

高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：94.11.16					
範圍	Book3 CH4 圓與球	班級	普三	班	姓
		座號			名

一、單選題(每題 10 分)

- 有一圓  $C: x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$  及一點  $P(4, 2)$ ，則

(A)  $P$  點在圓上 (B) 過  $P$  之切線有一為  $x + 3y + 2 = 0$   
 (C) 過  $P$  之切線有一為  $3x - y - 14 = 0$  (D) 兩切線之銳夾角為  $45^\circ$   
 (E) 兩切線互相垂直
- 光源放在點  $A(1, 2, 3)$ ，向球面  $S: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 1$  照射，則在  $xy$  平面上的射影區域面積為 (A)  $3\pi$  (B)  $4\pi$  (C)  $5\pi$  (D)  $6\pi$  (E)  $9\pi$
- 空間中，滿足  $(x^2 + y^2 + z^2 - 1)(x^2 + y^2 + z^2 - 2)(x^2 + y^2 + z^2 - 3) \leq 0$  的圖形之體積為  
 (A)  $\frac{80}{3}\pi$  (B)  $\frac{40}{3}\pi$  (C)  $\frac{20}{3}\pi$  (D)  $\frac{1}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1)\pi$  (E)  $\frac{4}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1)\pi$
- 設直線  $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$  與球面  $S: x^2 + y^2 + z^2 = k$  相切，則常數  $k$  之值為  
 (A) 6 (B) 7 (C) 35 (D)  $\frac{35}{6}$  (E)  $\frac{35}{36}$
- 下列哪一個平面與球面  $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 19 = 0$  相交所成的圓面積最大？(A)  $x + y + z = 0$  (B)  $x - 2y = 0$  (C)  $z + 1 = 0$  (D)  $2x - y - 2z = 5$   
 (E)  $3x + 4y - 1 = 0$
- (複選) 已知包含三點  $A(-1, 0)$ ， $B(1, 2)$ ， $C(7, 0)$  的圓區域中，以圓  $C$  的面積最小，設圓  $C$  的圓心為  $(a, b)$ ，半徑為  $r$ ，則 (A)  $a = 3$  (B)  $b = -2$  (C)  $r = 2\sqrt{5}$   
 (D)  $a + b = 3$  (E)  $r \leq 4$
- (複選)  $xy$  平面上，下列各組條件中，何者恰可決定一圓？  
 (A) 圓心為  $A(-1, -2)$ ，且與  $x$  軸及  $y$  軸都相切  
 (B) 過點  $A(-1, -2)$ ， $B(1, 2)$ ， $C(5, 10)$   
 (C) 與  $x$  軸， $y$  軸及直線  $x + y = 1$  都相切  
 (D) 圓心在直線  $x - y + 3 = 0$  上，又過點  $A(-1, -2)$ ， $B(1, 2)$   
 (E) 過四點  $O(0, 0)$ ， $D(1, 0)$ ， $E(0, 1)$ ， $F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2}))$
- (複選)  $xy$  平面上，過點  $A(1, 2)$  作圓  $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$  的兩切線，切點為  $B, C$ ，則 (A)  $\overline{AB} = 1$  (B)  $\overrightarrow{BC}$  的方程式為  $x - 3y + 4 = 0$  (C)  $\overline{BC} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$   
 (D)  $\triangle ABC$  的面積為  $\frac{3}{10}$  (E)  $\triangle ABC$  的外接圓方程式為  $x^2 + y^2 - 3x - y + 1 = 0$
- (複選) 兩圓  $C_1: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$ ， $C_2: x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$  外公切線夾銳角  $\theta$ ，則下列敘述何者正確？(A) 外公切線段長為  $\sqrt{22}$  (B) 內公切線段長為  $\sqrt{10}$   
 (C) 兩外公切線的交點為  $(-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2})$  (D) 兩內公切線的交點為  $(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$  (E)  $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{3}{5}$

## 二、填充題(每題 0 分)

1. 兩圓 $C_1: x^2 + y^2 + 6y - 28 = 0$ ,  $C_2: x^2 + y^2 + 6x - 4 = 0$  相交於 $A, B$ 兩點, 則 $\overline{AB}$  方程式為\_\_\_\_\_。
2.  $xy$ 平面上, 已知直線 $L: y = \frac{\sqrt{5}}{2}x + k$ 穿過兩個圓 $C_1: x^2 + y^2 = 4$  與 $C_2: x^2 + (y - 8)^2 = 4$  之間的空隙, 則實數 $k$ 的範圍為\_\_\_\_\_。
3. 設一三角形的三頂點為 $(-1, 0), (0, -1), (-2, -1)$ , 此三角形外接圓為圓 $C$ ,
  - (1)試求圓 $C$ 之圓心\_\_\_\_\_。
  - (2)通過圓外一點 $P(-1, 3)$ 且與圓 $C$ 相切的直線斜率為\_\_\_\_\_,  $P$ 到切點的距離為\_\_\_\_\_。
  - (3)承上, 若 $R$ 為圓 $C$ 上任一點, 試求 $\overline{PR}$ 的最大值為\_\_\_\_\_。
4. 設 $A(4, 1)$ 與 $B(2, -3)$ 為坐標平面上兩點, 若 $\overline{AB}$  為圓 $C$ 的一弦且此弦與圓心的距離為 $\sqrt{5}$ , 求圓 $C$ 的方程式\_\_\_\_\_。
5. 設 $A(1, 0), B(3, -4)$ , 直線 $L: 3x - 4y = 6$ ,
  - (1)以 $A$ 為圓心, 且與直線 $L$ 相切的圓方程式為\_\_\_\_\_。
  - (2)過 $A, B$ 兩點, 且圓心在直線 $L$ 上的圓的面積為\_\_\_\_\_。
6. 自點 $P(6, 2)$ 作圓 $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$  的切線, 切點 $A, B$ , 求
  - (1)二切線方程式為\_\_\_\_\_。
  - (2)直線 $AB$ 的方程式為\_\_\_\_\_。
  - (3) $\triangle PAB$ 的外接圓的方程式為\_\_\_\_\_。
7. 過點 $(1, 3)$ 且與圓 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$  相切的直線方程式為\_\_\_\_\_。
8. 坐標平面上, 圓 $C: x^2 + y^2 + 6x - 4y - 23 = 0$ , 點 $P(4, -4)$ , 求過 $P$ 點且與圓 $C$ 相切之切線方程式\_\_\_\_\_。
9.  $A(1, 2), B(-3, 0)$ ,
  - (1)求以 $\overline{AB}$  為直徑的圓 $K$ 方程式, 得\_\_\_\_\_。
  - (2)若點 $P(x, y)$ 為圓 $K$ 上之動點, 則 $x + 2y + 7$  之最大值為 $M$ , 最小值為 $m$ , 得數對 $(M, m) =$ \_\_\_\_\_。
10. 圓 $C$ 通過 $P(2, 0), Q(0, 1)$ , 已知圓 $C$ 在點 $P$ 的切線斜率為  $-1$ , 求圓心: \_\_\_\_\_。
11. 圓心在第一象限, 通過 $A(1, 1)$ 和 $B(2, 2)$ 兩點且與 $x$ 軸相切的圓方程式為\_\_\_\_\_。
12. 若圓 $C$ 與直線 $L: 4x + 3y + 15 = 0$  相切於 $(-3, -1)$ , 且圓半徑為 $4$ , 圓心的 $x$ 坐標為正, 則圓 $C$ 的圓心為\_\_\_\_\_。
13. 設 $A$ 點在圓 $x^2 + y^2 = 4$  上移動,  $B$ 點在圓 $x^2 + y^2 = 16$  上移動, 則所有 $\overline{AB}$  中點所成圖形的面積 = \_\_\_\_\_。
14. 兩圓 $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ ,  $C_2: x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$  交 $A, B$ 兩點,  $\overline{AB} =$  \_\_\_\_\_。
15. 假設一地球儀的半徑為 $R$ , 在北緯  $30^\circ$  的緯圈上, 由東經  $30^\circ$  的位置沿逆時針方向東移到東經  $60^\circ$  的位置, 其所經的弧長為\_\_\_\_\_。
16. 設球面方程式為 $x^2 + y^2 + z^2 = 27$ , 若有一直線 $L: \begin{cases} x + 2y = 3 \\ z = 3 \end{cases}$  交球面於 $P, Q$ 兩點, 則線段 $\overline{PQ}$  之中點坐標為\_\_\_\_\_。

17. 球面 $S$ 與 $S_0: (x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$  同心，若 $S$ 的體積為 $S_0$ 體積的 $2\sqrt{2}$  倍，則 $S$ 的方程式為\_\_\_\_\_。
18. 球面 $S$ 切 $xy$ 平面於點 $(1, 2, 0)$ 且過點 $(3, 1, 2)$ ，則 $S$ 的方程式為\_\_\_\_\_。
19. 點 $P(1, 2, 3)$ 到球面 $S: (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 10$  的切線段長為\_\_\_\_\_，所有切點形成一個圓，此圓所在平面方程式為\_\_\_\_\_，圓的圓心坐標為\_\_\_\_\_。
20. 設 $(x, y)$ 滿足 $x = \sqrt{1-y^2}$ ，則 $\frac{y+5}{x-5}$  的最小值 = \_\_\_\_\_，最大值 = \_\_\_\_\_。
21. 點 $P(x, y, z)$ 為球面 $S: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$  上任一點，  
 (1) 求 $6x - 2y - 3z$ 之最大值為\_\_\_\_\_。  
 (2) 求 $\sqrt{(x-4)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2}$  之最小值為\_\_\_\_\_。
22. 二球面 $S_1: x^2 + y^2 + z^2 = 25$ ， $S_2: x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z = 11$ ， $S_1$ 與 $S_2$ 之交點形成一個圓 $C$ ，其圓心 $(a, b, c)$ ，圓面積為 $A$ ，則序組 $(a, b, c, A) =$ \_\_\_\_\_。
23. 設點 $P(a, b, c)$ 為球面 $S: (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$  上距離直線 $L: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$  最近的一點，求(1)  $(a, b, c) =$ \_\_\_\_\_。(2) 此點 $P$ 與 $L$ 的距離為\_\_\_\_\_。
24. 求過點 $A(3, 5, 3)$ 且與球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z = 35$  相切的平面方程式\_\_\_\_\_。
25. 設 $A(1, -1, -2)$ ， $B(1, 2, 1)$ ，通過 $A$ 與 $B$ 的平面 $E$ 與球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 2$  截出的所有圓中，面積最小值 = \_\_\_\_\_，此時平面 $E$ 的方程式為\_\_\_\_\_。
26. 一平面 $3x + 6y + 2z - 18 = 0$  與三坐標軸相交於 $A, B, C$ 三點， $O$ 為原點，則四面體 $O-ABC$ 之內切球之球心為\_\_\_\_\_。
27. 空間中，球面 $S: (x-3)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 25$  被平面 $x = 2$  切割的截面圓方程式為\_\_\_\_\_。
28. 一厚度超過5的水平放置木板上，穿有一邊長為10的正三角形的洞，今將半徑5的硬球放入正三角形，則木板上球的高度為\_\_\_\_\_。
29. 從 $A(-2, 2)$ 發出之光線，照在鏡面( $x$ 軸)上最大區間 $[p, q]$ ，反射光線皆與圓 $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$  相交，求序對 $(p, q) =$ \_\_\_\_\_。