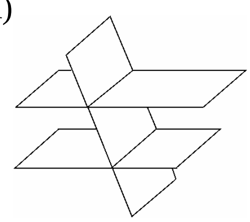
<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高三數學平時測驗　　日期：94.12.08</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">Book4　CH3
克拉瑪、行列式</td><td>班級</td><td>普三　　　班</td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

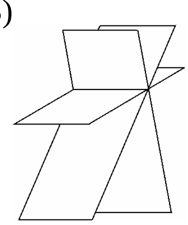
一、單選題(每題 10 分)

1. 方程組 $\begin{cases} 3x-y-2z=-1 \\ x-3y+2z=1 \\ x+2y-3z=1 \end{cases}$ 的圖形為下列何者？

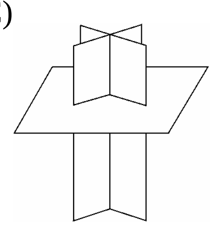
(A)



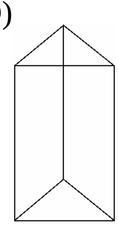
(B)



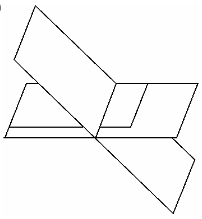
(C)



(D)



(E)



【解答】(D)

【詳解】

$\begin{cases} 3x-y-2z=-1 \\ x-3y+2z=1 \\ x+2y-3z=1 \end{cases}$，$x$，$y$，$z$之係數比皆不相等 $\Rightarrow$ 三平面相異且兩兩不平行

又$\triangle=\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=0$，$\triangle_x=\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=-20\neq 0$

則三平面兩兩相交於一直線，且交線兩兩平行，故選(D)

2. (複選)下列行列式，何者為 0？

(A) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 8 & 10 & 9 \\ 6 & -2 & 21 \end{vmatrix}$　(B) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$　(C) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$　(D) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(E) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$（但 a，b，c 為互異正數）

【解答】(A)(B)(C)

【詳解】

(A) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 8 & 10 & 9 \\ 6 & -2 & 21 \end{vmatrix}=2\times 3\times\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 8 & 5 & 3 \\ 6 & -1 & 7 \end{vmatrix}=6\times\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 8 & 5 & 8 \\ 6 & -1 & 6 \end{vmatrix}=0$

$\times(-1)$

（第一行與第三行相同）

(B) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b-c & c-a \\ 0 & c-a & a-b \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$（第一行全爲 0）

(C) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$（第一列與第三列相同）

(D) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4$（第一行加到第二行及第三行）

(E) $\triangle = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = abc + abc + abc - c^3 - a^3 - b^3 = -(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$

$= -(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ $\because$ a，b，c爲正數且均不相等 $\Rightarrow$ $\triangle \neq 0$

3. (複選)下列敘述何者正確？

(A) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$ (C) $\begin{vmatrix} ka & b & c \\ d & ke & f \\ g & h & ki \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

(D) $\begin{vmatrix} 2a & b+a \\ 2c & d+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & 2b \\ c-d & 2d \end{vmatrix}$ (E) $\begin{vmatrix} a & b & c-x \\ d & e & f-y \\ g & h & i-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & x \\ d & e & y \\ g & h & z \end{vmatrix}$

【解答】(B)(D)(E)

【詳解】

(A) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$ (C) $\begin{vmatrix} ka & b & c \\ d & ke & f \\ g & h & ki \end{vmatrix} \neq k\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

(D) $\begin{vmatrix} 2a & b+a \\ 2c & d+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & b+a \\ c-d & d+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & 2b \\ c-d & 2d \end{vmatrix}$ (E) $\begin{vmatrix} a & b & c-x \\ d & e & f-y \\ g & h & i-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & x \\ d & e & y \\ g & h & z \end{vmatrix}$

4. 若方程組 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ a^2x+b^2y+c^2z=0 \end{cases}$ 有異於(0，0，0)之解，則

(A) $a=b=c$ (B) $a+b+c=1$ (C) a，b，c 均爲 0 或均爲 1 (D) a，b，c 不全相異

(E) $a=b$ 或 $b=c$ 或 $c=a$

【解答】(D)(E)

【詳解】

$$\triangle=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)=0$$

$\Rightarrow$ $a=b$ 或 $b=c$ 或 $c=a$（至少有一成立） $\Rightarrow$ a，b，c 不全相異

二、填充題(每題 10 分)

1. 設方程式$x^3+2x-1=0$ 之三根爲a，b，c，則$\begin{vmatrix}(b+c)^2&ab&ac\\ba&(c+a)^2&bc\\ca&cb&(a+b)^2\end{vmatrix}=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】0

【詳解】

a，b，c爲$x^3+2x-1=0$ 之三根，$a+b+c=0$，$abc=-1$

原式 $=\begin{vmatrix}(-a)^2&ab&ca\\ab&(-b)^2&bc\\ca&bc&(-c)^2\end{vmatrix}$（第一、二、三行分別提出$a$，$b$，$c$）$=abc\begin{vmatrix}a&b&c\\a&b&c\\a&b&c\end{vmatrix}=0$

2. 空間中四點$A(0，1，2)$，$B(-1，-1，3)$，$C(3，0，1)$，$D(k，2，1)$，若A，B，C，D四點共平面，則$k=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{5}{3}$

【詳解】

若 A，B，C，D 四點共平面則

$\overrightarrow{AB}=(-1，-2，1)$，$\overrightarrow{AC}=(3，-1，-1)$，$\overrightarrow{AD}=(k，1，-1)$，所張平行六面體體積爲 0

即$\left|\begin{vmatrix}-1&-2&1\\3&-1&-1\\k&1&-1\end{vmatrix}\right|=0$ $\Rightarrow$ $|3k-5|=0$，得 $k=\dfrac{5}{3}$

3. 若三平面$kx+5y+z=0$，$x-ky-z=-2k$，$2x+ky-z=-3$ 相交於一直線，則$k=$ ＿＿＿。

【解答】1

【詳解】

$$\triangle=\begin{vmatrix}k&5&1\\1&-k&-1\\2&k&-1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2k^2+3k-5=0 \Rightarrow k=1，\frac{-5}{2}$$

$$\triangle_x=\begin{vmatrix}0&5&1\\-2k&-k&-1\\-3&k&-1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2k^2+13k-15=0 \Rightarrow k=1，\frac{-15}{2}$$

三平面相交於一直線 $\Rightarrow$ $\triangle=\triangle_x=\triangle_y=\triangle_z=0$，故$k=1$

4. 三直線L_1：$x+y-1=0$，L_2：$2x+3y+a=0$，L_3：$x+ay+3=0$，若L_1，L_2，L_3三線共點，則$a=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】-3，2

【詳解】

L_1，L_2，L_3三線共點 $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} = 0$ $\Rightarrow$ $a^2 + a - 6 = 0$ $\Rightarrow$ $a = -3$ 或 2

5. 已知三相異平面$x + 2y + 3z = kx$，$x + 2y + 3z = ky$，$x + 2y + 3z = kz$交於一線，則$k =$ ______。

【解答】6

【詳解】原式 $\Rightarrow$ $\begin{cases} (1-k)x + 2y + 3z = 0 \\ x + (2-k)y + 3z = 0 \\ x + 2y + (3-k)z = 0 \end{cases}$ 交於一直線 $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} 1-k & 2 & 3 \\ 1 & 2-k & 3 \\ 1 & 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0$

$\times 1$　$\times 1$

$\Rightarrow$ $(6-k)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-k & 3 \\ 1 & 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0$ $\Rightarrow$ $(6-k)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{vmatrix} = 0$ $\Rightarrow$ $(6-k)k^2 = 0$

得$k = 6$ 或$k = 0$（不合，因$k = 0$ 時，三平面重合）

6. 若方程組$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ 2x + ky - z = y \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$有$x = y = z = 0$ 以外的解，則

$k =$ __________；而方程組的解為________________________。

【解答】2；$x = t$，$y = t$，$z = 3t$（$t \in R$）

【詳解】

原式 $\Rightarrow$ $\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ 2x + (k-1)y - z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$有異於$(0，0，0)$之解，則$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & k-1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$，得 $k = 2$

$k = 2$ 代入原式 $\Rightarrow$ $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$表二平面重合且與另一平面交於一直線 L

則 L：$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ L：$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 3t \end{cases}$，$t \in R$

7. 設$\tan\alpha$，$\tan\beta$ 為方程式$x^2 - 5x + 3 = 0$ 之二根，將行列式$\begin{vmatrix} -1 & 0 & \sec(\alpha+\beta) \\ 0 & 1 & 3 \\ \sec(\alpha+\beta) & 3 & 1 \end{vmatrix}$之值

為$\dfrac{n}{m}$（m，n為互質二整數），則數對$(m，n) =$ __________。

【解答】(4，3)

【詳解】

$x^2 - 5x + 3 = 0$ 兩根為$\tan\alpha$，$\tan\beta$ $\Rightarrow$ $\tan\alpha + \tan\beta = 5$，$\tan\alpha \cdot \tan\beta = 3$

$\Rightarrow$ $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{5}{1-3} = -\dfrac{5}{2}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & \sec(\alpha+\beta) \\ 0 & 1 & 3 \\ \sec(\alpha+\beta) & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1-\sec^2(\alpha+\beta)+9 = 8-[1+\tan^2(\alpha+\beta)] = \frac{3}{4} = \frac{n}{m}$$

$\therefore\ (m，n) = (4，3)$

8. 若 $0° \le x \le 360°$，則凡得孟行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \sin x & \sin^2 x \end{vmatrix} = 0$ 之解為__________________。

【解答】$\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{6}$，$\frac{3\pi}{2}$

【詳解】$\begin{vmatrix} 1 & -1 & (-1)^2 \\ 1 & \frac{1}{2} & (\frac{1}{2})^2 \\ 1 & \sin x & \sin^2 x \end{vmatrix} = (-1-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\sin x)(\sin x+1) = \frac{3}{4}(\sin x+1)(2\sin x-1) = 0$

$\therefore\ \sin x = -1$ 或 $\frac{1}{2}\quad \Rightarrow\quad x = \frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{6}$，$\frac{3\pi}{2}$

9. 行列式 $\begin{vmatrix} 10 & 105 & 45 \\ 8 & -28 & 36 \\ 6 & 7 & 29 \end{vmatrix}$ 之值 $=$____________。

【解答】-2240

【詳解】

原式 $= 2\times 7\times \begin{vmatrix} 5 & 15 & 45 \\ 4 & -4 & 36 \\ 3 & 1 & 29 \end{vmatrix} = (2\times 7)\times(5\times 4)\times \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 9 \\ 3 & 1 & 29 \end{vmatrix}$

$= (2\times 7)\times(5\times 4)\times(-8) = -2240$

10. 平面上三相異直線 L_1：$3x-8y=t-4$，L_2：$-2x+(t+3)y=4$，L_3：$x+(1-t)y=-2$ 相交於一點，求 t 值 $=$____________。

【解答】-2

【詳解】

三直線共點 $\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -8 & t-4 \\ -2 & t+3 & 4 \\ 1 & 1-t & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow\ -6(t+3)-32-2(t-4)(1-t)-(t-4)(t+3)+32-12(1-t) = 0$

$\Rightarrow\ t^2-3t-10=0 \quad\Rightarrow\quad (t+2)(t-5)=0 \quad\Rightarrow\quad t=5$ 或 $t=-2$

①當 $t=5$ 時，三直線為 $\begin{cases} L_1: 3x-8y=1 \\ L_2: -2x+8y=4 \\ L_3: x-4y=-2 \end{cases}$，但 L_2 與 L_3 重合，故不合

②當 $t=-2$ 時，三直線為 $\begin{cases} L_1: 3x-8y=-6 \\ L_2: -2x+y=4 \\ L_3: x+3y=-2 \end{cases}$ 均相異，故 $t=-2$

11.若方程組$\begin{cases}2kx+y+z=k-\dfrac{3}{2}\\ x+2ky+z=-1\\ x+y+2kz=-1\end{cases}$（$k$為常數），

(1)無解時，$k=$____________。　(2)無限多組解時，$k=$____________。

【解答】(1) $k=-1$　(2) $k=\dfrac{1}{2}$

【詳解】$\begin{cases}2kx+y+z=k-\dfrac{3}{2}\\ x+2ky+z=-1\\ x+y+2kz=-1\end{cases}$ 無解或無限多解時，必$\triangle=\begin{vmatrix}2k & 1 & 1\\ 1 & 2k & 1\\ 1 & 1 & 2k\end{vmatrix}=0$

$\therefore\quad 8k^3+1+1-2k-2k-2k=0\quad\Rightarrow\quad 4k^3-3k+1=0$

$\Rightarrow\quad (k+1)(2k-1)^2=0\quad\Rightarrow\quad k=-1，\dfrac{1}{2}$

(1) $k=-1$ 時，原式$\begin{cases}-2x+y+z=-\dfrac{5}{2} & \cdots\cdots ①\\ x-2y+z=-1 & \cdots\cdots ②\\ x+y-2z=-1 & \cdots\cdots ③\end{cases}$

② − ①得 $3x-3y=\dfrac{3}{2}\quad\Rightarrow\quad x-y=\dfrac{1}{2}\cdots\cdots$④

② × 2 + ③得 $3x-3y=-3\quad\Rightarrow\quad x-y=-1\cdots\cdots$⑤

④、⑤矛盾，無解，即原方程組無解

(2) $k=\dfrac{1}{2}$ 時，原式為$\begin{cases}x+y+z=-1\\ x+y+z=-1\\ x+y+z=-1\end{cases}$，即$x+y+z=-1$，有無限多解

12.設$\begin{vmatrix}a & b & c\\ p & q & r\\ x & y & z\end{vmatrix}=2$，則$\begin{vmatrix}3b+4c & 2a-b+5c & c+a\\ 3q+4r & 2p-q+5r & r+p\\ 3y+4z & 2x-y+5z & z+x\end{vmatrix}$之值為__________。

【解答】26

【解 1】

$$\begin{vmatrix}3b+4c & 2a-b+5c & c+a\\ 3q+4r & 2p-q+5r & r+p\\ 3y+4z & 2x-y+5z & z+x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3b+4c & 2a-b+5c & c\\ 3q+4r & 2p-q+5r & r\\ 3y+4z & 2x-y+5z & z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3b+4c & 2a-b+5c & a\\ 3q+4r & 2p-q+5r & p\\ 3y+4z & 2x-y+5z & x\end{vmatrix}$$

$\times(-5)$　$\times(-4)$　$\times(-2)$

$$=3\begin{vmatrix}b & 2a-b & c\\ q & 2p-q & r\\ y & 2x-y & z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3b & -b+5c & a\\ 3q & -q+5r & p\\ 3y & -y+5z & x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4c & -b+5c & a\\ 4r & -q+5r & p\\ 4z & -y+5z & x\end{vmatrix}$$

$$=3\begin{vmatrix}b & 2a & c\\ q & 2p & r\\ y & 2x & z\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}b & 5c & a\\ q & 5r & p\\ y & 5z & x\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}c & -b & a\\ r & -q & p\\ z & -y & x\end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix}a & b & c\\ p & q & r\\ x & y & z\end{vmatrix}+15\begin{vmatrix}a & b & c\\ p & q & r\\ x & y & z\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}a & b & c\\ p & q & r\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

$$=13\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}=13\times 2=26$$

13.空間四個點$A(2，3，-1)$，$B(0，1，0)$，$C(3，-1，2)$，$D(0，2，k)$，則

(1)△ABC的面積 $=$ ＿＿＿＿＿＿＿。

(2)若A，B，C，D四點共面，則k之值= ＿＿＿＿＿＿＿。

(3)若四面體$ABCD$的體積 $=2$，則k之值 $=$ ＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(1)\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$　$(2)-\dfrac{7}{10}$　$(3)\dfrac{1}{2}$或$\dfrac{-19}{10}$

【詳解】

$\overrightarrow{AB}=(-2，-2，1)$，$\overrightarrow{AC}=(1，-4，3)$，$\overrightarrow{AD}=(-2，-1，k+1)$

(1)△ABC 面積 $=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\dfrac{1}{2}|(-2，7，10)|=\dfrac{1}{2}\sqrt{4+49+100}=\dfrac{\sqrt{153}}{2}=\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$

(2) A，B，C，D 共面 $\Rightarrow\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ -2 & -1 & k+1 \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow\quad 8(k+1)-1+12-8-6+2(k+1)=0\quad\Rightarrow\quad 10k+7=0\quad\Rightarrow\quad k=-\dfrac{7}{10}$

(3)四面體 $ABCD$ 的體積 $=\dfrac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ -2 & -1 & k+1 \end{vmatrix}\right|=2$

$\Rightarrow\quad |10k+7|=12\quad\Rightarrow\quad 10k+7=\pm 12\quad\therefore\quad k=\dfrac{1}{2}，-\dfrac{19}{10}$

14.已知$\triangle=\begin{vmatrix} k & -3 & 5 \\ 1 & -2 & k \\ 3 & 3 & -k \end{vmatrix}=-(k-3)(k+15)$，其中$k\in R$，若方程組$\begin{cases} kx-3y+5z=15 \\ x-2y+kz=3k \\ 3x+3y-kz=-3k \end{cases}$ 有唯一解，k之限制為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿，其解為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$k\neq 3，-5$；$(0，0，3)$

【詳解】

方程組$\begin{cases} kx-3y+5z=15 \\ x-2y+kz=3k \\ 3x+3y-kz=-3k \end{cases}$ 有唯一解

$\Rightarrow\quad\triangle=\begin{vmatrix} k & -3 & 5 \\ 1 & -2 & k \\ 3 & 3 & -k \end{vmatrix}=-(k-3)(k+5)\neq 0\quad\therefore\quad k\neq 3，-5$

$\triangle_x=\begin{vmatrix} 15 & -3 & 5 \\ 3k & -2 & k \\ -3k & 3 & -k \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 5 & -3 & 5 \\ k & -2 & k \\ -k & 3 & -k \end{vmatrix}=0$，$\triangle_y=\begin{vmatrix} k & 15 & 5 \\ 1 & 3k & k \\ 3 & -3k & -k \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} k & 5 & 5 \\ 1 & k & k \\ 3 & -k & -k \end{vmatrix}=0$

$\triangle_z=\begin{vmatrix} k & -3 & 15 \\ 1 & -2 & 3k \\ 3 & 3 & -3k \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} k & -3 & 5 \\ 1 & -2 & k \\ 3 & 3 & -k \end{vmatrix}$，其解爲$(\frac{\triangle_x}{\triangle}，\frac{\triangle_y}{\triangle}，\frac{\triangle_z}{\triangle})=(0，0，3)$

15.設$a\in R$，E_1：$ax+y+z=a-3$，E_2：$x+ay+z=-2$，E_3：$x+y+az=-2$，若E_1，E_2，E_3兩兩相交於一直線，而且三交線互相平行，則$a=$__________。

【解答】$a=-2$

【詳解】

若三平面兩兩相交於一直線，且三交線互相平行

則$\triangle=0$，且$\triangle_x$，$\triangle_y$，$\triangle_z$中至少有一個不爲 0

令$\triangle=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=a^3-3a+2=(a-1)^2(a+2)=0$　$\therefore$　$a=1$ 或 -2

又$\triangle_x=\begin{vmatrix} a-3 & 1 & 1 \\ -2 & a & 1 \\ -2 & 1 & a \end{vmatrix}=a^3-3a^2+3a-1=(a-1)^3$

$\triangle_y=\begin{vmatrix} a & a-3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix}=-3a^2+6a-3=-3(a-1)^2$

$\triangle_z=\begin{vmatrix} a & 1 & a-3 \\ 1 & a & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-3a^2+6a-3=-3(a-1)^2$

①當$a=1$時，$\triangle=0$，但$\triangle_x=\triangle_y=\triangle_z=0$，故不合

②當$a=-2$時，$\triangle=0$ 且$\triangle_x\neq 0$，$\triangle_y\neq 0$，$\triangle_z\neq 0$，故$a=-2$

16.若我們想用<u>高斯</u>消去法解方程組：$\begin{cases} x+3y-6z=23 \\ 2x+4y+z=5 \\ 3x+y-4z=19 \end{cases}$，將方程組的增廣矩陣

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 23 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 19 \end{array}\right]$利用矩陣的列運算操作後，可以得到下面的矩陣：$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 23 \\ 0 & -2 & 13 & -41 \\ 0 & 0 & -38 & k \end{array}\right]$，

則常數$k=$__________。

【解答】114

【詳解】

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & 23 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 19 \end{bmatrix}\begin{matrix} \times(-2) \\ \\ \times(-3) \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & 23 \\ 0 & -2 & 13 & -41 \\ 0 & -8 & 14 & 50 \end{bmatrix}\times(-4) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & 23 \\ 0 & -2 & 13 & -41 \\ 0 & 0 & -38 & 114 \end{bmatrix}$$

17.$x\in R$，試解不等式$\begin{vmatrix} \log x^2 & \log x^2 & 1 \\ \log x^2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}\geq 0$，其解爲__________。

【解答】$\sqrt{10}\leq x\leq 10$ 或 $-10\leq x\leq -\sqrt{10}$

【詳解】

$$\begin{vmatrix} \log x^2 & \log x^2 & 1 \\ \log x^2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \\ \times(-1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} \log x^2 & \log x^2 & 1 \\ 0 & 1-\log x^2 & 0 \\ 2-\log x^2 & 1-\log x^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-\log x^2 \\ 2-\log x^2 & 1-\log x^2 \end{vmatrix} \ge 0 \quad \Rightarrow$$

$$(1-\log x^2)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2-\log x^2 & 1 \end{vmatrix} \ge 0$$

$\Rightarrow \quad (1-2\log|x|)(2\log|x|-2) \ge 0$……①

當$x>0$時，由① $\Rightarrow$ $(2\log x-1)(2\log x-2)\le 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{2}\le \log x\le 1$ $\Rightarrow$ $\sqrt{10}\le x\le 10$

當$x<0$時，由① $\Rightarrow$ $[2\log(-x)-1][2\log(-x)-2]\le 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{2}\le \log(-x)\le 1$

$\Rightarrow$ $\sqrt{10}\le(-x)\le 10$ $\Rightarrow$ $-10\le x\le -\sqrt{10}$

由上可知$\sqrt{10}\le x\le 10$ 或 $-10\le x\le -\sqrt{10}$

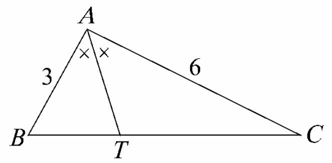
18.設$A(4，3，-3)$，$B(2，2，-1)$，$C(8，-1，-5)$，已知$\angle BAC$的平分線交$\overline{BC}$於T，則

(1) T之坐標爲__________。(2) $\cos\angle BAC=$________。(3)平面ABC的方程式爲______

(4) O爲原點，由$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$所決定的平行六面體之體積爲__________。

【解答】(1) $(4，1，\dfrac{-7}{3})$ (2) $-\dfrac{4}{9}$ (3) $5x+2y+6z-8=0$ (4) 16

【詳解】



(1) $\overrightarrow{AB}=(-2，-1，2)$，$\overrightarrow{AC}=(4，-4，-2)$ $\Rightarrow$ $\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=6$

$\overline{BT}$ ：$\overline{CT}=\overline{AB}$ ：$\overline{AC}=3：6=1：2$

由分點公式 $T(x，y，z)=(\dfrac{2\times2+8\times1}{3}，\dfrac{2\times2+(-1)\times1}{3}，\dfrac{(-1)\times2+(-5)\times1}{3})=(4，1，\dfrac{-7}{3})$

(2) $\cos\angle BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{(-2，-1，2)\cdot(4，-4，-2)}{3\times6}=\dfrac{-8}{3\times6}=\dfrac{-4}{9}$

(3) $\overrightarrow{AP}=(x-4，y-3，z+3)$，$\overrightarrow{AB}=(-2，-1，2)$，$\overrightarrow{AC}=(4，-4，-2)$

所張之平行六面體體積 $=0$，即$\begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z+3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & -2 \end{vmatrix}=0$

得平面 ABC：$5x+2y+6z-8=0$

(4) $\left|\begin{vmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 8 & -1 & -5 \end{vmatrix}\right|=16$

19.設x，y，z皆爲非 0 實數，且$\dfrac{4y-7z}{x}=\dfrac{2x-2z}{5y}=\dfrac{x+2y}{z}$，則$\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$之値 $=$__________。

【解答】$\dfrac{-41}{98}$

【詳解】

令$\dfrac{4y-7z}{x}=\dfrac{2x-2z}{5y}=\dfrac{x+2y}{z}=k$，$\begin{cases}kx-4y+7z=0\\2x-5ky-2z=0\\x+2y-kz=0\end{cases}$齊次方程組有非(0，0，0)之解

$\Rightarrow\begin{vmatrix}k&-4&7\\2&-5k&-2\\1&2&-k\end{vmatrix}=0$，$(k+1)(5k^2-5k+36)=0$，$k=-1$ 代入原式得$\begin{cases}-x-4y+7z=0\\2x+5y-2z=0\\x+2y+z=0\end{cases}$

$x:y:z=\begin{vmatrix}-4&7\\5&-2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}7&-1\\-2&2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-1&-4\\2&5\end{vmatrix}=(-9):4:1$

則$\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{(-9)\times4+4\times1+1\times(-9)}{(-9)^2+4^2+1^2}=\dfrac{-41}{98}$

20.試由k之值，討論三平面相交的情形，並求其解集合。

$E_1:kx-3y-4z=6$，$E_2:x-ky-3z=4$，$E_3:x-y-z=k$

【解答】見詳解

【詳解】

$\triangle=\begin{vmatrix}k&-3&-4\\1&-k&-3\\1&-1&-1\end{vmatrix}=(k-2)(k-5)$，$\triangle_x=\begin{vmatrix}6&-3&-4\\4&-k&-3\\k&-1&-1\end{vmatrix}=-(k-2)(4k-7)$

$\triangle_y=\begin{vmatrix}k&6&-4\\1&4&-3\\1&k&-1\end{vmatrix}=(k-2)(3k-2)$，$\triangle_z=\begin{vmatrix}k&-3&6\\1&-k&4\\1&-1&k\end{vmatrix}=-(k-2)(k^2+2k-9)$

(1)當$k=2$時，$\triangle=\triangle_x=\triangle_y=\triangle_z=0$ 且E_1，E_2，E_3兩兩互不平行

故圖形表三相異平面交於一直線L：$\begin{cases}E_1:2x-3y-4z=6\\E_2:x-2y-3z=4\end{cases}$，則$L$：$\begin{cases}x=-t\\y=-2t-2\\z=t\end{cases}$，$t\in R$

(2)當$k=5$時，$\triangle=0$ 但$\triangle_x$，$\triangle_y$，$\triangle_z$均不為 0，無解，表三平面兩兩交於一直線，但三交線互相平行

(3)當$k\neq2$ 且$k\neq5$時，恰有一組解，圖形表三平面交於一點

其解為$\left(\dfrac{\triangle_x}{\triangle},\dfrac{\triangle_y}{\triangle},\dfrac{\triangle_z}{\triangle}\right)=\left(\dfrac{-(k-5)}{4k-7},\dfrac{k-5}{3k-2},\dfrac{-(k-5)}{k^2+2k-9}\right)$