高雄市明誠中學 高三數學平時測驗　　日期：94.11.16					
範圍	Book3　CH4 圓與球	班級	普三　　班	姓名	
		座號			

一、單選題(每題 10 分)

1. 有一圓C：$x^2+y^2-4x+4y-2=0$ 及一點$P(4，2)$，則
(A) P點在圓上　(B)過P之切線有一為$x+3y+2=0$　(C)過P之切線有一為 $3x-y-14=0$
(D)兩切線之銳夾角為 45°　(E)兩切線互相垂直

【解答】(E)

【詳解】

C：$(x-2)^2+(y+2)^2=10$，圓心$A(2，-2)$，半徑$r=\sqrt{10}$，而 $\overline{AP}>r$，故P點在圓外

設過$P(4，2)$與圓C相切之直線L：$y-2=m(x-4)$

則$d(A，L)=\dfrac{|2m-4m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$　$\Rightarrow$　$m=-3$ 或$\dfrac{1}{3}$

得過P之切線為 $3x+y-14=0$ 及$x-3y+2=0$

且兩切線互相垂直（$\because$　$(-3)\times\dfrac{1}{3}=-1$），故選(E)

2. 光源放在點$A(1，2，3)$，向球面S：$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=1$ 照射，則在xy平面上的射影區域面積為(A) 3π　(B) 4π　(C) 5π　(D) 6π　(E) 9π

【解答】(A)

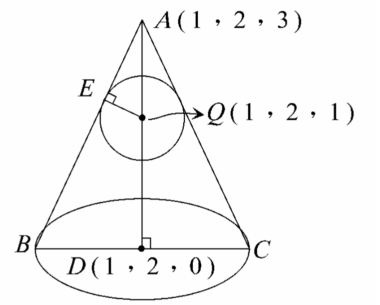
【詳解】

如下圖，其射影為一個圓區域，中心為$D(1，2，0)$，$\overline{BC}$ 為直徑

$\because$　$\overline{AD}=3$，$\overline{AQ}=2$，$\overline{QE}=1$，$\overline{AE}=\sqrt{3}$，而$\triangle AEQ\sim\triangle ADB$　$\therefore$

$\overline{BD}$：$\overline{QE}=\overline{AD}$：$\overline{AE}$

$\Rightarrow$　$\overline{BD}$：$1=3$：$\sqrt{3}$　$\Rightarrow$　$\overline{BD}=\sqrt{3}$　$\therefore$　所求面積 $=\pi(\sqrt{3})^2=3\pi$



3. 空間中，滿足$(x^2+y^2+z^2-1)(x^2+y^2+z^2-2)(x^2+y^2+z^2-3)\le 0$ 的圖形之體積為
(A)$\dfrac{80}{3}\pi$　(B)$\dfrac{40}{3}\pi$　(C)$\dfrac{20}{3}\pi$　(D)$\dfrac{1}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)\pi$　(E)$\dfrac{4}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)\pi$

【解答】(E)

【詳解】

$\because$　$(k-1)(k-2)(k-3)\le 0$　$\Leftrightarrow$　$k\le 1$ 或 $2\le k\le 3$

$\therefore$　$(x^2+y^2+z^2-1)(x^2+y^2+z^2-2)(x^2+y^2+z^2-3)\le 3$

$\Rightarrow$　$0\le x^2+y^2+z^2\le 1$ 或 $2\le x^2+y^2+z^2\le 3$

所求體積 $=\dfrac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3-\dfrac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^3+\dfrac{4}{3}\pi(\sqrt{1})^3=\dfrac{4}{3}\pi(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)$

4. 設直線L：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$與球面$S$：$x^2+y^2+z^2=k$相切，則常數$k$之值為

(A) 6　(B) 7　(C) 35　(D) $\dfrac{35}{6}$　(E) $\dfrac{35}{36}$

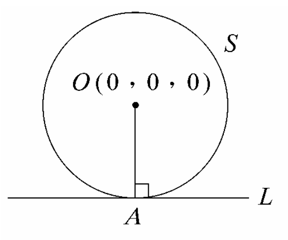
【解答】(D)

【詳解】

設切點為 $A(t+1，2t-1，t+2)\in L$　∵　相切　∴　$\overrightarrow{OA}\perp L$

$\Rightarrow$　$(t+1，2t-1，t+2)\cdot(1，2，1)=0$　$\Rightarrow$　$t=-\dfrac{1}{6}$　$\Rightarrow$　$A(\dfrac{5}{6}，-\dfrac{4}{3}，\dfrac{11}{6})$

半徑 $\sqrt{k}=\overline{OA}$　$\Rightarrow$　$k=\overline{OA}^2=\dfrac{35}{6}$



5. 下列哪一個平面與球面S：$x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-19=0$ 相交所成的圓面積最大？

(A) $x+y+z=0$　(B) $x-2y=0$　(C) $z+1=0$　(D) $2x-y-2z=5$　(E) $3x+4y-1=0$

【解答】(C)

【詳解】

S：$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=25$，球心為$Q(1，-2，-1)$，半徑$r=5$

(A) Q到$x+y+z=0$ 之距離 $=\dfrac{|1-2-1|}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}<r$

(B) Q到$x-2y=0$ 之距離 $=\dfrac{|1+4|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}<r$

(C) Q到$z+1=0$ 之距離 $=0$

(D) Q到 $2x-y-2z-5=0$ 之距離 $=\dfrac{1}{3}<r$

(E) Q到 $3x+4y-1=0$ 之距離 $=\dfrac{6}{5}<r$

∴　$z+1=0$ 與球面S截出「大圓」，其面積 25π 為最大

6. (複選)已知包含三點 $A(-1，0)$，$B(1，2)$，$C(7，0)$的圓區域中，以圓 C 的面積最小，設圓 C 的圓心為$(a，b)$，半徑為 r，則(A) $a=3$　(B) $b=-2$　(C) $r=2\sqrt{5}$

(D) $a+b=3$　(E) $r\le 4$

【解答】(A)(D)(E)

【詳解】

$\overline{AB}=\sqrt{8}$，$\overline{BC}=\sqrt{40}$，$\overline{CA}=\sqrt{64}$　$\Rightarrow$　$\overline{CA}^2>\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$　∴　△ABC 為鈍角△

∴　包含三點 A，B，C 之圓區域，以$\overline{CA}$為直徑者面積最小

∴　圓 C 的圓心為$(a，b)=\overline{CA}$中點$(3，0)$，半徑 $r=\dfrac{1}{2}\,\overline{CA}=4$

7. (複選)xy 平面上，下列各組條件中，何者恰可決定一圓？

(A)圓心為 $A(-1，-2)$，且與 x 軸及 y 軸都相切

(B)過點 $A(-1，-2)$，$B(1，2)$，$C(5，10)$

(C)與 x 軸，y 軸及直線 $x+y=1$ 都相切

(D)圓心在直線 $x-y+3=0$ 上，又過點 $A(-1，-2)$，$B(1，2)$

(E)過四點 $O(0，0)$，$D(1，0)$，$E(0，1)$，$F(\frac{1}{2}，\frac{1}{2}(1-\sqrt{2}))$

【解答】(D)(E)

【詳解】

(A)與 x 軸及 y 軸都相切的圓，其圓心必在直線 $x-y=0$ 或 $x+y=0$ 上

今以 $A(-1，-2)$為圓心，不合。即沒有圓滿足此條件

(B)$\because$ $A，B，C$ 共線 $\therefore$ 沒有圓過此三點

(C)與 x 軸，y 軸及 $x+y=1$ 都相切的圓，在第一象限有 2 個，第二、四象限各有 1 個

(D)設圓心為 $Q(t，t+3)$，由 $\overline{QA}=\overline{QB}=$ 半徑，得唯一的圓

(E)$\because$ $\angle DOE=90°$ $\therefore$ $\triangle DOE$ 的外接圓之圓心為 $Q(\frac{1}{2}，\frac{1}{2})$

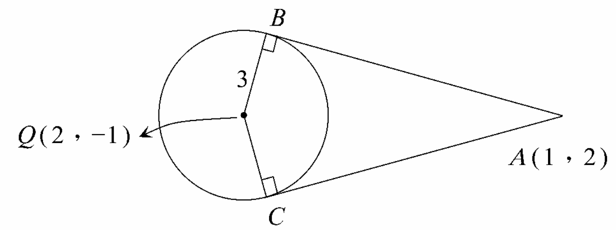
$\because$ $\overline{QO}=\overline{QF}=$ 半徑 $\therefore$ $O，D，E，F$ 四點共圓

8. (複選)xy平面上，過點$A(1，2)$作圓$C：x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 的兩切線，切點為B，C，則(A) $\overline{AB}=1$ (B) $\overleftrightarrow{BC}$ 的方程式為$x-3y+4=0$ (C) $\overline{BC}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$

(D)$\triangle ABC$的面積為$\frac{3}{10}$ (E)$\triangle ABC$的外接圓方程式為$x^2+y^2-3x-y+1=0$

【解答】(A)(B)(C)(D)

【詳解】



(A) $\overline{AB}=\sqrt{1^2+2^2-4\times1+2\times2-4}=1$

(B)(E)$\triangle ABC$的外接圓 = 以 $\overline{AQ}$ 為直徑的圓

$\therefore$ 其方程式為$(x-2)(x-1)+(y+1)(y-2)=0$，即$x^2+y^2-3x-y=0$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BC}$ ：$(x^2+y^2-3x-y)-(x^2+y^2-4x+2y-4)=0$ $\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{BC}$ ：$x-3y+4=0$

(C)$\because$ $d(Q；\overleftrightarrow{BC})=\frac{9}{\sqrt{10}}$ $\Rightarrow$ $\overline{BC}=2\sqrt{3^2-(\frac{9}{\sqrt{10}})^2}=\frac{6}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$

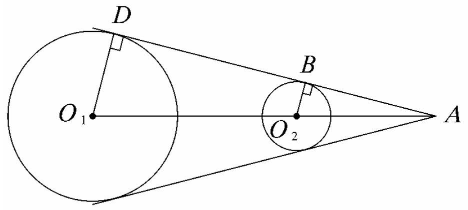
(D)$\triangle ABC$面積 $=\frac{1}{2}\overline{BC}\,[d(A；\overleftrightarrow{BC})]=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{5}\times\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{3}{10}$

9. (複選)兩圓$C_1：x^2+y^2-6x-2y+1=0$，$C_2：x^2+y^2+4x+3=0$ 外公切線夾銳角θ，則下列敘述何者正確？(A)外公切線段長為$\sqrt{22}$ (B)內公切線段長為$\sqrt{10}$

(C)兩外公切線的交點為$(-\frac{9}{2}，-\frac{1}{2})$ (D)兩內公切線的交點為$(-\frac{3}{4}，\frac{1}{4})$ (E)$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{3}{5}$

【解答】(A)(B)(C)(D)

【詳解】



(1) C_1：$(x-3)^2+(y-1)^2=9$，C_2：$(x+2)^2+y^2=1$

∴　圓心$O_1(3，1)$，$O_2(-2，0)$，半徑$R=3$，$r=1$

(2)外公切線段長 $=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(R-r)^2}=\sqrt{26-4}=\sqrt{22}$

(3)內公切線段長 $=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(R+r)^2}=\sqrt{26-16}=\sqrt{10}$

(4)在△O_1AD中，$\overline{AO_2}：\overline{AO_1}=\overline{BO_2}：\overline{DO_1}=\dfrac{r}{R}=\dfrac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad A(-\dfrac{9}{2}，-\dfrac{1}{2})$

(5)仿(4)，兩內公切線的交點爲$(-\dfrac{3}{4}，\dfrac{1}{4})$

(6)在△O_2AB中，$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\overline{O_2B}}{\overline{O_2A}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{26}{4}}}=\dfrac{2}{\sqrt{26}}$

二、填充題(每題 0 分)

1. 兩圓C_1：$x^2+y^2+6y-28=0$，C_2：$x^2+y^2+6x-4=0$ 相交於A，B兩點，則$\overleftrightarrow{AB}$方程式爲__________。

【解答】$x-y+4=0$

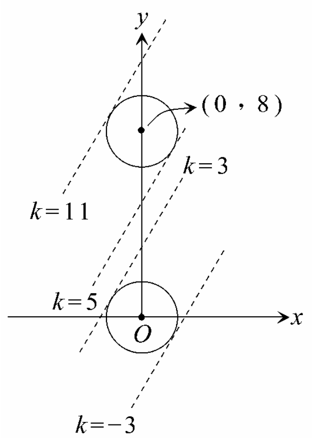
【詳解】

$\overleftrightarrow{AB}$：$(x^2+y^2+6x-4)-(x^2+y^2+6y-28)=0\quad\Rightarrow\quad\overleftrightarrow{AB}$：$x-y+4=0$

2. xy平面上，已知直線L：$y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+k$穿過兩個圓C_1：$x^2+y^2=4$與C_2：$x^2+(y-8)^2=4$之間的空隙，則實數k的範圍爲__________。

【解答】$3<k<5$

【詳解】



(1)當L與C_1相切時，圓心$O(0，0)$到L距離 ＝ 半徑 2　$\Rightarrow\quad k=\pm3$

(2)當L與C_2相切時，同理$k=5$或$k=11$

(3)∴　L欲穿過C_1，C_2之間的空隙　∴　$3<k<5$

3. 設一三角形的三頂點爲$(-1，0)$，$(0，-1)$，$(-2，-1)$，此三角形外接圓爲圓C，

(1)試求圓C之圓心__________。

(2)通過圓外一點$P(-1，3)$且與圓C相切的直線斜率爲__________，P到切點的距離爲__________。

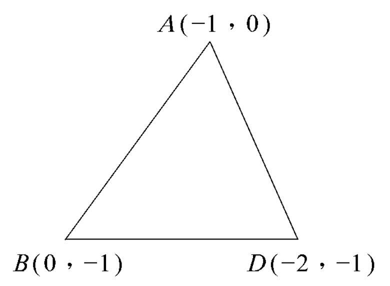
(3)承上，若R爲圓C上任一點，試求$\overline{PR}$的最大値爲__________。

【解答】(1) $(-1，-1)$ (2) $\pm\sqrt{15}$，$\sqrt{15}$ (3) 5

【詳解】

(1) $\overline{AB}$中垂線L_1：$x-y=0$，$\overline{BD}$中垂線L_2：$x+1=0$，L_1，L_2交於$(-1，-1)$

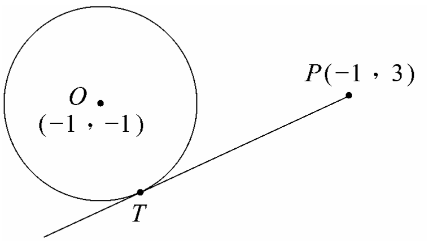
$\therefore$ 外接圓圓心$O(-1，-1)$，$\overline{OA}=1$



(2)設切線斜率m，切點T，$y-3=m(x+1)$，即$mx-y+m+3=0$

圓心到切線距離$\dfrac{|-m+1+m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=1 \Rightarrow m^2+1=16 \Rightarrow m=\pm\sqrt{15}$

$\overline{OP}=4$，$\overline{PT}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$



(3) $\overline{PR}=\overline{PO}+1=5$

4. 設$A(4，1)$與$B(2，-3)$爲坐標平面上兩點，若$\overline{AB}$爲圓C的一弦且此弦與圓心的距離爲$\sqrt{5}$，求圓C的方程式__________。

【解答】$(x-5)^2+(y+2)^2=10$ 或 $(x-1)^2+y^2=10$

【詳解】

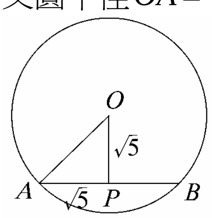
設圓心$O(a，b)$，$\overline{AB}$中點$P(3，-1)$，$\overrightarrow{AB}=(-2，-4)\,//\,(1，2)$，$\overline{AB}=2\sqrt{5}$

$\overrightarrow{PO}\perp\overrightarrow{AB}$ $\therefore$ $\overrightarrow{PO}=t(2，-1)$ $\because$ $|\overrightarrow{PO}|=\sqrt{5}$ $\therefore$ $4t^2+t^2=5$ $\therefore$ $t=\pm 1$

①當$t=1$時，$\overrightarrow{PO}=(2，-1) \Rightarrow (a-3，b+1)=(2，-1) \Rightarrow (a，b)=(5，-2)$

②當$t=-1$時，$\overrightarrow{PO}=(-2，1) \Rightarrow (a-3，b+1)=(-2，1) \Rightarrow (a，b)=(1，0)$

又圓半徑$\overline{OA}=\sqrt{5+5}=\sqrt{10}$ $\therefore$ 圓方程式爲$(x-5)^2+(y+2)^2=10$ 或 $(x-1)^2+y^2=10$



5. 設$A(1，0)$，$B(3，-4)$，直線L：$3x-4y=6$，

(1)以A為圓心，且與直線L相切的圓方程式為＿＿＿＿＿。
(2)過A，B兩點，且圓心在直線L上的圓的面積為＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $(x-1)^2+y^2=\frac{9}{25}$　(2) $(x+6)^2+(y+6)^2=85$

【詳解】

$A(1，0)$，$B(3，-4)$，$L：3x-4y=6$

(1)以A為圓心且與直線L相切

$\therefore$　半徑 $=d(A，L)=\frac{|3-6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3}{5}$　$\therefore$　圓方程式為$(x-1)^2+y^2=\frac{9}{25}$

(2) $\overline{AB}$ 的中垂線與直線L的交點即為圓心，取A，B中點$(2，-2)$，$m_{\overline{AB}}=\frac{-4}{2}=-2$

$\therefore$　$\overline{AB}$ 中垂線為$y+2=\frac{1}{2}(x-2)$　$\Rightarrow$　$x-2y=6$

$\begin{cases}3x-4y=6\\x-2y=6\end{cases}$　$\Rightarrow$　$(x，y)=(-6，-6)$

圓半徑 $=\sqrt{(-6-1)^2+(-6)^2}=\sqrt{85}$　$\therefore$　圓方程式為$(x+6)^2+(y+6)^2=85$

6. 自點$P(6，2)$作圓$x^2+y^2-8x+6y+21=0$的切線，切點A，B，求
(1)二切線方程式為＿＿＿＿＿。
(2)直線AB的方程式為＿＿＿＿＿。
(3)△PAB的外接圓的方程式為＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $21x-20y-86=0$，$x-6=0$　(2) $2x+5y+3=0$　(3) $x^2+y^2-10x+y+18=0$

【詳解】

圓$(x-4)^2+(y+3)^2=4$，圓心$Q(4，-3)$，半徑$r=2$

(1)設過點$P(6，2)$的切線方程式為$y-2=m(x-6)$　$\Rightarrow$　$mx-y+2-6m=0$

圓心Q到切線距離 $=\frac{|4m+3+2-6m|}{\sqrt{m^2+1}}=2$　$\Rightarrow$　$(5-2m)^2=4(m^2+1)$　$\Rightarrow$　$m=\frac{21}{20}$

$\therefore$　一切線方程式為$y-2=\frac{21}{20}(x-6)$，但切線有二條，所以另一切線沒有斜率

其方程式為$x-6=0$，故所求二切線為 $21x-20y-86=0$ 及$x-6=0$

(2) $6x+2y-\frac{8}{2}(x+6)+\frac{6}{2}(y+2)+21=0$　$\Rightarrow$　$2x+5y+3=0$

(3)△PAB的外接圓即以$\overline{QP}$為直徑的圓

其方程式為$(x-4)(x-6)+(y+3)(y-2)=0$　$\Rightarrow$　$x^2+y^2-10x+y+18=0$

7. 過點$(1，3)$且與圓$(x+1)^2+(y-2)^2=5$相切的直線方程式為＿＿＿＿＿。

【解答】$2x+y-5=0$

【詳解】

點 $P(1，3)\in$圓 C

故所求切線 $L：(1+1)(x+1)+(3-2)(y-2)=5$，得 $L：2x+y-5=0$

8. 坐標平面上，圓$C：x^2+y^2+6x-4y-23=0$，點$P(4，-4)$，求過P點且與圓C相切之切線方程式＿＿＿＿＿。

【解答】$y=-4$，$y+4=\frac{-84}{13}(x-4)$

【詳解】

C：$(x+3)^2+(y-2)^2=36$，圓心$Q(-3，2)$，半徑$r=6$

設過$P(4，-4)$之切線爲L：$y+4=m(x-4)$ $\Rightarrow$ L：$mx-y-4m-4=0$

$\because$ 相切 $\therefore$ $d(Q，L)=r$ $\Rightarrow$ $\dfrac{|7m+6|}{\sqrt{m^2+1}}=6$ $\Rightarrow$ $|7m+6|=6\sqrt{m^2+1}$

兩邊平方 $\Rightarrow$ $49m^2+84m+36=36(m^2+1)$ $\Rightarrow$ $13m^2+84m=0$ $\therefore$ $m=0$ 或 $\dfrac{-84}{13}$

即切線L分別爲$y=-4$ 及$y+4=\dfrac{-84}{13}(x-4)$

9. $A(1，2)$，$B(-3，0)$，

(1)求以 $\overline{AB}$ 爲直徑的圓K方程式，得__________。（以$x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 形式表之）

(2)若點$P(x，y)$爲圓K上之動點，則$x+2y+7$ 之最大值爲M，最小值爲m，得數對 $(M，m)=$__________。

【解答】(1) $x^2+y^2+2x-2y-3=0$ (2) $(13，3)$

【詳解】

(1)利用直徑式：$(x-1)(x+3)+(y-2)(y-0)=0$，得$x^2+y^2+2x-2y-3=0$

(2) $P(x，y)\in$圓K：$(x+1)^2+(y-1)^2=5$

利用柯西不等式：$[(x+1)^2+(y-1)^2](1^2+2^2)\ge[(x+1)+2(y-1)]^2$

$\Rightarrow$ $5\times5\ge(x+2y-1)^2$ $\Rightarrow$ $-5\le x+2y-1\le5$ $\Rightarrow$ $3\le x+2y+7\le13$

得數對$(M，m)=(13，3)$

10.圓C通過$P(2，0)$，$Q(0，1)$，已知圓C在點P的切線斜率爲 -1，求圓心：__________。

【解答】$(-\dfrac{1}{2}，-\dfrac{5}{2})$

【詳解】

設圓C：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，圓C在點P的切線爲$(2-a)(x-a)+(0-b)(y-b)=r^2$

圓C過$P(2，0)$，$Q(0，1)$，且圓C在點P的切線斜率爲 -1

$\Rightarrow$ $\begin{cases}(2-a)^2+(0-b)^2=r^2\cdots\cdots①\\(0-a)^2+(1-b)^2=r^2\cdots\cdots②\\(2-a):(-b)=1:1\cdots\cdots③\end{cases}$，由③得$b=a-2\cdots\cdots④$，① − ②得 $4a-2b=3\cdots\cdots⑤$

④代入⑤得$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{5}{2}$

11.圓心在第一象限，通過$A(1，1)$和$B(2，2)$兩點且與x軸相切的圓方程式爲__________。

【解答】$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

【詳解】

圓心在第一象限，且與x軸相切，設圓心$(a，b)$，$a>0$，$b>0$，半徑 $=b$

$\therefore$ 圓方程式：$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$，過$(1，1)$，$(2，2)$

$\Rightarrow$ $\begin{cases}(1-a)^2+(1-b)^2=b^2\\(2-a)^2+(2-b)^2=b^2\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}1-2a+a^2+1-2b=0\cdots\cdots①\\4-4a+a^2+4-4b=0\cdots\cdots②\end{cases}$

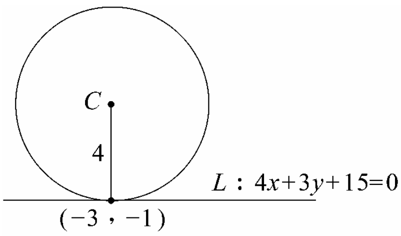
① × 2 − ②得$a^2-4=0$ $\therefore$ $a=2$ 代入①得$b=1$ $\therefore$ 圓方程式爲$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

12.若圓C與直線L：$4x+3y+15=0$ 相切於$(-3，-1)$，且圓半徑爲 4，圓心的x坐標爲正，則圓C的圓心爲__________。

【解答】$(\frac{1}{5}，\frac{7}{5})$

【詳解】

設 $C(a，b)$，$a>0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}(a+3):(b+1)=4:3\\ \dfrac{|4a+3b+15|}{\sqrt{4^2+3^2}}=4\end{cases}$ $\Rightarrow$ $a=\frac{1}{5}$，$b=\frac{7}{5}$



13.設A點在圓$x^2+y^2=4$ 上移動，B點在圓$x^2+y^2=16$ 上移動，則所有 $\overline{AB}$ 中點所成圖形的面積 =__________。

【解答】8π

【詳解】

設$A(2\cos\alpha，2\sin\alpha)$，$B(4\cos\beta，4\sin\beta)$，$\overline{AB}$ 中點$P(x，y)$

則$x=\frac{1}{2}(2\cos\alpha+4\cos\beta)=\cos\alpha+2\cos\beta$，$y=\frac{1}{2}(2\sin\alpha+4\sin\beta)=\sin\alpha+2\sin\beta$

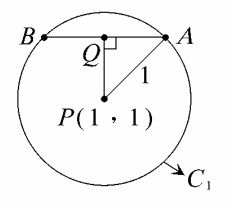
$\Rightarrow$ $x^2+y^2=(\cos\alpha+2\cos\beta)^2+(\sin\alpha+2\sin\beta)^2=5+4\cos(\alpha-\beta)$

$\because$ $-1\le\cos(\alpha-\beta)\le 1$ $\therefore$ $1\le x^2+y^2\le 9$，圖形面積 $=9\pi-\pi=8\pi$

14.兩圓C_1：$x^2+y^2-2x-2y+1=0$，C_2：$x^2+y^2+4x+4y-17=0$ 交A，B兩點，$\overline{AB}=$_____。

【解答】$\sqrt{2}$

【詳解】



$\overleftrightarrow{AB}$：$C_1-C_2=0$ $\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{AB}$：$x+y-3=0$，$\overline{PQ}=d(P，\overleftrightarrow{AB})=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 且 $\overline{AP}=1$

則 $\overline{AB}=2\overline{AQ}=2\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{PQ}^2}=\sqrt{2}$

15.假設一地球儀的半徑爲R，在北緯 30°的緯圈上，由東經 30°的位置沿逆時針方向東移到東經 60°的位置，其所經的弧長爲__________。

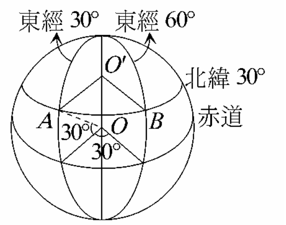
【解答】$\frac{\sqrt{3}}{12}\pi R$

【詳解】

設球心 O，北緯 30°的小圓圓心 O'，半徑 r

在北緯 30°的緯圈上，東經 30°的位置爲 A，東經 60°的位置爲 B

$\therefore$ $\angle AO'B=30°$，$r=R\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}R$ $\therefore$ $\widehat{AB}=r\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}R\times\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi R$



16.設球面方程式為$x^2+y^2+z^2=27$，若有一直線L：$\begin{cases} x+2y=3 \\ z=3 \end{cases}$交球面於$P$，$Q$兩點，則線段$\overline{PQ}$之中點坐標為__________。

【解答】$(\frac{3}{5}$，$\frac{6}{5}$，$3)$

【詳解】

L：$\begin{cases} x=3-2t \\ y=t \\ z=3 \end{cases}$　代入球面S：$x^2+y^2+z^2=27$

得 $5t^2-12t-9=0$，$(5t+3)(t-3)=0$，$t=\frac{-3}{5}$，3 代入L

得$P(\frac{21}{5}$，$\frac{-3}{5}$，$3)$，$Q(-3$，3，$3)$　∴　中點為$(\frac{3}{5}$，$\frac{6}{5}$，$3)$

17.球面S與S_0：$(x+2)^2+y^2+(z-1)^2=2$ 同心，若S的體積為S_0體積的 $2\sqrt{2}$ 倍，則S的方程式為__________。

【解答】$(x+2)^2+y^2+(z-1)^2=4$

【詳解】

設S的半徑r，則S的體積為$\frac{4}{3}\pi r^3$，S_0的體積 $=\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^3=\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

$\frac{4\pi r^3}{3}=2\sqrt{2}\cdot\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$　⇒　$r^3=2^3$　⇒　$r=2$　∴　S：$(x+2)^2+y^2+(z-1)^2=4$

18.球面S切xy平面於點$(1$，2，$0)$且過點$(3$，1，$2)$，則S的方程式為__________。

【解答】$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-\frac{9}{4})^2=\frac{81}{16}$

【詳解】

球面S切xy平面於$A(1$，2，$0)$，設球心Q，則$\overline{QA}$垂直xy平面且$\overline{QA}$為球之半徑

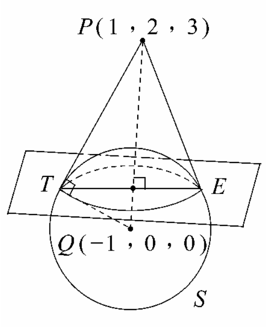
設$Q(1$，2，$k)$，又$B(3$，1，$2)$，則$\overline{QA}=\overline{QB}=|k|$　⇒　$(3-1)^2+(-1)^2+(k-2)^2=k^2$

⇒　$k=\frac{9}{4}$，故球面S的方程式為$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-\frac{9}{4})^2=\frac{81}{16}$

19.點$P(1$，2，$3)$到球面S：$(x+1)^2+y^2+z^2=10$ 的切線段長為__________，所有切點形成一個圓，此圓所在平面方程式為__________，圓的圓心坐標為__________。

【解答】(1) $\sqrt{7}$　(2) $2x+2y+3z=8$　(3) $(\frac{3}{17}$，$\frac{20}{17}$，$\frac{30}{17})$

【詳解】



$S：(x+1)^2+y^2+z^2=10$ 的球心$Q(-1，0，0)$，過$P(1，2，3)$作球的切線，一切點T

(1)切線段長 $\overline{PT}=\sqrt{\overline{PQ}^2-r^2}=\sqrt{(4+4+9)-10}=\sqrt{7}$

(2)所有切點所成的圓即以P爲中心，$\overline{PT}$ 爲半徑的球面S'與球面S的交圓

此圓所在平面E即爲兩球的根平面，S'的方程式爲$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=7$

平面E的方程式爲$[(x+1)^2+y^2+z^2-10]-[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-7]=0$

即 $2x+2y+3z=8$

(3)兩球面交圓的圓心爲球心連線PQ與平面E的交點，直線PQ的方程式：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$

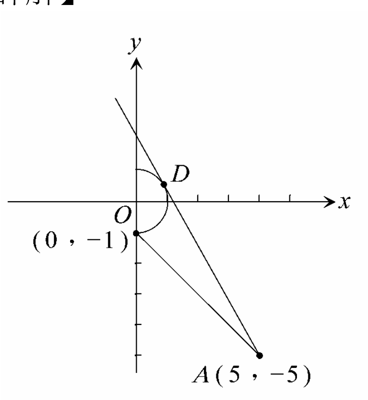
設圓心$R(-1+2t，2t，3t)$代入$E：2x+2y+3z=8$ 得 $2(-1+2t)+2(2t)+3(3t)=8$

$\Rightarrow\quad t=\dfrac{10}{17}$，故$R(\dfrac{3}{17}，\dfrac{20}{17}，\dfrac{30}{17})$

20.設$(x，y)$滿足$x=\sqrt{1-y^2}$，則$\dfrac{y+5}{x-5}$的最小值 =__________，最大值=__________。

【解答】$-\dfrac{4}{3}$，$-\dfrac{4}{5}$

【詳解】



$x=\sqrt{1-y^2}\geq 0\quad\Rightarrow\quad x^2+y^2=1$ 且$x\geq 0$ 表一右半圓

令$A(5，-5)$，$P(x，y)\quad\Rightarrow\quad\dfrac{y+5}{x-5}$表 $\overleftrightarrow{AP}$ 斜率

當$P(0，-1)$時有最大値$\dfrac{-1+5}{-5}=-\dfrac{4}{5}$

當$P=D$（切點）時有最小値，令$\dfrac{y+5}{x-5}=m$

$mx-y-5m-5=0$ 與圓相切 $\quad\Rightarrow\quad\dfrac{|-5m-5|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

$\Rightarrow\quad 25m^2+50m+25=m^2+1\quad\Rightarrow\quad 24m^2+50m+24=0\quad\Rightarrow\quad m=-\dfrac{3}{4}$ 或 $-\dfrac{4}{3}$

$m=-\frac{3}{4}$時，表切於圓下方的切線斜率，不合。故$m=-\frac{4}{3}$爲所求最小值

21.點$P(x，y，z)$爲球面$S：(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=16$上任一點，

(1)求$6x-2y-3z$之最大值爲__________。

(2)求$\sqrt{(x-4)^2+(y+4)^2+(z-5)^2}$之最小值爲__________。

【解答】(1) 21　(2) 3

【詳解】

(1)由柯西不等式

$[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2][6^2+(-2)^2+(-3)^2]\geq[6(x-1)-2(y-2)-3(z-3)]^2$

$\Rightarrow\quad 16\times 49\geq(6x-2y-3z+7)^2\quad\Rightarrow\quad -28\leq 6x-2y-3z+7\leq 28$

$\Rightarrow\quad -35\leq 6x-2y-3z\leq 21$，故最大值爲 21

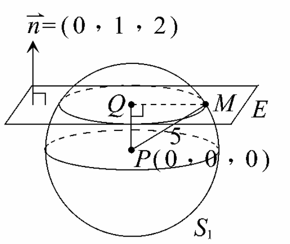
(2)設$P(x，y，z)\in S$，$Q(4，-4，5)$

則所求 $=|\overline{AQ}-R|$（其中$A(1，2，3)$及$R=4$分別爲S之球心及半徑）$=7-4=3$

22.二球面$S_1：x^2+y^2+z^2=25$，$S_2：x^2+y^2+z^2-2y-4z=11$，S_1與S_2之交點形成一個圓C，其圓心$(a，b，c)$，圓面積爲A，則序組$(a，b，c，A)=$__________。

【解答】$(0，\frac{7}{5}，\frac{14}{5}，\frac{76\pi}{5})$

【詳解】



圓C所在平面$E：S_1-S_2=0\quad\Rightarrow\quad E：(x^2+y^2+z^2-25)-(x^2+y^2+z^2-2y-4z-11)=0$

$\Rightarrow\quad E：y+2z-7=0\quad\because\quad \overleftrightarrow{PQ}\perp E$，故$\overrightarrow{PQ}//\vec{n}=(0，1，2)$，可設圓心$Q(0，t，2t)$

將$Q(0，t，2t)$代入$E：y+2z-7=0\quad\Rightarrow\quad t+4t-7=0\quad\Rightarrow\quad t=\frac{7}{5}$

故圓心$Q(a，b，c)=(0，\frac{7}{5}，\frac{14}{5})$

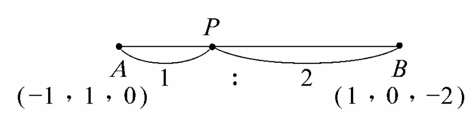
圓半徑$r=\overline{QM}=\sqrt{\overline{PM}^2-\overline{PQ}^2}=\sqrt{25-\frac{245}{25}}=\sqrt{\frac{380}{25}}=\sqrt{\frac{76}{5}}$

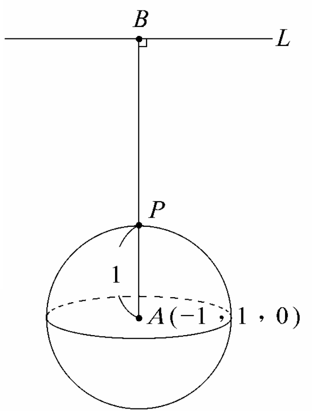
故圓面積$A=\pi r^2=\frac{76}{5}\pi\quad\Rightarrow\quad(a，b，c，A)=(0，\frac{7}{5}，\frac{14}{5}，\frac{76\pi}{5})$

23.設點$P(a，b，c)$爲球面$S：(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=1$上距離直線$L：\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{1}$最近的一點，求(1) $(a，b，c)=$__________。　(2)此點P與L的距離爲__________。

【解答】(1) $(\frac{-1}{3}，\frac{2}{3}，\frac{-2}{3})$　(2) 2

【詳解】





設球心 $A(-1，1，0)$到直線 L 之垂足爲 B，則 $B(3+2t，2+2t，-1+t)$

而 $\overrightarrow{AB}=(4+2t，1+2t，-1+t)\perp L$ 之方向向量 $\vec{d}=(2，2，1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{d}=0 \quad\Rightarrow\quad 9t+9=0 \quad\Rightarrow\quad t=-1$，則 $B(1，0，-2)$

故 P 與直線 L 的距離 $=\overline{BP}=\overline{AB}-\overline{AP}=3-1=2$

由分點公式 $P(a，b，c)=(\dfrac{(-1)\times 2+1\times 1}{1+2}，\dfrac{1\times 2+0\times 1}{1+2}，\dfrac{0\times 2+(-2)\times 1}{1+2})=(\dfrac{-1}{3}，\dfrac{2}{3}，\dfrac{-2}{3})$

24.求過點$A(3，5，3)$且與球面$S：x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z=35$ 相切的平面方程式__________。

【解答】$2x+3y+6z-39=0$

【詳解】

球面$S：x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z=35 \quad\Rightarrow\quad (x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=49$

球心$O(1，2，-3)$，半徑 $=7$，將$A(3，5，3)$代入S得 $9+25+9-6-20+18=35$

故A在球面S上，即A爲切點，$\overrightarrow{OA}=(2，3，6)$

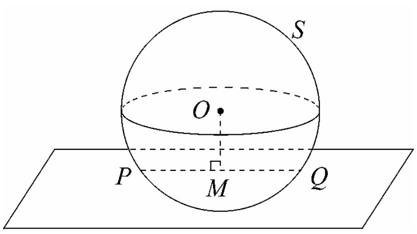
故平面方程式可設爲 $2x+3y+6z+k=0$，又過$(3，5，3)$

$\Rightarrow\quad 2\times 3+3\times 5+6\times 3+k=0 \quad\therefore\quad k=-39 \quad\therefore$ 平面方程式爲 $2x+3y+6z-39=0$

25.設$A(1，-1，-2)$，$B(1，2，1)$，通過A與B的平面E與球面$S：x^2+y^2+z^2=2$ 截出的所有圓中，面積最小值 $=$__________，此時平面E的方程式爲__________。

【解答】$\dfrac{1}{2}\pi$，$2x+y-z-3=0$

【詳解】



$\overrightarrow{AB}=(0，3，3)=3(0，1，1)$，直線$AB$的方程式$\begin{cases}x=1\\ y=-1+t\\ z=-2+t\end{cases}$ 代入$x^2+y^2+z^2=2$

$1+(-1+t)^2+(-2+t)^2=2 \quad\Rightarrow\quad t^2-3t+2=0 \quad\Rightarrow\quad (t-1)(t-2)=0 \quad\Rightarrow\quad t=1，2$

$\therefore$ 直線AB與球面S的交點爲$P(1，0，-1)$，$Q(1，1，0)$，$\overline{PQ}$中點$M(1，\dfrac{1}{2}，-\dfrac{1}{2})$

則包含A，B的平面E與OM垂直時，截圓面積最小，此圓即以$\overline{PQ}$爲直徑的圓

(1)設最小圓的半徑r，則$r^2=(\frac{1}{2}\overline{PQ})^2=(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2=\frac{1}{2}$ $\therefore$ 圓面積爲$\frac{1}{2}\pi$

(2)平面E以$\overrightarrow{OM}=(1，\frac{1}{2}，-\frac{1}{2})$爲法向量且過$A(1，-1，-2)$

$\therefore$ E的方程式爲$(x-1)+\frac{1}{2}(y+1)-\frac{1}{2}(z+2)=0$，即 $2x+y-z-3=0$

【說明】

①直線AB與球面不相交時，沒有最小圓。

②通過A，B之平面E與球面所交最大圓爲球的大圓，即平面E通過球心時所截出的圓。

26.一平面 $3x+6y+2z-18=0$ 與三坐標軸相交於A，B，C三點，O爲原點，則四面體O-ABC之內切球之球心爲＿＿＿＿＿。

【解答】$(1，1，1)$

【詳解】

設球心爲$(r，r，r)$，半徑爲 r，$r>0$，$\frac{|3r+6r+2r-18|}{\sqrt{3^2+6^2+2^2}}=r$ $\Rightarrow$ $\frac{|11r-18|}{7}=r$

$\because$ 球心與原點在平面之同側 $\Rightarrow$ $18-11r=7r$ $\Rightarrow$ $r=1$，故球心爲$(1，1，1)$

27.空間中，球面S：$(x-3)^2+y^2+(z+4)^2=25$ 被平面$x=2$ 切割的截面圓方程式爲＿＿＿＿。

【解答】$\begin{cases} y^2+(z+4)^2=24 \\ x=2 \end{cases}$

【詳解】

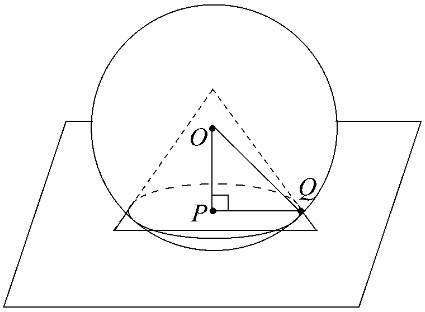
$\begin{cases} S：(x-3)^2+y^2+(z+4)^2=25\cdots\cdots① \\ E：x=2\cdots\cdots② \end{cases}$，②代入① $\Rightarrow$ $y^2+(z+4)^2=24$

$\therefore$ 截圓方程式爲$\begin{cases} y^2+(z+4)^2=24 \\ x=2 \end{cases}$

28.一厚度超過 5 的水平放置木板上，穿有一邊長爲 10 的正三角形的洞，今將半徑 5 的硬球放入正三角形，則木板上球的高度爲＿＿＿＿＿。

【解答】$5+\frac{5\sqrt{6}}{3}$

【詳解】



如上圖，設球心爲 O，球面被木板表面截出之圓的圓心 P，半徑 $\overline{PQ}=r$

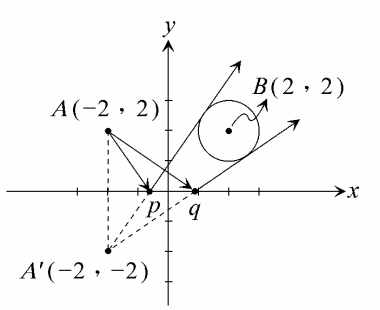
$\overline{OQ}=5$，利用內切圓半徑 $r=\frac{\triangle}{s}$，則 $r=\frac{\triangle}{s}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\times10^2}{\frac{1}{2}(10+10+10)}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \quad \overline{OP}=\sqrt{\overline{OQ}^2-r^2}=\sqrt{5^2-\frac{75}{9}}=\frac{5\sqrt{6}}{3}$，故木板上球的高度為 $5+\frac{5\sqrt{6}}{3}$

29.從$A(-2，2)$發出之光線，照在鏡面（x軸）上最大區間$[p，q]$，反射光線皆與圓$x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 相交，求序對$(p，q)=$__________。

【解答】$\left(\frac{2-2\sqrt{31}}{15}，\frac{2+2\sqrt{31}}{15}\right)$

【詳解】



圓$x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 之圓心$B(2，2)$，半徑$r=1$

由$A(-2，2)$射向x軸之反射光線必過$A'(-2，-2)$

設過$A'(-2，-2)$且與圓相切之切線L：$y+2=m(x+2)$……①

則$d(B，L)=\frac{|4m-4|}{\sqrt{m^2+1}}=1 \quad \Rightarrow \quad 15m^2-32m+15=0 \quad \Rightarrow \quad m=\frac{16\pm\sqrt{31}}{15}$代入①

得$y+2=\frac{16\pm\sqrt{31}}{15}(x+2)$……②，由②，令$y=0$，得$x=\frac{2\pm2\sqrt{31}}{15}$

即$p=\frac{2-2\sqrt{31}}{15}$，$q=\frac{2+2\sqrt{31}}{15}$，故序對$(p，q)=\left(\frac{2-2\sqrt{31}}{15}，\frac{2+2\sqrt{31}}{15}\right)$