高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：95.01.05					
範圍	Book4 CH2 排列、組合	班級	普三 班	姓名	
		座號			

一、多重選擇題(每題 10 分)

1. 相異書本 9 本，下列分法何者正確？

   (A)平分成 3 堆，有 $\dfrac{C_3^9C_3^6C_3^3}{3!}$ 種

   (B)平分給 3 人，有 $C_3^9C_3^6C_3^3$ 種

   (C)一人得 5 本，一人得 2 本，一人得 2 本，有 $C_5^9C_2^4C_2^2$ 種

   (D)一人得 5 本，一人得 3 本，一人得 1 本，有 $C_5^9C_3^4C_1^1$ 種

   (E)每人至少分得 1 本，有 $C_5^9C_2^4C_2^2$ 種

【解答】(A)(B)

【詳解】

(A) $\dfrac{C_3^9C_3^6C_3^3}{3!}$ (B) $\dfrac{C_3^9C_3^6C_3^3}{3!}\times 3! = C_3^9C_3^6C_3^3$ (C) $\dfrac{C_5^9C_2^4C_2^2}{2!}\times 3!$ (D) $C_5^9C_3^4C_1^1 \times 3!$

(E) $3^9 - C_1^3 \cdot 2^9 + C_2^3 \cdot 1^9$

2. 設有同樣大小的旗子六面，其中三面藍色，兩個白色，一面紅色，若將此六面旗子任意排序全升上旗竿，可表示 P 種不同信號，但自六面旗子中任取 4 個排序升上旗竿，可表 Q 種不同信號，則下列何者正確？

   (A) P 為二位數 (B) Q 為二位數 (C) $50 \le P \le 100$ (D) $50 \le Q \le 100$ (E) $P+Q \ge 150$

【解答】(A)(B)(C)

【詳解】

將此六面旗子全排在旗竿上，排法有 $P = \dfrac{6!}{3!2!} = 60$ 種

從六面旗子任取 4 面，則依顏色可區分為

(1)三同一異 $C_1^1C_2^2 \times \dfrac{4!}{3!} = 8$

(2)二同二同 $C_2^2 \times \dfrac{4!}{2!2!} = 6$

(3)二同二異 $C_1^2C_2^2 \times \dfrac{4!}{2!} = 24$

$\therefore\ Q = 8+6+24 = 38$

3. 五種不同的酒倒入三個酒杯，若一個杯子只能倒一種酒，而且不能有空杯，下列選項何者正確？

   (A)杯子相同，各杯子的酒可相同，有 35 種倒法

   (B)杯子不同，各杯的酒亦不同，有 60 種倒法

   (C)杯子相同，各杯子的酒不同，有 10 種倒法

   (D)杯子不同，各杯的酒可相同，有 125 種倒法

   (E)杯子不同，各杯的酒可相同，但其中至少有一杯是啤酒，有 60 種倒法

【解答】(A)(B)(C)(D)

【詳解】

(A)杯子相同，令每種酒所倒杯子數目分別爲a，b，c，d，e

則$a+b+c+d+e=3$的非負整數解有H_3^5組，即倒法有$H_3^5=35$種

(B)杯子不同，各杯的酒亦不同，則須取出 3 種酒倒入 3 個相異杯子

∴ 倒法有$P_3^5=60$種

(C)杯子相同，各杯子的酒不同，即須取出 3 種酒，一種倒入一個杯子

∴ 倒法有$C_3^5=10$種

(D)杯子不同，每個杯子均有 5 種不同倒酒的方法 ∴ 倒法有 $5^3=125$ 種

(E)杯子不同，各杯的酒可相同，但其中至少有一杯是啤酒

即所有倒法扣掉沒有一杯是啤酒的倒法 ∴ 倒法有 $5^3-4^3=125-64=61$ 種

二、填充題(每題 10 分)

1. 3 瓶相同的汽水，4 個相同的果汁，分給 10 人，則每人至多一物的分法有＿＿＿＿＿種。

【解答】4200

【詳解】$\dfrac{10!}{3!4!3!}=4200$

2. 將「$pallmall$」一字中，所有字母全取而排列之，依下列條件，求其排列數，

(1)所有ℓ均相鄰＿＿＿＿＿。 (2)ℓ均不相鄰＿＿＿＿＿。(3)同字母不相鄰＿＿＿＿＿。

【解答】(1) 60 種 (2) 60 種 (3) 54 種

【詳解】

(1) 4 個ℓ相鄰視爲一個字母，有$\dfrac{5!}{2!}=60$種

(2) ∨ ∨ ∨ ∨ ∨

p a m a

$\underbrace{\dfrac{P_4^5}{4!}}_{\ell\text{ 插入「}\vee\text{」中之排法}}\times\underbrace{\dfrac{4!}{2!}}_{pama\text{ 之排法}}=60$（種）

(3)即ℓ不相鄰且 a 不相鄰= $\boxed{\ell\text{不相鄰}}-\boxed{\ell\text{不相鄰，}a\text{ 相鄰}}$

∨ ∨ ∨ ∨

p m $\boxed{aa}$

ℓ不相鄰且 a 相鄰有$\dfrac{P_4^4}{4!}\times3!=6$種，故所求$=60-\dfrac{P_4^4}{4!}\times3!=54$（種）

3. 將a，b，c，d，e等 5 個字母全取排列，依照英文字典中字母順序第一個爲$abcde$，最後一個爲$edcba$，則「$bdcea$」排在第＿＿＿＿＿個。

【解答】40

【詳解】

$\boxed{a}\,\boxed{\ }\,\boxed{\ }\,\boxed{\ }\,\boxed{\ }$ 有 $4!=24$ 個

$\boxed{b}\,\boxed{a}\,\boxed{\ }\,\boxed{\ }\,\boxed{\ }$ 有 $3!=6$ 個

$\boxed{b}\,\boxed{c}\,\boxed{\ }\,\boxed{\ }\,\boxed{\ }$ 有 $3!=6$ 個

$\boxed{b}\,\boxed{d}\,\boxed{a}\,\boxed{\ }\,\boxed{\ }$ 有 $2!=2$ 個

$\boxed{b}\,\boxed{d}\,\boxed{c}\,\boxed{a}\,\boxed{e}$ 有 1 個

故 $bdcea$ 排在 $24+6+6+2+1+1=40$ 個

4. 從 1、2、3、4、5、6、7 七個數中，組成數字不重複的三位數，則其中 3 的倍數有________個。

【解答】78

【詳解】

將 7 個數字分三類：$3k$ 型者有 3，6，$3k+1$ 型者有 1，4，7，$3k+2$ 型者有 2，5

① $3k$ 型取 1 個，$3k+1$ 型取 1 個，$3k+2$ 型取 1 個排列之

三位數有 $2\times3\times2\times3!=72$ 個

② $3k+1$ 型取 3 個排列之，三位數有 $1\times3!=6$ 個

$\therefore$ 三位數有 $72+6=78$ 個

5. a，b，c，d 等 4 位男生和 e，f，g 等 3 位女生共 7 人排成一列，求恰有一位女生排在 a 之左側（不一定相鄰）之排法有__________種。

【解答】1260

【詳解】

將 a，e，f，g 視爲同物，以□□□□表之，和 b，c，d 排一列

b□□c□d □

↓

此處放 a，其餘□□□放 e，f，g $\Rightarrow$ $3!=6$

$\Rightarrow \dfrac{7!}{4!}=210$，今恰一女生排在 a 之左，所求 $=210\times6=1260$

6. 兄弟二人在排成一列的 20 個空位中，選坐不相鄰的兩個座位就坐，則有______種坐法。

【解答】342

【詳解】(從 20 個座位任選兩個入坐) − (選中兩相鄰座位的坐法)

全部坐法有 $P^{20}_{2}=380$

選中相鄰座位的選法有(1，2)，(2，3)，(3，4)，(4，5)，⋯，(19，20)共 19 種

$\therefore$ 兄弟二人相鄰而坐的坐法有 $19\times2!=38$，故所求爲 $380-38=342$

7. 已知三艘不同的渡船，每船最多能載 4 人，試求 6 人渡河時，安全過渡的方法有____種。

【解答】690

【詳解】

6 人渡河時，超載的情形有二類

①6 人同搭乘一船，其搭乘方法有 $C^6_6P^3_1=3$ 種

②6 人中有 5 人同搭乘一船，另一人搭另外一船，其方法有 $C^6_5C^1_1\times P^3_2=36$ 種

$\therefore$ 6 人安全渡河的方法有 $3^6-3-36=690$ 種

8. 一至二樓有 8 級樓梯，某人上樓，每次可跨 1 級或 2 級，則其不同上樓的方法有____種。

【解答】34

【詳解】

設一級跨了 x 次，2 級跨了 y 次，則 $x+2y=8$ $\Rightarrow$

x	8	6	4	2	0
y	0	1	2	3	4

有 $1+\dfrac{7!}{6!}+\dfrac{6!}{2!4!}+\dfrac{5!}{2!3!}+\dfrac{4!}{4!}=1+7+15+10+1=34$ 種

9. (1)5 對夫婦任選出 4 人代表，此 4 人中恰有一對夫婦，共__________種。

(2)5 對夫婦圍圓桌，不計方位，男女相間，有一對夫婦 A，a 相鄰，有________種坐法。

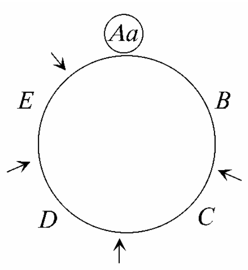
(3)5 對夫婦圍圓桌，不計方位，每對夫婦均相對而坐，有__________種方法。

【解答】(1)120　(2)1152　(3)384

【詳解】

(1) $\underbrace{C_1^5}_{\text{選 1 對夫婦作代表}}\underbrace{C_2^4}_{\text{選 2 對夫婦}}\cdot\underbrace{2^2}_{\text{選夫或婦}}=120$

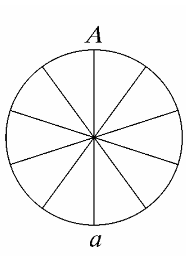
(2) $\dfrac{5!}{5}\times\underbrace{2!}_{Aa\text{ 可交換}}\times\underbrace{4!}_{bcde\text{ 之排法}}=1152$



(不管其它夫婦是否相鄰)

(3) A，a 先相對入坐，坐法有 $\dfrac{2!}{2}$，再讓四對夫婦入坐有 4！種坐法

而此四對夫婦可對調有 2^4 種方法，故所求爲 $\dfrac{2!}{2}\times 4!\times 2^4=384$



10.將 12 件相同之物品，依下列分法，求方法數：

(1)分給 15 人，每人至多 1 件，則方法有__________種。

(2)分給 3 人，其中一人至少二件，一人至少三件，一人至少四件，則方法有________種。

【解答】(1) 455　(2) 25

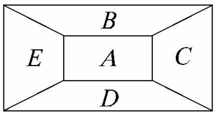
【詳解】

(1)12 個□與 3 個×的排列 $\Rightarrow \dfrac{15!}{12!3!}=455$

(2)分成(2，3，7)，(2，4，6)，(2，5，5)，(3，3，6)，(3，4，5)，(4，4，4)

共 $3!+3!+\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{3!}{2!}+3!+\dfrac{3!}{3!}=6+6+3+3+6+1=25$ 種

11.如圖，以 5 種不同顏色塗在下圖區域中，相鄰區域顏色須相異，則有__________種塗法。



【解答】420

【詳解】

BD 同色時，$A \to \boxed{BD} \to C \to E$：$5\times4\times3\times3=180$ 種

BD 異色時，$A \to B \to D \to C \to E$：$5\times4\times3\times2\times2=240$ 種

故共有 $180+240=420$ 種塗法

12.1 至 800 的自然數中與 42 互質者有__________個。

【解答】229

【詳解】1 至 800 的自然數中與 42 互質，即去掉 2 或 3 或 7 的倍數

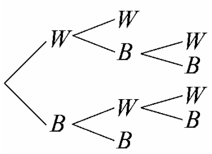
$$\Rightarrow\quad 800-([\frac{800}{2}]+[\frac{800}{3}]+[\frac{800}{7}]-[\frac{800}{6}]-[\frac{800}{21}]-[\frac{800}{14}]+[\frac{800}{42}])$$

$$=800-(400+266+114-133-38-57+19)=229$$

13.白襪黑襪各五隻，混合在抽屜中，在黑暗中，每次取一隻，則取__________次後，保證取得一雙襪子。

【解答】3

【詳解】



取三次後，保證有一雙襪子

14.2 個梨子，3 個桃子，4 個橘子，任意分給甲，乙，丙三人，每人最少一個，有______種分法。

【解答】723

【詳解】

全部 $-$(其中一人沒有)$+$(其中二人沒有)（排容原理）

$=H^3_2 \times H^3_3 \times H^3_4 - C^3_1(H^2_2 \times H^2_3 \times H^2_4)+C^3_2(H^1_2 \times H^1_3 \times H^1_4)$

$=6\times10\times15-3\times(3\times4\times5)+3(1\times1\times1)=900-180+3=723$（種）

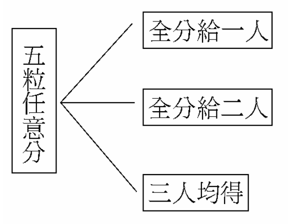
15.5 粒不同的糖果分給 3 個人，如果每個人分得的個數不限，有__________種方法；如果每個人至少一粒，有__________種方法。

【解答】243；150

【詳解】

(1) 5 粒不同的糖果，任意分給 3 人，有 $3^5=243$ 種分法

(2)(方法一)



如上樹狀圖

①全分給一人的分法，有 3 種

②全分給二人的分法 $3\times(2^5-2)=90$

每人均得到糖果的分法有 $3^5-(3+90)=150$ 種

(方法二)

全部 $-$(其中一人沒有)$+$(其中二人沒有)（排容原理）

$3^5-C^3_1\cdot 2^5+C^3_2\cdot 1^5=243-96+3=150$

16.甲、乙、丙、…等 10 人抽籤決定乘坐A，B，C三車，A車坐 4 人，B車坐 3 人，C車坐 3 人，則(1)共有__________種坐法。 (2)甲、乙同乘A車，方法有__________種。

(3)甲、乙同車，有__________種坐法。

【解答】(1) 4200 (2) 560 (3)1120

【詳解】

(1) $\dfrac{C^{10}_4C^6_3C^3_3}{2!}\times 2!=\dfrac{10!}{4!3!3!}=4200$ 種

(2) $\dfrac{C^8_2C^6_3C^3_3}{2!}\times 2!=\dfrac{8!}{2!3!3!}=560$ 種

(3) 甲、乙同乘 A 車，有 560 種

甲、乙同乘 B 車，有 $C^8_4\cdot C^4_1\cdot C^3_3=280$ 種

甲、乙同乘 C 車，有 $C^8_4\cdot C^4_3\cdot C^1_1=280$ 種

故共有 $560+280+280=1120$ 種

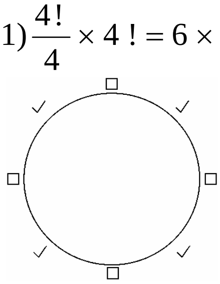
17.四對夫妻圍一圓圈，

(1)同性不相鄰，有__________種坐法。 (2)夫妻不相鄰的排法，有__________種。

【解答】(1) 144 (2) 1488

【詳解】

(1) $\dfrac{4!}{4}\times 4!=6\times 24=144$（種）



(2)排容原理

(全部)$-$(其中某一對夫妻相鄰)$+$(其中某二對夫妻相鄰)$-$(其中某三對夫妻相鄰)$+$(其中四對夫妻相鄰)

$\dfrac{8!}{8}-C^4_1\cdot 2^1\cdot\dfrac{7!}{7}+C^4_2\cdot 2^2\cdot\dfrac{6!}{6}-C^4_3\cdot 2^3\cdot\dfrac{5!}{5}+C^4_4\cdot 2^4\cdot\dfrac{4!}{4}=1488$（種）

18.將$(1-x)+(1-x)^2+(1-x)^3+\cdots+(1-x)^{20}$乘開合併同類項後，$x^2$的係數爲__________，

x^4的係數爲__________。

【解答】1330；20349

【詳解】

$$(1-x)+(1-x)^2+\cdots+(1-x)^{20}=\frac{(1-x)[1-(1-x)^{20}]}{1-(1-x)}=\frac{(x-1)^{21}-x+1}{x}$$

其中，x^2項的係數就是$(x-1)^{21}$中x^3項的係數$C_3^{21}\cdot x^3(-1)^{18}$，故$x^2$係數爲$C_3^{21}=1330$

x^4項的係數就是$(x-1)^{21}$中x^5項的係數$C_5^{21}x^5(-1)^{16}$，此x^4係數爲$C_5^{21}=20349$

19.$(0.99)^{10}$展開式中，取四位小數，小數點後第五位以下四捨五入，得近似值爲__________。

【解答】0.9044

【詳解】

$$(0.99)^{10}=(1-0.01)^{10}=C_0^{10}-C_1^{10}(0.01)+C_2^{10}(0.01)^2-C_3^{10}(0.01)^3+\cdots$$
$$=1-0.1+0.0045-0.00012+\cdots=0.90438\cdots\doteqdot 0.9044$$

20.$(\frac{2}{x}-x)^{12}$展開式中，x^4項係數 $=$__________。

【解答】7920

【詳解】

$(\frac{2}{x}-x)^{12}$展開式中一般項$C_k^{12}(\frac{2}{x})^k(-x)^{12-k}=C_k^{12}(-1)^{12-k}2^kx^{12-2k}$

$12-2k=4 \quad\Rightarrow\quad k=4 \quad\therefore\quad x^4$之係數 $=C_4^{12}\cdot(-1)^8\cdot 2^4=7920$

21.級數$H_0^3+H_1^3+H_2^3+\cdots+H_{18}^3$之和爲__________。

【解答】1330

【詳解】$H_0^3+H_1^3+H_2^3+\cdots+H_{18}^3=H_{18}^4=C_{18}^{21}=\frac{21!}{18!3!}=1330$

22.滿足$xyz=4000$ 之所有整數解$(x，y，z)$，共有__________組。

【解答】840

【詳解】

$xyz=4000=2^5\cdot 5^3$

$$\because\ \begin{cases}x\,|\,4000\\ y\,|\,4000\\ z\,|\,4000\end{cases}\quad\therefore\ \begin{cases}x=2^\alpha\cdot 5^a\\ y=2^\beta\cdot 5^b\\ z=2^\gamma\cdot 5^c\end{cases}\text{且}\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=5，\alpha，\beta，\gamma\in N\cup\{0\}\\ a+b+c=3，a，b，c\in N\cup\{0\}\end{cases}$$

$\Rightarrow\quad x，y，z$之正整數解有$H_5^3\cdot H_3^3$組解

$\because\quad (x，y，z)$之整數解有$(+，+，+)$，$(+，-，-)$，$(-，+，-)$，$(-，-，+)$四種類型

$\therefore\quad$ 整數解$(x，y，z)$共有$(H_5^3\cdot H_3^3)\cdot 4=C_5^7\cdot C_3^5\cdot 4=21\cdot 10\cdot 4=840$ 組

23.$[x+(y+z)^2]^8$展開式中，(1)共有__________項。 (2) $x^5y^4z^2$的係數爲__________。

【解答】(1) 81 (2) 840

【詳解】

$$\because\quad [x+(y+z)^2]^8=\sum_{k=0}^{8}C_k^8\,x^{8-k}(y+z)^{2k}$$

(1)其一般項中，$(y+z)^{2k}$展開式共有$(2k+1)$項

故$[x+(y+z)^2]^8$展開式共有 $\sum_{k=0}^{8}(2k+1)=1+3+5+7+9+11+13+15+17=81$ 項

(2) $x^5y^4z^2$為$C^8_3x^5(y+z)^6$中之一項，故其係數為$C^8_3\times C^6_4=840$

24.在$(x-2x^2+\frac{1}{x})^6$展開式中之常數項為__________。

【解答】80

【詳解】

$(x-2x^2+\frac{1}{x})^6$展開式的一般項為$\frac{6!}{p!q!r!}x^p(-2x^2)^q(\frac{1}{x})^r=\frac{6!}{p!q!r!}(-2)^qx^{p+2q-r}$

其中$p+q+r=6$，p，q，r為非負整數，求常數項，令$p+2q-r=0$

故$\begin{cases}p+q+r=6\\p+2q-r=0\end{cases}$的非負整數解為：

p	3	0
q	0	2
r	3	4

故常數項 $=\frac{6!}{3!3!}(-2)^0+\frac{6!}{2!4!}(-2)^2=80$

25.展開$(-2x+y^2+\frac{3}{2}z)^{10}$，合併同類項後，可得__________個次數為 14 的單項式。

【解答】7

【詳解】

一般項為$\frac{10!}{a!b!c!}(-2x)^a(y^2)^b(\frac{3}{2}z)^c=\frac{10!}{a!b!c!}(-2)^a(\frac{3}{2})^c\cdot x^ay^{2b}z^c$，

a，b，$c\in N\cup\{0\}$且$a+b+c=10$，次數為 14 的單項式 $\Rightarrow$ $a+2b+c=14$

$\therefore$ $\begin{cases}a+b+c=10 & \cdots\cdots① \\ a+2b+c=14 & \cdots\cdots②\end{cases}$ ② − ①得$b=4$ $\Rightarrow$ $a+c=6$

$\therefore$ a，c的非負整數解有 7 組 $\Rightarrow$ 次數為 14 的單項式有 7 個

26.求$(2x-1)^4(x+3)^5$展開式中，x^7項之係數為__________。

【解答】984

【詳解】

$(2x-1)^4(x+3)^5=[(-1)+2x]^4(3+x)^5$

$=[\sum_{\alpha=0}^{4}C^4_\alpha(-1)^{4-\alpha}(2x)^\alpha][\sum_{\beta=0}^{5}C^5_\beta 3^{5-\beta}x^\beta]=[\sum_{\alpha=0}^{4}\sum_{\beta=0}^{5}C^4_\alpha C^5_\beta(-1)^{4-\alpha}2^\alpha 3^{5-\beta}]x^{\alpha+\beta}$

$\alpha+\beta=7$ $\Rightarrow$ $(\alpha，\beta)=(2，5)，(3，4)，(4，3)$

$\therefore$ $C^4_2C^5_5(-1)^22^23^0+C^4_3C^5_4(-1)2^33+C^4_4C^5_3(-1)^02^43^2=24-480+1440=984$

27.編號 1 至 9 號之球共九個，

(1)取三球其乘積為偶數，取法有__________種。

(2)取三球其任二球號不為連續整數，取法有__________種。

(3)至少取一球，組合個數為__________。

(4)九個球平分成三堆之方法有__________種。

【解答】(1) 74 (2) 35 (3) 511 (4) 280

【詳解】

(1) (全部) −(乘積為奇數)

9 個球取 3 個，共C^9_3種取法，5 個奇數球取 3 個，共C^5_3種取法

$\therefore$ 共$C^9_3-C^5_3=74$種取法

(2) 9 個球取 3 個，有 6 個空位，可視為 6 個空位的前後共 7 個間隔任取 3 個

$\therefore$ 共$C_3^7=35$ 種取法

(3) 9 個球取或不取，共 2^9種取法，全部都不取，只有 1 種取法，共 $2^9-1=511$ 種取法

(4) 9 個球依序取 3 個、3 個、3 個，共$C_3^9C_3^6C_3^3$種取法，三堆球沒有順序問題

$\therefore$ 共$\dfrac{C_3^9C_3^6C_3^3}{3!}=280$ 種取法

28.同時擲 5 粒不同的骰子，會出現__________種不同的花色(結果)。

【解答】252

【詳解】

設 1 點出現x_1次，…，6 點出現x_6次，$x_1+x_2+\cdots+x_6=5$

其非負整數解的個數，即所求方法數$=H_5^6=C_5^{10}=252$（種）

29.設x，y，z，$t\in N$，則$x+y+z+t^2=10$ 有__________組解。

【解答】38

【詳解】

$t=1$ 時，$x+y+z=9$，有 $H_{9-3}^3=H_6^3=C_6^8=C_2^8=28$ 組

$t=2$ 時，$x+y+z=6$，有 $H_{6-3}^3=H_3^3=C_3^5=10$ 組

$\therefore$ 共有 $28+10=38$ 組

30.$x+y+z\leq21$，有__________組正整數解，有__________組正奇數解。

【解答】(1) 1330 (2) 220

【詳解】

(1) x，y，$z\in N$，$t\geq0$，設 $a+b+c+t=18$，其解有 $H_{21-1-1-1}^4=H_{18}^4=C_{18}^{21}=C_3^{21}=1330$ 組

(2)令 $x=2a+1$，$y=2b+1$，$z=2c+1$，a，b，$c\geq0$，且 $a+b+c\leq9$

令 $a+b+c+t=9$，且 a，b，c，$t\geq0$，有 $H_9^4=C_9^{12}=C_3^{12}=220$ 組解

31.(1)將 7 件不同物品，放入 4 個相同箱子，每箱至少一個，有__________種方法。

(2)將 7 件相同物品，放入 4 個不同箱子，每箱至少一個，有__________種方法。

【解答】(1) 8400 (2) 20

【詳解】

(1)物品不同，依箱子中物品數作分類(即分堆)

(1，1，1，4)放法有 $C_1^7C_1^6C_1^5C_4^4\cdot\dfrac{4!}{3!}=840$ 種

(1，1，2，3)放法有 $C_1^7C_1^6C_2^5C_3^3\cdot\dfrac{4!}{2!}=5040$ 種

(1，2，2，2)放法有 $C_1^7C_4^6C_2^4C_2^2\cdot\dfrac{4!}{3!}=2520$ 種

$\therefore$ 共有 $840+5040+2520=8400$ 種方法

(2)每箱先放入 1 球，剩下 3 球任意放入 $\therefore$ 有 $H_{7-1-1-1-1}^4=H_3^4=C_3^6=20$ 種方法

32.方程式$x+y+z+u=16$ 中，滿足$x\leq 4$，$y\leq 4$，$z\leq 5$，$u\leq 6$ 之正整數解有____組。

【解答】20

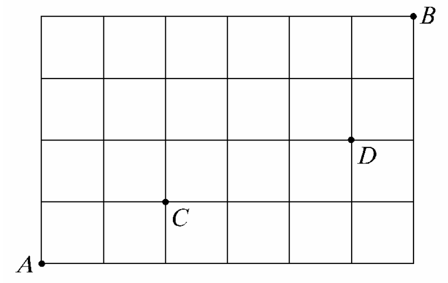
【詳解】大變數，令$\begin{cases}4-x=x'\\4-y=y'\\5-z=z'\\6-u=u'\end{cases}$，則$\begin{cases}0\leq x'\leq3\\0\leq y'\leq3\\0\leq z'\leq4\\0\leq u'\leq5\end{cases}$，且 $x'+y'+z'+u'=3$，其解有

$H_3^4 = C_3^6 = 20$ 組

33.棋盤型街道如下圖：由A取捷徑到B

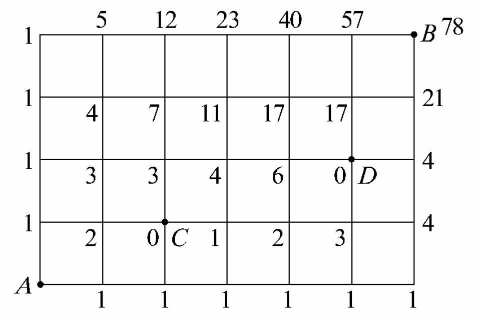
(1)至少經過C，D二點之一的走法有__________種。

(2)恰轉過 3 個彎的走法有__________種。



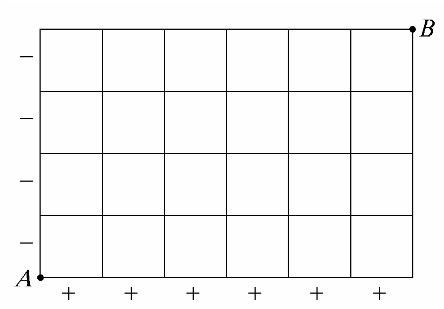
【解答】(1) 132　(2) 30

【詳解】



(1)應用累加法知，由A到B捷徑不過C，D者有 78 種

$\therefore$　所求 $=\dfrac{10!}{6!4!}-78=210-78=132$



(2)橫軸有 6 個「+」號，縱軸有 4 個「−」號，1 個轉彎 $=1$ 個變號數，

所求爲將 $++++++----$ 排成一列，有 3 個變號數求法

①$+\quad -\quad +\quad -$

甲 A　乙 B

$$\begin{cases} ++++\text{ 任意分給甲乙，分法 } H_4^2=C_4^5=5 \\ --\text{ 任意分給}A\text{，}B\text{，分法 } H_2^2=C_2^3=3 \end{cases}$$

$\therefore$　$5\times 3=15$

②$-\quad +\quad -\quad +$

A 甲　B 乙

$$\begin{cases} ++++\text{ 任意分給甲乙，分法} H_4^2=5 \\ --\text{ 任意分給}A\text{、}B\text{，分法} H_2^2=3 \end{cases}$$

$\therefore\quad 5\times 3=15$

所求 $=15+15=30$

34.設$S=\{1，2，3，4，5，6，7\}$，

(1) $A=\{(x，y，z)\mid x，y，z\in S$且$x<y<z\}$，則$n(A)=$＿＿＿＿＿。

(2) $B=\{(x，y，z)\mid x，y，z\in S$且$x\le y\le z\}$，則$n(B)=$＿＿＿＿＿。

【解答】(1) 35　(2) 84

【詳解】

(1)自 S 中的 7 個數字，任取三個相異數組合，每一個組合經重新由小至大排列恰對應到 A 的一個元素，如取$(3，7，2)\ \to\ (2，3，7)$，故 $n(A)=C^7_3=35$

(2)有等號即可重複選取，$n(B)=H^7_3=C^9_3=84$

35.一個風和日麗的早上，綠綠應邀前往霍格華茲魔法與巫術學院參觀，哈利和他的好友榮恩，妙麗，奈威已等在那裡迎接他。

(1)大夥急步前往孚立維教授的符咒課教室，全班共 10 名學生，其中有 5 名來自葛來芬多學院，另 5 名來自史萊哲林學院，孚立維教授將他們分成兩人一組練習。

①若任意分組有＿＿＿＿＿種不同的結果。

②若規定相同學院的學生不得同組，則有＿＿＿＿＿種不同的情形。

(2)這堂課他們練習驅使蟾蜍飛起來的咒語，

①奈威只記得咒語是由 3 個阿，2 個葛，1 個姆，及 1 個啦所組成，而且 3 個阿是分開的，則他最多試＿＿＿＿＿次就可成功。

②綠綠心中盤算著：若由這七個字任取四字，可組成＿＿＿＿＿種不同的咒語。

(3)下課後哈利請綠綠嚐嚐柏蒂豆子，袋中的豆子形狀大小相同，有 4 種口味，每種各 6 顆，

①綠綠隨意取用（至少一顆）則有＿＿＿＿＿種不同的情形。

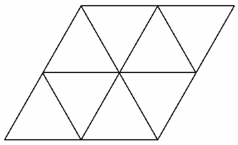
②若綠綠一把抓了 8 顆，則綠綠手上的豆子有＿＿＿＿＿種不同的可能。

(4)中午時間，他們一起去撞球，撞球檯上除了白色母球外，有相同的 3 個紅球及 1 個黃球、1 個藍球，利用白色母球分別撞擊五個色球進入六個不同位置的球袋，則①5 個色球進袋的顏色順序有＿＿＿＿＿種。

②5 個色球在 6 個球袋中有＿＿＿＿＿種不同的情形。

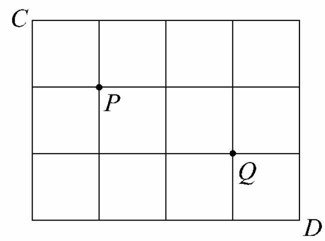
(5)下午的第一節課是石內卜教授的魔藥學，教授介紹了 6 種藥草，4 種毒蕈的用法後，要他們由其中選出 4 種，做爲下次報告的主題，並規定藥草類至少二種，毒蕈類至少一種，則有＿＿＿＿＿種不同的選法。接著教授拿出 6 瓶不同的藥水，要學生把正確的藥名：忘情水、青春泉、益智精、孟婆湯、縮小液、隱形劑，標示上去（藥名不可重複使用），結果榮恩答對了二個，則榮恩的答案有＿＿可能。

(6)接著是麥教授的變形課，這次教授要他們練習用魔杖指揮 8 塊顏色相異的正三角形，拼成如圖之可轉動但不可翻動的菱形，則有＿＿＿＿＿種不同的拼法。



(7)晚上哈利帶著綠綠夜遊學校的密道，由教室C到餐廳D之密道，如圖，哈利發現皮皮鬼守在P處，而飛七守在Q處，若要由C到D走捷徑且要避開討厭的飛七及皮皮

鬼，有__________種不同的走法。



(8)第二天清晨他們爲了即將到來的魁地奇比賽做啦啦隊的練習，成員包括妙麗、奈威共四男四女，他們排成圓形隊形，男女相隔且妙麗與奈威相鄰，有__________種不同的排法。

【解答】(1) ①945；②120　(2) ①120；②114　(3) ①2400；②149　(4) ①20；②2016
(5) 170；315　(6) 20160　(7) 7　(8) 72

【詳解】

(1)①從 10 個學生中，依序選 2 人、2 人、2 人、2 人、2 人同組

共有$C_2^{10}C_2^8C_2^6C_2^4C_2^2$種情形，又 5 組沒有次序問題

∴　共有$\dfrac{C_2^{10}C_2^8C_2^6C_2^4C_2^2}{5!}=945$種結果

②5 名葛來芬多學生依序可與 5、4、3、2、1 名史萊哲林學生同組

∴　共有$5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$種情形

(2)①先排 2 個「葛」，1 個「姆」，1 個「啦」，共有$\dfrac{4!}{2!1!1!}=12$種情形

又有 5 個空位選 3 個排「阿」，共有$C_3^5=10$種情形，∴　共$12\cdot10=120$次

②排列情形如下

$(3\text{同},1\text{異})$：$1\times C_1^3\times\dfrac{4!}{3!}=12$，$(2\text{同},2\text{同})$：$C_2^2\times\dfrac{4!}{2!2!}=6$

$(2\text{同},2\text{異})$：$C_1^2\times C_2^3\times\dfrac{4!}{2!}=72$，$(\text{四異})$：$C_4^4\times4!=24$

∴　共有$12+6+72+24=114$種

(3)①各種豆子可取 0～6 顆，共 7 種情形

有 4 種豆子，又至少取一顆，共$7^4-1=2400$種情形

②組合情形如下

$(6,2)$：$P_2^4=12$，$(6,1,1)$：$\dfrac{P_3^4}{2!}=12$

$(5,3)$：$P_2^4=12$，$(5,2,1)$：$P_3^4=24$

$(5,1,1,1)$：$\dfrac{P_4^4}{3!}=4$，$(4,4)$：$\dfrac{P_2^4}{2!}=6$

$(4,3,1)$：$P_3^4=24$，$(4,2,2)$：$\dfrac{P_3^4}{2!}=12$

$(4,2,1,1)$：$\dfrac{P_4^4}{2!}=12$，$(3,3,2)$：$\dfrac{P_3^4}{2!}=12$，$(3,3,1,1)$：$\dfrac{P_4^4}{2!2!}=6$

$(3，2，2，1)：\dfrac{P_4^4}{2!}=12，(2，2，2，2)：\dfrac{P_4^4}{4!}=1$

∴　共 $12+12+12+24+4+6+24+12+12+12+6+12+1=149$ 種可能

(4)①5 個球，有 5！ 種排列，又其中有 3 個相同紅球　∴　共 $\dfrac{5!}{3!}=20$ 種

②6 個球袋重複選 3 個裝 3 個紅球，有 $H_3^6=C_3^8=56$ 種可能

6 個球袋選 1 個裝黃球，有 6 種可能，6 個球袋選 1 個裝藍球，有 6 種可能

∴　共有 $56\times6\times6=2016$ 種情形

(5)①設選 x 種藥草，y 種毒蕈，$x\geq2$，$y\geq1$，$x+y=4\Rightarrow$　$(x，y)=(2，2)，(3，1)$

∴　共有 $C_2^6C_2^4+C_3^6C_1^4=90+80=170$ 種

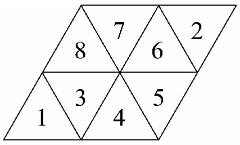
②2 個藥名正確，有 $C_2^6=15$ 種可能，剩下 4 個藥名錯誤

有 $4!-C_1^4\cdot3!+C_2^4\cdot2!-C_3^4\cdot1!+C_4^4\cdot0!=24-24+12-4+1=9$ 種可能

∴　共有 $15\cdot9=135$ 種

(6)外面 1、2 號三角形，有 $8\times7=56$ 種顏色，中間六邊形，有 $6!=720$ 種顏色

又菱形轉 180°後，與原菱形重合　∴　共有 $\dfrac{8\times7\times6!}{2}=20160$ 種拼法



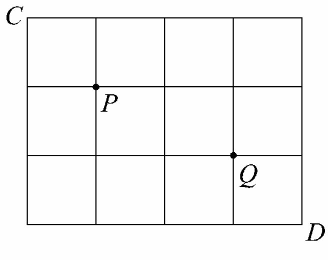
(7)全部：$\dfrac{7!}{4!3!}=35$ 種走法

$C\to P\to D$：$\dfrac{2!}{1!1!}\cdot\dfrac{5!}{3!2!}=20$ 種走法

$C\to Q\to D$：$\dfrac{5!}{3!2!}\cdot\dfrac{2!}{1!1!}=20$ 種走法

$C\to P\to Q\to D$：$\dfrac{2!}{1!1!}\cdot\dfrac{3!}{2!1!}\cdot\dfrac{2!}{1!1!}=12$ 種走法

故不走 P 且不走 Q 有 $35-20-20+12=7$ 種走法



(8)先排 4 個男生，有 $\dfrac{4!}{4}=6$ 種排法，妙麗必與奈威相鄰，有 2 種排法

剩下 3 個空位，排 3 個女生，有 $3!=6$ 種排法　∴　共 $6\cdot2\cdot6=72$ 種