}\mid\text{只一人解出})=\frac{\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}}{\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}}=\frac{\frac{4}{60}}{\frac{25}{60}}=\frac{4}{25}$$

∴　(A)(D)(E)

二、填充題(每題 10 分)

7. 投擲一均勻硬幣五次的試驗中，A表出現至少三次正面的事件，B表在第三次出現正面的事件，則$P(A)=$ __________，$P(B\mid A)=$ __________。

【解答】$\frac{1}{2}$，$\frac{11}{16}$

【詳解】

$P(A)=\frac{1}{2^5}(C^5_3+C^5_4+C^5_5)=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$，$P(A\cap B)=\frac{1}{2^5}(C^4_2+C^4_3+C^4_4)=\frac{11}{32}$

$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{11}{32}\cdot\frac{2}{1}=\frac{11}{16}$

（依三次、四次、五次正面機率的「和」計算 $P(A)$和 $P(A\cap B)$）

8. 一副撲克牌 52 張中任取出 3 張，A表示 3 張牌中有黑桃且也有紅心的事件，B表示 3 張牌中恰有 1 張黑桃且恰有 1 張紅心的事件，則$P(A)=$ ________，$P(B\mid A)=$ __________。

【解答】$\frac{247}{850}$，$\frac{13}{19}$

【詳解】

$$P(A)=\frac{1}{C^{52}_3}(C^{13}_2\cdot C^{13}_1+C^{13}_1\cdot C^{13}_2+C^{13}_1\cdot C^{13}_1\cdot C^{26}_1)=\frac{13\cdot 13\cdot 38}{13\cdot 17\cdot 100}=\frac{247}{850}$$

（依 2 張黑桃、1 張紅心，2 張紅心、1 張黑桃，1 張黑桃、1 張紅心、另 1 張不是紅心與黑桃）

$P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{13\cdot 13\cdot 26}{C_3^{52}}\cdot\dfrac{850}{247}=\dfrac{169}{850}\cdot\dfrac{850}{247}=\dfrac{169}{247}=\dfrac{13}{19}$

9. 同擲三公正骰子的試驗中，A表出現點數和是 5 的倍數的事件，B表出現點數和是 10 的事件，則$P(A)=$__________，$P(B\mid A)=$__________。

【解答】$\dfrac{43}{216}$，$\dfrac{27}{43}$

【詳解】

x，y，z 表三骰子的點數，$x+y+z=10$ 時

由 x，y，$z\in\{1，2，3，4，5，6\}$得

$\{x，y，z\}=\{1，3，6\}$，$\{1，4，5\}$，$\{2，2，6\}$，$\{2，3，5\}$，$\{2，4，4\}$，$\{3，3，4\}$

∴　數對$(x，y，z)$共有 $6+6+3+6+3+3=27$ 種情形

同理 $x+y+z=5$ 時有 6 種情形，$x+y+z=15$ 時有 10 種情形

$P(A)=\dfrac{6+27+10}{6^3}=\dfrac{43}{216}$，$P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{27}{216}\cdot\dfrac{216}{43}=\dfrac{27}{43}$

10. 甲，乙二人打靶，甲平均每 4 發打中 3 發，乙平均每 3 發打中 2 發，今二人各射 2 發，則(1)此靶面未被射中的機率爲__________。　(2) A表靶面恰射中 2 發的事件，B表甲與乙各射中 1 發的事件，則$P(A)=$__________，$P(B\mid A)=$__________。

【解答】(1)$\dfrac{1}{144}$　(2)$\dfrac{37}{144}$，$\dfrac{24}{37}$

【詳解】

(1)甲射 2 發均未打中且乙射 2 發均未打中之機率p，則$p=\dfrac{(1\cdot 1)\cdot(1\cdot 1)}{(4\cdot 4)\cdot(3\cdot 3)}=\dfrac{1}{144}$

(2) $P(A)=\dfrac{1}{144}[3\cdot 3\cdot 1\cdot 1+1\cdot 2\cdot 2+(3\cdot 1+1\cdot 3)(2\cdot 1+1\cdot 2)]=\dfrac{37}{144}$

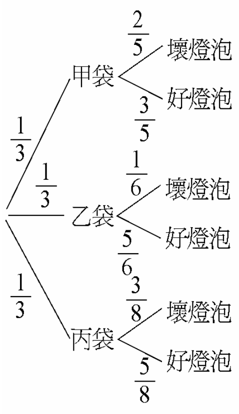
即$P(A)=(\dfrac{3}{4})^2+(\dfrac{1}{3})^2+(\dfrac{1}{4})^2(\dfrac{2}{3})^2+(\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{4})(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3})=\dfrac{37}{144}$

$P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{24}{144}\cdot\dfrac{144}{37}=\dfrac{24}{37}$

11. 設甲袋中有 10 個電燈炮，其中 4 個壞的；乙袋中有 6 個電燈泡，其中 1 個壞的；丙袋中有 8 個電燈炮，其中 3 個壞的；若任選一袋，由選出袋中任取一燈泡（選袋、選燈泡的機會均等），則抽中一個壞燈泡的機率爲__________。

【解答】$\dfrac{113}{360}$

【詳解】



設 A，B，C 分別表選甲袋、乙袋、丙袋的事件，D 表抽到一壞燈泡的事件，則

$P(D)=P(A)P(D\mid A)+P(B)P(D\mid B)+P(C)P(D\mid C)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{2}{15}+\frac{1}{18}+\frac{1}{8}=\frac{48+20+45}{360}=\frac{113}{360}$

12. 設A，B表二事件，若$P\,(A\cup B)=\frac{3}{4}$，$P\,(A')=\frac{2}{3}$，$P\,(A\cap B)=\frac{1}{4}$，則$P\,(A-B)=$ ________，$P\,(B'\mid A)=$ __________。

【解答】$\frac{1}{12}$，$\frac{1}{4}$

$P\,(A)=1-P\,(A')=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，$P\,(A\cap B')=P\,(A-B)$

$P\,(A-B)=P\,(A)-P\,(A\cap B)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$，$P\,(B'\mid A)=\frac{P(A\cap B')}{P(A)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$

13.一袋中有 3 個紅球和 5 個白球，共 8 個球，從袋中逐次取球，每次取出一球，且取出的球不放回，若取每一球的機會相同，A表第一次取出的球是白球的事件，B表第二次取出的球是紅球的事件，則$P\,(B)=$ __________，$P\,(A\mid B)=$ __________。

【解答】$\frac{3}{8}$，$\frac{5}{7}$

【詳解】

$P\,(B)=P\,(A)\cdot P\,(B\mid A)+P\,(A')\cdot P\,(B\mid A')=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{21}{56}\cdot\frac{3}{8}$

$P\,(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)\cdot P(B\mid A)}{P(B)}=(\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7})\cdot\frac{8}{3}=\frac{5}{7}$

14.某班期中考，數學有 15%的學生不及格，英文有 12%不及格，英、數兩科都不及格者占 6%，今任選一學生，若已知他的數學不及格，求英文及格的機率爲__________。

【解答】$\frac{3}{5}$

【詳解】

設 M 表數學不及格的事件，E 表英文不及格的事件

則 $P(E' \mid M) = \dfrac{P(E' \cap M)}{P(M)} = \dfrac{P(M) - P(E \cap M)}{P(M)}$

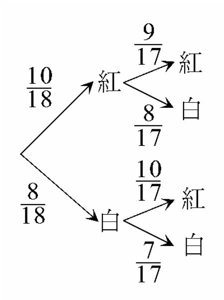
$\because$ $P(M) = 0.15$，$P(E) = 0.12$，$P(E \cap M) = 0.06$

$\therefore$ $P(E' \mid M) = \dfrac{0.15 - 0.06}{0.15} = \dfrac{0.09}{0.15} = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$

15.設袋中有 10 個紅球，8 個白球，今自袋中連取兩次，每次取一球，取後不放回，已知兩次中至少有一次取到紅球，求兩球皆爲紅球的機率爲__________。

【解答】$\dfrac{9}{25}$

【詳解】



每次取球情況的機率分配樹狀圖如上

故至少有一次取到紅球的機率爲 $\dfrac{10}{18} \times \dfrac{9}{17} + \dfrac{10}{18} \times \dfrac{8}{17} + \dfrac{8}{18} \times \dfrac{10}{17} = \dfrac{125}{153}$

$\because$ 兩次均取到紅球的機率爲 $\dfrac{10}{18} \times \dfrac{9}{17} = \dfrac{5}{17}$ $\therefore$ 所求的條件機率爲 $\dfrac{\frac{5}{17}}{\frac{125}{153}} = \dfrac{9}{25}$

16.某校學生中，高一占 40％，高二占 30％，高三占 30％，又知高一學生中有 50％是近視者，高二學生中有 60％是近視者，高三學生中有 70％是近視者。從該校學生中任抽選一人，則(1)此人不患近視的機率爲__________。

(2)所選的人已知患近視，求此人爲高二學生的機率爲__________。

【解答】(1) $\dfrac{41}{100}$ (2) $\dfrac{18}{59}$

【詳解】

設 A_1，A_2，A_3 依次表所選一人爲高一、高二、高三學生的事件，R 表所選一人爲近視者事件，則

(1) $P(R) = P(A_1) \cdot P(R \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(R \mid A_2) + P(A_3) \cdot P(R \mid A_3)$

$= \dfrac{40}{100} \times \dfrac{50}{100} + \dfrac{30}{100} \times \dfrac{60}{100} + \dfrac{30}{100} \times \dfrac{70}{100} = \dfrac{59}{100}$

$\therefore$ $P(R') = 1 - P(R) = 1 - \dfrac{59}{100} = \dfrac{41}{100}$

(2) $P(A_2 \mid R) = \dfrac{P(A_2 \cap R)}{P(R)} = \dfrac{P(A_2)P(R \mid A_2)}{P(R)} = \dfrac{\frac{30}{100} \times \frac{60}{100}}{\frac{59}{100}} = \dfrac{18}{59}$

17. 設甲袋有黑球 3 個，白球 4 個；乙袋有黑球 4 個，白球 3 個；丙袋有黑球 5 個，白球 2 個。今任取一袋，任取一球。

(1)此球是白球的機率是多少。　(2)已知此球是白球，求它來自甲袋的機率。

【解答】(1) $\frac{3}{7}$　(2) $\frac{4}{9}$

【詳解】

(1) P (白) = P (甲) P (白 ｜ 甲) + P (乙) P (白 ｜ 乙) + P (丙)

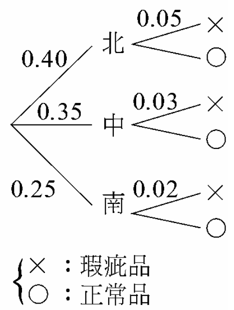
P (白 ｜ 丙) $=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$

(2) P (甲 ｜ 白) $=\frac{P(\text{甲}\cap\text{白})}{P(\text{白})}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}}{\frac{3}{7}}=\frac{4}{9}$

18.某汽水公司有三座工廠，設北，中，南廠生產量分別占全部的 40%，35%，25%，且北，中，南廠生產的瑕疵品分別有 5%，3%，2%，今在超商買一瓶汽水，(1)求它是瑕疵品的機率；(2)已知它是瑕疵品，求它來自南廠的機率。

【解答】(1) 0.0355　(2) $\frac{10}{71}$

【詳解】



(1) P (瑕疵品) $= 0.40\times0.05+0.35\times0.03+0.25\times0.02=0.0355$

(2) P (南廠 ｜ 瑕疵品) $=\frac{0.25\times0.02}{0.0355}=\frac{10}{71}$

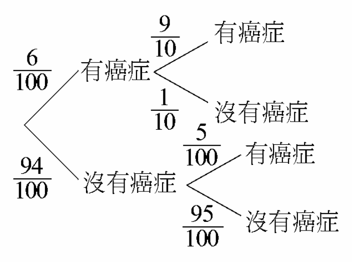
19.有某種診斷方法，依過去的經驗知道，患癌症的人經過檢驗後，發現有癌症的可能性爲 0.90，不患癌症的人經過同樣的檢驗，發現有癌症的可能性爲 0.05。假設一群人中有 6 %的人患有癌症。現從此群人中選一人而加以檢驗，求：

(1)檢驗出有癌症的機率。　(2)設檢驗出有癌症，求此人的確有癌症的機率。

【解答】(1) 0.101　(2) $\frac{54}{101}$

【詳解】

(1)如下圖可知，P (癌症) $=\frac{6}{100}\times\frac{9}{10}+\frac{94}{100}\times\frac{5}{100}=0.101$



(2) P (確實有癌症 ｜ 癌症) $=\dfrac{0.06\times 0.9}{0.101}=\dfrac{54}{101}$

20.投擲公正的硬幣四次，求至少兩次正面的機率？若已知至少兩次正面出現，求恰好是兩次正面出現的機率？

【解答】$\dfrac{11}{16}$，$\dfrac{6}{11}$

【詳解】

(1)至少兩次正面的機率有兩次正面、三次正面、四次正面的情況

其機率總和$=C_2^4(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^2+C_3^4(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})+C_4^4(\frac{1}{2})^4 \;=(6+4+1)=\dfrac{11}{16}$

(2)已知至少兩次正面的條件下，恰兩次正面的機率 $=\dfrac{C_2^4(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^2}{\frac{11}{16}}=\dfrac{6}{11}$

21.設 A 袋中有 4 個白球，3 個紅球；B 袋中有 3 個白球，2 個紅球；今從 A 袋中取出 2 球放入 B 袋，再從 B 袋中取出 3 球，試求此 3 球都是白球的機率。

【解答】$\dfrac{37}{245}$

【詳解】分下列 3 種情形討論

(1) $A\xrightarrow{\text{2白}}B$：$\dfrac{C_2^4}{C_2^7}\times\dfrac{C_3^5}{C_3^7}=\dfrac{4}{49}$

(2) $A\xrightarrow{\text{1白1紅}}B$：$\dfrac{C_1^4C_1^3}{C_2^7}\times\dfrac{C_3^4}{C_3^7}=\dfrac{16}{245}$

(3) $A\xrightarrow{\text{2紅}}B$：$\dfrac{C_2^3}{C_2^7}\times\dfrac{C_3^3}{C_3^7}=\dfrac{1}{245}$

所以 3 球均是白球的機率為$\dfrac{4}{49}+\dfrac{16}{245}+\dfrac{1}{245}=\dfrac{37}{245}$

22. 設甲、乙、丙三位射擊的命中率各為 0.4，0.5，0.6，今在靶場中，有一目標靶，

(1)三人同時射擊一發，各人命中靶面為獨立事件，則靶面恰中二彈的機率為__________。

(2)如果每人射擊兩發子彈，則靶面恰中二彈的機率為__________。

【解答】(1)0.38　(2)0.2356

【詳解】

(1)每人各射擊一發，靶面恰中二彈，即恰有兩人命中目標其機率

$=P$(甲中且乙中且丙不中)$+P$(甲中且乙不中且丙中)$+P$(甲不中且乙中且丙中)

$= 0.4 \times 0.5 \times 0.4 + 0.4 \times 0.5 \times 0.6 + 0.6 \times 0.5 \times 0.6 = 0.08 + 0.12 + 0.18 = 0.38$

(2)每人各射擊兩發，靶面恰中二彈的機率爲

P(甲中兩發，乙、丙都不中) + P(乙中兩發，甲、丙都不中) +
P(丙中兩發，甲、乙都不中) +P(甲、乙各中一發且丙都不中) +
P(甲、丙各中一發且乙都不中) + P(乙、丙各中一發且甲都不中)

$= (0.4)^2 \times (0.5)^2 \times (0.4)^2 + (0.6)^2 \times (0.5)^2 \times (0.4)^2 + (0.6)^2 \times (0.5)^2 \times (0.6)^2 +$
$4 \times (0.4)(0.6)(0.5)(0.5)(0.4)^2 + 4 \times (0.4)(0.6)(0.5)^2(0.6)(0.4) + 4 \times (0.6)^2(0.5)(0.5)(0.6)(0.4)$
$= 0.2356$

23. 某地方的天氣，下雨天的翌日也下雨的機率是$\frac{1}{3}$，非下雨天的翌日下雨的機率是$\frac{1}{2}$，今假設第一天是下雨天，則第四天也是下雨天的機率爲__________。

【解答】$\frac{23}{54}$

【詳解】

第一天是下雨天，則

第二天：下雨天的機率爲$\frac{1}{3}$，非雨天的機率$\frac{2}{3}$

第三天：下雨天的機率爲$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{9}$，非下雨天的機率爲 $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

第四天：下雨天的機率爲$\frac{4}{9} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{23}{54}$

24. 某一射手發 5 彈平均命中 2 彈，若該射手至少命中一彈的機率大於 0.999 時，至少要射__________發以上。（每發射擊均爲獨立事件，$\log 2 = 0.3010$，$\log 3 = 0.4771$）

【解答】14

【詳解】

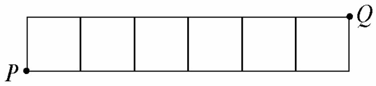
射手每射一發命中的機率爲$\frac{2}{5}$，不命中的機率爲$\frac{3}{5}$⇒連射n彈均不中之機率爲$(\frac{3}{5})^n$

∴　至少命中一彈的機率爲 $1 - (\frac{3}{5})^n > 0.999$

$\Rightarrow \quad (\frac{3}{5})^n < 0.001 = 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad n(\log 3 - \log 5) < -3 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{3}{0.2219} = 13.5$

∵　$n \in N$　∴　$n \geq 14$，故最小n值爲 14

25. 有街道如下圖（每一小方格皆爲正方形），甲自P往Q，乙自Q往P，兩人同時出發以相同速度，沿最短距離前進。假設在每一分叉路口時，選擇前進方向的機率都相等，問甲、乙二人在路上相遇的機率有多大？將所求的機率化爲形如$\frac{a}{2^n}$的最簡分數（即既約分數），其中n及a皆爲正整數，則序對(n，a) = __________。



【解答】(8，29)

【詳解】

兩人在 A 點相遇之機率$(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})=\frac{7}{8}\times\frac{1}{16}=\frac{7}{128}$

兩人在 B 點相遇之機率$(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})=\frac{1}{16}\times\frac{1}{16}=\frac{1}{256}$

兩人在 C 點相遇之機率$(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})=\frac{1}{16}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{128}$

$\therefore$ 甲、乙、丙在路上相遇之機率爲$\frac{7}{128}+\frac{1}{256}+\frac{7}{128}=\frac{29}{256}=\frac{29}{2^8}=\frac{a}{2^n}$

故 $n=8$，$a=29$

26. 設A，B，C爲樣本空間S之事件，若A，B，C爲三獨立事件，$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(A\cup B)=\frac{7}{12}$，且$P(A\cap B\cap C')=\frac{1}{32}$，則$P(C)=$ __________。

【解答】$\frac{3}{4}$

【詳解】

$\because$ A，B，C 爲獨立事件 $\therefore$ A，B，C'亦爲獨立事件且 A，B 爲獨立事件

$\because$ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$且 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$\therefore$ $\frac{7}{12}=P(A)+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}P(A) \Rightarrow P(A)=\frac{3}{8}$

又 $P(A\cap B\cap C')=\frac{1}{32} \Rightarrow P(A)P(B)P(C')=\frac{1}{32}$

$\therefore$ $\frac{3}{8}\times\frac{1}{3}\times P(C')=\frac{1}{32} \Rightarrow P(C')=\frac{1}{4}$，故 $P(C)=1-P(C')=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

27. 擲一硬幣出現正面的機率爲$\frac{3}{4}$，出現反面的機率爲$\frac{1}{4}$，若連續擲 6 次，出現k次正面的機率爲$P(k)$，則$P(3)=$ __________，$\sum_{k=1}^{6}k\cdot P(k)=$ __________。

【解答】(1)$\frac{135}{1024}$ (2)$\frac{9}{2}$

【詳解】

(1) $P(3)=C^6_3(\frac{3}{4})^3(\frac{1}{4})^3=\frac{C^6_3\cdot 3^3}{4^6}=\frac{135}{1024}$

(2) $k\cdot P(k)=(k\cdot C^6_k)(\frac{3}{4})^k(\frac{1}{4})^{6-k}$，其中$k\cdot C^6_k=6\cdot C^5_{k-1}$，$k=1$，2，3，4，5，6 均成立

$\sum_{k=1}^{6}k\cdot P(k)=6\cdot\sum_{k=1}^{6}k(\frac{3}{4})^k(\frac{1}{4})^{6-k}=6\cdot\frac{3}{4}\cdot\sum_{k=1}^{6}k(\frac{3}{4})^{k-1}\cdot(\frac{1}{4})^{5-(k-1)}$

$=\frac{9}{2}\cdot\sum_{r=0}^{5}C^5_r(\frac{3}{4})^r\cdot(\frac{1}{4})^{5-r}=\frac{9}{2}(\frac{3}{4}+\frac{1}{4})^5=\frac{9}{2}$

28.同擲二公正骰子n次，至少有一次出現：「雙六」點的機率爲$P(n)$，則

(1) $P(2)=$ __________。 (2)使$P(n)>\frac{1}{2}$的最小自然數$n=$ __________。

（已知$\log 2 = 0.3010$，$\log 3 = 0.4771$，$\log 7 = 0.8451$）

【解答】(1) $\dfrac{71}{1296}$　(2) 25

【詳解】

(1) $P(2) = 1 - (\dfrac{35}{36})^2 = \dfrac{71}{1296}$

(2) $P(n) = 1 - (\dfrac{35}{36})^n$，$P(n) > \dfrac{1}{2}$，即$(\dfrac{35}{36})^n < \dfrac{1}{2}$

$n(\log 35 - \log 36) < -\log 2$，使$n > \dfrac{\log 2}{\log 36 - \log 35}$

其中$\log 36 = 2(\log 2 + \log 3) = 1.5562$，$\log 35 = \log 10 + \log 7 - \log 2 = 1.5441$

$\dfrac{\log 2}{\log 36 - \log 35} \doteqdot \dfrac{3010}{121} \doteqdot 24.9$，使$n > 24.9$ 之最小自然數$n = 25$

29.若某社團參加人員依性別與年級分，人數統計表如下：

性別＼年級	一年級	二年級
男	6	18
女	4	x

隨機從社團中抽樣，令A，B分別表抽到男生與抽到二年級學生的事件，若事件A，B爲獨立，則$x =$ ＿＿＿＿＿。

【解答】12

【詳解】

由題意 A，B 獨立　$\Rightarrow$　$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

$\because$　$P(A) = \dfrac{6+18}{6+4+18+x} = \dfrac{24}{28+x}$，$P(B) = \dfrac{18+x}{6+4+18+x} = \dfrac{18+x}{28+x}$

$P(A \cap B) = \dfrac{18}{6+4+18+x} = \dfrac{18}{28+x}$

$\therefore$　$\dfrac{18}{28+x} = \dfrac{24}{28+x} \cdot \dfrac{18+x}{28+x}$　$\Rightarrow$　$18(28+x) = 24(18+x)$　$\Rightarrow$　$x = 12$

30.若A，B，C爲三獨立事件，$P(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$，$P(B \cap C) = \dfrac{1}{6}$，$P(A \cup C) = \dfrac{2}{3}$，則

(1) $P(A|C) =$ ＿＿＿＿＿。　(2) $P(A \cup B \cup C) =$ ＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $\dfrac{1}{2}$　(2) $\dfrac{5}{6}$

【詳解】

(1) $\because$　A，B，C獨立　$\Rightarrow$　$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \dfrac{1}{4}$　$\Rightarrow$　$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) = \dfrac{1}{6}$

兩式相除得$\dfrac{P(A)}{P(C)} = \dfrac{2}{3}$　$\Rightarrow$　$P(A) = \dfrac{2}{3}P(C)$

又$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = P(A) + P(C) - P(A)P(C) = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow\quad \frac{3}{2}P(C)+P(C)-\frac{3}{2}(C)\cdot P(C)=\frac{2}{3}\quad\Rightarrow\quad 9[P(C)]^2-15P(C)+4=0$

$\Rightarrow\quad [3P(C)-1][3P(C)-4]=0\quad\Rightarrow\quad P(C)=\frac{1}{3}$或$P(C)=\frac{4}{3}$（不合）

得$P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1}{3}$ $\Rightarrow\quad P(A|C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=P(A)=\frac{1}{2}$

(2)$P(A\cup B\cup C)$

$=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$

31.同時擲兩枚均勻硬幣，連續擲兩次，則至少一次出現一正面、一反面的機率為________。

【解答】$\frac{3}{4}$

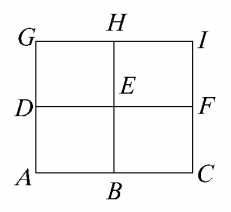
【詳解】

每一次出現同一面的機率均為$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，∴ 至少一次出現「不同面」的機率為 $1-(\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$

28.一生意商遊走在某鎮的幾個市集作生意，如圖所示，如果今晚他在 A 點處作生意，而且他決定每晚以丟骰子的方式決定下一個夜晚作生意的位置，決定的方式是：當骰子出現一點時，下一晚的位置是當晚的北方一格的位置，當骰子出現 2 或 3 點時，下一晚的位置就是當晚東方一格的位置，當骰子出現 4，5，6 等點數時，下一晚的位置是當晚的位置，試求：

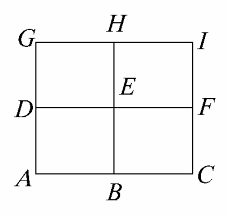
(1)至多丟三次骰子能由 A 移到 E 作生意的機率？

(2)丟四次骰子就能由 A 移到 I 作生意的機率？



【解答】(1)$\frac{2}{9}$ (2)$\frac{1}{54}$

【詳解】



(1)至多丟三次骰子，此生意商可由 A 移到 E 的情況，有下列幾種

①丟兩次：先到 B 再到 E 或先到 D 再到 E，機率 $=\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

②丟三次的結果依次如下：ABE，ADE，BBE，DDE

機率 $=\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}=\frac{2+2+2+2}{72}=\frac{1}{9}$

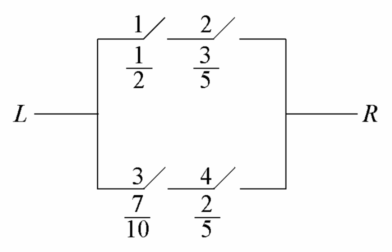
所以至多丟三次，可由 A 到 E 的機率 $=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$

(2)由 A 到 I 最少要丟四次，共有 $\frac{4!}{2!2!}=6$ 種路徑

每個路徑的機率 $=(\frac{1}{6})^2(\frac{2}{6})^2=\frac{1}{324}$

所以丟四次能由 A 到 I 的機率 $=\frac{1}{324}\times 6=\frac{1}{54}$

32.在下面的電路圖中有 4 個開關，以 1，2，3，4 表示。電流通過各開關的機率分別爲 $\frac{1}{2}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{7}{10}$，$\frac{2}{5}$（如圖所示）。若各開關的操作獨立，求電流從左端(L)流到右端(R)的機率爲多少？



【解答】$\frac{62}{125}$

【詳解】

設 A_k 是第 k 個開關使電流通過的事件，$k=1$，2，3，4

$P((A_1\cap A_2)\cup(A_3\cap A_4))=P(A_1\cap A_2)+P(A_3\cap A_4)-P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{7}{10}\cdot\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{2}{5}=\frac{62}{125}$