高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：94.12.16					
範圍	Book2　CH3 三角函數 2	班級	普三　　　班	姓名	
		座號			

一、單選題(每題 10 分)

1.複數平面上，滿足$z^{13}=7+8i$的一切複數z的圖形為

(A)一直線　(B)一個圓　(C)一點　(D)正 13 邊形　(E)13 個點

【解答】(E)

【詳解】

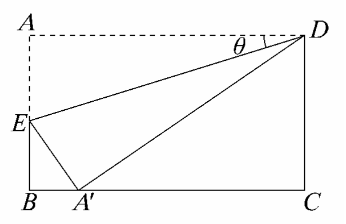
$z^{13}=7+8i=\sqrt{113}(\cos\theta+i\sin\theta)$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$　$\therefore$　$\alpha=\sqrt[26]{113}(\cos\dfrac{\theta}{13}+i\sin\dfrac{\theta}{13})$ 為其一根

$\therefore$　$z^{13}=7+8i$的 13 個根為α，$\alpha\omega$，$\alpha\omega^2$，$\cdots$，$\alpha\omega^{12}$（$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{13}+i\sin\dfrac{2\pi}{13}$）

此 13 個根在複數平面的圖形為正 13 邊形的 13 個頂點

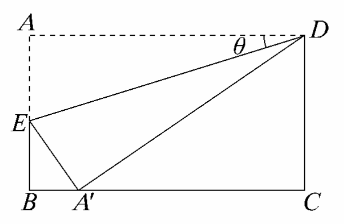
2. 將一張長方形紙$ABCD$沿著$\overline{DE}$摺起來，使A點落在$\overline{BC}$邊上A'處（如圖所示）。若摺角為θ，寬$\overline{AB}$是 6 吋，則摺痕$\overline{DE}$的長度為

(A) $3\sec^2\theta\csc\theta$　(B) $6\sin\theta\sec\theta$　(C) $3\sec\theta\csc\theta$　(D) $6\sec\theta\csc^2\theta$　(E) $3\sin\theta\sec\theta$



【解答】(A)

【詳解】



如圖，因為$\triangle ADE\cong\triangle A'DE$，故$\angle ADE=\angle A'DE=\theta$

所以$\angle A'DC=\dfrac{\pi}{2}-2\theta$。故所求摺痕$\overline{DE}$的長度為$\overline{DE}=\overline{A'D}\sec\theta=\overline{CD}\sec(\dfrac{\pi}{2}-2\theta)\sec\theta$

$=6\sec(\dfrac{\pi}{2}-2\theta)\sec\theta=\dfrac{6}{\sin 2\theta\cos\theta}=\dfrac{6}{2\sin\theta\cos^2\theta}=3\sec^2\theta\csc\theta$

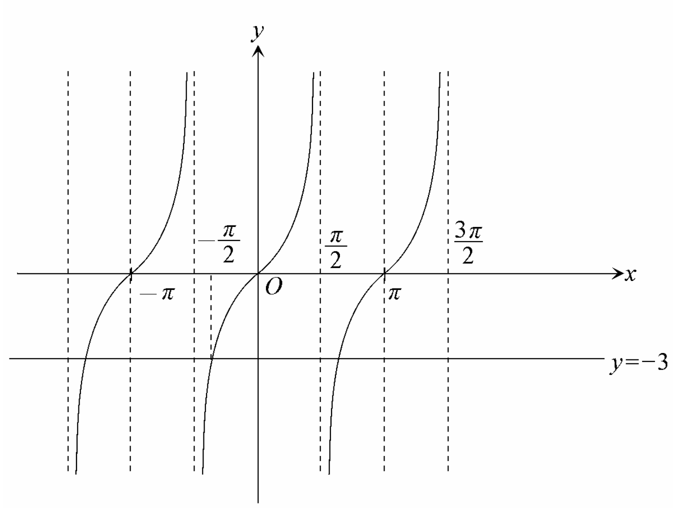
3. 方程式$\tan x+3=0$的解為：

(A) $n\pi-\tan^{-1}3$，$n\in Z$　(B) $n\pi+\tan^{-1}3$，$n\in Z$　(C) $n\pi+(-1)^n\tan^{-1}(-3)$，$n\in Z$

(D) $2n\pi+\tan^{-1}(-3)$，$n\in Z$　(E) $2n\pi\pm\tan^{-1}(-3)$，$n\in Z$

【解答】(A)

【詳解】



$\tan x+3=0 \quad \Rightarrow \quad \tan x=-3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y=\tan x \\ y=-3 \end{cases}$

由圖知交點的x坐標爲$\tan^{-1}(-3)+n\pi=-\tan^{-1}3+n\pi$，$n\in Z$

4. $\cos 5°\cos 10°\cos 20°\cos 40°=$

(A)$\frac{1}{16}$　(B)$\frac{-1}{16}$　(C)$\frac{\cos 50°}{8}$　(D)$\frac{\cos 10°}{16\sin 5°}$　(E)以上皆非

【解答】(D)

【詳解】

令 $P=\cos 5°\cos 10°\cos 20°\cos 40°$

則$(2\sin 5°)P=2\sin 5°(\cos 5°\cos 10°\cos 20°\cos 40°)=2(\sin 5°\cos 5°)\cos 10°\cos 20°\cos 40°$

$=(\sin 10°\cos 10°)\cos 20°\cos 40°=(\frac{1}{2}\sin 20°)\cos 20°\cos 40°=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin 40°)\cos 40°$

$=\frac{1}{4}(\frac{1}{2}\sin 80°)=\frac{1}{8}\sin 80°$

$\therefore \quad P=\frac{\sin 80°}{16\sin 5°}=\frac{\cos 10°}{16\sin 5°}$，故選(D)

5. 下列哪一個正切函數值最大？

(A) $\tan(-\frac{26\pi}{11})$　(B) $\tan(-\frac{7\pi}{11})$　(C) $\tan\frac{3\pi}{11}$　(D) $\tan\frac{13\pi}{11}$　(E) $\tan\frac{23\pi}{11}$

【解答】(B)

【詳解】

1° $\tan(-\frac{26\pi}{11})=\tan(-\frac{4\pi}{11})$，$\tan(-\frac{7\pi}{11})=\tan\frac{4\pi}{11}$，$\tan\frac{13\pi}{11}=\tan\frac{2\pi}{11}$，$\tan\frac{23\pi}{11}=\tan\frac{\pi}{11}$

2° $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$時，$\tan x$ 爲遞增函數，$-\frac{4\pi}{11}<\frac{\pi}{11}<\frac{2\pi}{11}<\frac{3\pi}{11}<\frac{4\pi}{11}$

$\therefore \quad \tan(-\frac{4\pi}{11})<\tan\frac{\pi}{11}<\tan\frac{2\pi}{11}<\tan\frac{3\pi}{11}<\tan\frac{4\pi}{11}$

即 $\tan(-\frac{26\pi}{11})<\tan\frac{23\pi}{11}<\tan\frac{13\pi}{11}<\tan\frac{3\pi}{11}<\tan(-\frac{7\pi}{11})$

故 $\tan(-\frac{7\pi}{11})$最大

6. 若 $\sin 2=a$，則下列何者正確？

(A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<-\frac{1}{2}$　(B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}<a<-\frac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\frac{1}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$　(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$

(E) $\frac{\sqrt{3}}{2}<a<1$

【解答】(E)

【詳解】

$a=\sin 2=\sin(\frac{180°}{\pi}\times 2)=\sin\frac{360°}{\pi}\doteqdot \sin 114.6°=\sin 65.4°$　$\therefore$　$1>a>\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

故選(E)

7. (複選)下列敘述，何者正確？但（$\theta\neq\frac{n\pi}{2}$，$n\in Z$）

(A) $\tan\theta+\cot\theta=2\csc 2\theta$　(B) $\tan\theta-\cot\theta=-2\cot 2\theta$　(C)若 $\tan\frac{\theta}{2}>0$，則 $\sin\theta>0$　(D)若 $\sin\theta>0$，則 $\tan\frac{\theta}{2}>0$　(E) $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$

【解答】(A)(B)(C)(D)(E)

【詳解】

(A) $\tan\theta+\cot\theta=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{2}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{2}{\sin 2\theta}=2\csc 2\theta$

(B) $\tan\theta-\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{-\cos 2\theta}{\frac{1}{2}\sin 2\theta}=-2\cot 2\theta$

(C) $\because$　$\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$　$\because$　$1+\cos\theta>0$　$\therefore$　若 $\tan\frac{\theta}{2}>0$，則 $\sin\theta>0$

(D)同(C)，若 $\sin\theta>0$，則 $\tan\frac{\theta}{2}>0$

(E) $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin\theta+1-\cos\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta}$（和比性質）

8. 設 r，r_1，r_2，θ，θ_1，$\theta_2\in R$，則下列敘述，何者正確？

(A) $r_1>0$，$r_2>0$，則 $r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$　$\Leftrightarrow$　$r_1=r_2$，$\theta_1=\theta_2$

(B) $r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

(C)若 $r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\neq 0$，則 $\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

(D)若 $n\in Z$，且 $r(\cos\theta+i\sin\theta)\neq 0$，則 $[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

(E)若 $n\in Z$，且 $r(\cos\theta-i\sin\theta)\neq 0$，則 $[r(\cos\theta-i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta-i\sin n\theta)$

【解答】(B)(C)(D)(E)

【詳解】

(A) $r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$　$\Leftrightarrow$　$r_1=r_2$；θ_1，θ_2同界

(B) $r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

(C) $\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)[\cos(-\theta_2)+i\sin(-\theta_2)]}{(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)[\cos(-\theta_2)+i\sin(-\theta_2)]}$

$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

(D)當$n=-m<0$時，$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=\frac{1}{[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^m}$

$=\frac{1\cdot(\cos 0+i\sin 0)}{r^m(\cos m\theta+i\sin m\theta)}=r^{-m}[\cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta)]=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

(E)$[r(\cos\theta-i\sin\theta)]^n=\{r[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]\}^n=r^n[\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)]$

$=r^n(\cos n\theta-i\sin n\theta)$

二、填充題(每題 10 分)

1. 設$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，則$\sin\frac{\alpha}{2}$ = __________。

【解答】$\frac{3}{\sqrt{10}}$

【詳解】

$\because$ $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ $\therefore$ $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$

$\because$ $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}$ $\therefore$ $\sin\frac{\alpha}{2}>0$ 且 $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\Rightarrow$ $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-(-\frac{4}{5})}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$

2. 設$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$，則(1) $\sin 2\theta$ = __________。 (2) $\cos 2\theta$ = __________。

【解答】(1) $-\frac{4}{5}$ (2) $\frac{3}{5}$

【詳解】

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\Rightarrow$ $\cos\theta=\frac{-1}{\sqrt{5}}$

(1) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot(\frac{-1}{\sqrt{5}})=-\frac{4}{5}$

(2) $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\cdot(\frac{2}{\sqrt{5}})^2=-\frac{3}{5}$

3. 函數$f(x)=\cos^2 2x+2\sin^2 x$，$x\in R$。(1) $f(x)$的最小值為______。(2) $f(x)$的最大值為______。

【解答】(1) $\frac{3}{4}$ (2) 3

【詳解】

$f(x)=\cos^2 2x+2\sin^2 x=(1-2\sin^2 x)^2+2\sin^2 x=4\sin^4 x-2\sin^2 x+1=4(\sin^2 x-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{4}$

$\because$ $-1\le\sin x\le 1$ $\therefore$ $0\le\sin^2 x\le 1$

故(1) $\sin^2 x=\frac{1}{4}$時，$f(x)=\frac{3}{4}$為最小值 (2) $\sin^2 x=1$時，$f(x)=3$為最大值

4. 設$\cos 2\theta=t$，則 $4(\cos^6\theta-\sin^6\theta)$以$t$表示為__________。

【解答】t^3+3t

【詳解】

$\cos 2\theta = t \quad \Rightarrow \quad \sin^2 2\theta = 1 - t^2 \quad \Rightarrow \quad (2\sin\theta\cos\theta)^2 = 1 - t^2 \quad \Rightarrow \quad 4\sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - t^2$

$\therefore \quad 4(\cos^6\theta - \sin^6\theta) = 4[(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^3 + 3\sin^2\theta\cos^2\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)]$

$= 4\cos^3 2\theta + 3\sin^2 2\theta\cos 2\theta = 4t^3 + 3(1-t^2)t = t^3 + 3t$

5. 設 $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，試化簡 $\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha} =$__________。

【解答】$2\sin\dfrac{\alpha}{2}$

【詳解】$\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}$

$=\sqrt{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}-\sqrt{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}$

$=\sqrt{(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2})^2}-\sqrt{(\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2})^2}=\left|\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|-\left|\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|$

$\because \quad 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{4} \quad \therefore \quad \sin\dfrac{\alpha}{2}<\cos\dfrac{\alpha}{2}$，$\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}>0$

$\Rightarrow \quad \left|\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|-\left|\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}\right| = \sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}-(\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}) = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}$

6. 設$\sin x+\sin y=1$，則$\cos x+\cos y$的最大值爲__________。

【解答】$\sqrt{3}$

【詳解】

令$\cos x+\cos y=t$……①，已知$\sin x+\sin y=1$……②

①^2 + ②^{2}得 $(\cos^2 x+2\cos x\cos y+\cos^2 y)+(\sin^2 x+2\sin x\sin y+\sin^2 y)=t^2+1$

$\Rightarrow \quad (\cos^2 x+\sin^2 x)+2(\cos x\cos y+\sin x\sin y)+(\cos^2 y+\sin^2 y)=t^2+1$

$\Rightarrow \quad 1+2\cos(x-y)+1=t^2+1$

$\because \quad \cos(x-y)\le 1 \quad \Rightarrow \quad 2\cos(x-y)\le 2 \quad \Rightarrow \quad t^2=1+2\cos(x-y)\le 3$

當$\cos(x-y)=1$時，$t^2=3$爲最大值，此時$t=\sqrt{3}$爲最大值

即$\cos x+\cos y$的最大值爲$\sqrt{3}$

7. 設$\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3}{4}$，則 $4\cos\theta+3\sin\theta=$__________。

【解答】4

【詳解】$4\cos\theta+3\sin\theta=4\cdot\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}+3\cdot\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=4\cdot\dfrac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}}+3\cdot\dfrac{2\cdot\frac{3}{4}}{1+\frac{9}{16}}=4$

8. 設$\cos 2\theta=\dfrac{3}{5}$，$\sin 2\theta<0$，則$\tan\theta+\cot\theta=$__________。

【解答】$-\dfrac{5}{2}$

【詳解】$\because \quad \cos 2\theta=\dfrac{3}{5}$ 且 $\sin 2\theta<0 \quad \therefore \quad \sin 2\theta=-\dfrac{4}{5}$

$\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{2}{2\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{2}{\sin 2\theta}=\dfrac{2}{-\frac{4}{5}}=-\dfrac{10}{4}=-\dfrac{5}{2}$

9. 令$x=\tan\dfrac{\theta}{2}$，則$\cos2\theta$ 以x可表爲__________。

【解答】$\dfrac{1-6x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}$

【詳解】

(1)$\because\quad x=\tan\dfrac{\theta}{2}\quad\therefore\quad \tan\theta=\tan2(\dfrac{\theta}{2})=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{2x}{1-x^2}$

(2) $\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\dfrac{\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}=\dfrac{1-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\sec^2\theta}$

$=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1-(\dfrac{2x}{1-x^2})^2}{1+(\dfrac{2x}{1-x^2})^2}=\dfrac{\dfrac{(1-x^2)^2-4x^2}{(1-x^2)^2}}{\dfrac{(1-x^2)^2+4x^2}{(1-x^2)^2}}=\dfrac{1-6x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}$

10. $\sin^4\dfrac{\pi}{8}+\sin^4\dfrac{3\pi}{8}+\sin^4\dfrac{5\pi}{8}+\sin^4\dfrac{7\pi}{8}=$__________。

【解答】$\dfrac{3}{2}$

【詳解】

原式

$=(\dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{4}}{2})^2+(\dfrac{1+\cos\dfrac{3\pi}{4}}{2})^2+(\dfrac{1+\cos\dfrac{5\pi}{4}}{2})^2+(\dfrac{1+\cos\dfrac{7\pi}{4}}{2})^2$

$=\dfrac{1+2\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos^2\dfrac{\pi}{4}}{4}+\dfrac{1+2\cos\dfrac{3\pi}{4}+\cos^2\dfrac{3\pi}{4}}{4}+\dfrac{1+2\cos\dfrac{5\pi}{4}+\cos^2\dfrac{5\pi}{4}}{4}+\dfrac{1+2\cos\dfrac{7\pi}{4}+\cos^2\dfrac{7\pi}{4}}{4}$

$=\dfrac{1}{4}(\dfrac{3}{2}+2\cos\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3}{2}+2\cos\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{3}{2}+2\cos\dfrac{5\pi}{4}+\dfrac{3}{2}+2\cos\dfrac{7\pi}{4})$

$=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{3\pi}{4}+\cos\dfrac{5\pi}{4}+\cos\dfrac{7\pi}{4})=\dfrac{3}{2}$

11.函數$f(t)=\sin^2 2t-3\cos^2 t$在 $0\le t\le 2\pi$ 的範圍內，其最大值爲__________。

【解答】$\dfrac{1}{16}$

【詳解】

$f(t)=(1-\cos^2 2t)-3\cdot\dfrac{1+\cos2t}{2}=-(\cos2t+\dfrac{3}{4})^2+\dfrac{1}{16}$

$\cos2t=-\dfrac{3}{4}$時，$f(t)=\dfrac{1}{16}$爲最大值，故$f(t)$之最大值爲$\dfrac{1}{16}$

12.$\cos40°\sin160°-\sin220°\cos340°=$__________，而$(1+\tan35°)(1+\tan10°)=$__________。

【解答】$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；2

【詳解】

利用和角公式

(1) $\cos40°\sin160° - \sin220°\cos340° = \cos40°\sin20° + \sin40°\cos20°$

$= \sin20°\cos40° + \cos20°\sin40° = \sin(20° + 40°) = \sin60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)$\because$ $35° + 10° = 45°$ $\therefore$ $\tan(35° + 10°) = \tan45°$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\tan35° + \tan10°}{1 - \tan35°\tan10°} = 1$

$\Rightarrow$ $\tan35° + \tan10° = 1 - \tan35°\tan10°$ $\Rightarrow$ $\tan35°\cdot\tan10° + \tan35° + \tan10° = 1$

$\therefore$ $(1 + \tan35°)(1 + \tan10°) = 1 + (\tan35°\cdot\tan10° + \tan35° + \tan10°) = 1 + 1 = 2$

13.設a，$b\in N$，若$y = \sin(ax - \dfrac{1}{b})$與$y = \tan(\dfrac{1}{b}x - a)$有相同的週期，則$a + b =$ __________。

【解答】3

【詳解】

$\because$ $y = \sin x$ 的週期為 2π $\therefore$ $y = \sin(ax - \dfrac{1}{b})$的週期為$\dfrac{2\pi}{a}$

$\because$ $y = \tan x$ 的週期為 π $\therefore$ $y = \tan(\dfrac{1}{b}x - a)$的週期為$\dfrac{\pi}{\frac{1}{b}} = b\pi$

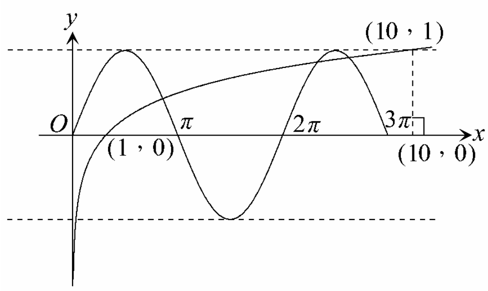
$\because$ $\dfrac{2\pi}{a} = b\pi$ $\therefore$ $\dfrac{2}{a} = b$ $\because$ a，$b\in N$ $\therefore$ $a = 1$，$b = 2$ 或 $a = 2$，$b = 1$

故 $a + b = 3$

14.方程式$\sin x = \log x$共有__________個實根。

【解答】3

【詳解】



$\sin x = \log x$ 有若干個實根

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y = \sin x \\ y = \log x \end{cases}$ 有若干組實解 $\Leftrightarrow$ $y = \sin x$，$y = \log x$ 有若干個交點

$y = \sin x$，$y = \log x$ 圖形如上圖所示 $\therefore$ 共有 3 個交點

15.設θ是第四象限角，且$\cot\theta = -3$，則$\sin(\theta + \dfrac{\pi}{6})\sin(\theta - \dfrac{\pi}{6})$之值為 = __________。

【解答】$-\dfrac{3}{20}$

【詳解】

$\because$ $\cot\theta = -3$ 且θ是第四象限角 $\therefore$ $\sin\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{10}}$，$\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

故$\sin(\theta + \dfrac{\pi}{6})\sin(\theta - \dfrac{\pi}{6})$

$= (\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{6} + \cos\theta\sin\dfrac{\pi}{6})(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{6} - \cos\theta\sin\dfrac{\pi}{6}) = \sin^2\theta\cos^2\dfrac{\pi}{6} - \cos^2\theta\sin^2\dfrac{\pi}{6}$

$=(-\frac{1}{\sqrt{10}})^2(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(\frac{3}{\sqrt{10}})^2 \cdot (\frac{1}{2})^2=\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{4}-\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{6}{40}=-\frac{3}{20}$

16.設 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$，$\tan\alpha=\frac{1}{2}$，$\tan\beta=\frac{1}{3}$，則

(1) $\tan(\alpha+\beta)=$ __________ 。 (2) $\alpha+\beta=$ __________ 。

【解答】(1) 1 (2) $\frac{5\pi}{4}$

【詳解】

(1) $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1$ (2)$\because$ $\pi<\alpha+\beta<2\pi$ $\therefore$ $\alpha+\beta=\frac{5\pi}{4}$

17.求 $\sqrt{3}\tan80^\circ\tan20^\circ-\tan80^\circ+\tan20^\circ$ 的值爲__________ 。

【解答】$-\sqrt{3}$

【詳解】

$\tan(80^\circ-20^\circ)=\frac{\tan80^\circ-\tan20^\circ}{1+\tan80^\circ\tan20^\circ}=\tan60^\circ=\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ $\sqrt{3}+\sqrt{3}\tan80^\circ\tan20^\circ=\tan80^\circ-\tan20^\circ$

$\therefore$ $\sqrt{3}\tan80^\circ\tan20^\circ-\tan80^\circ+\tan20^\circ=-\sqrt{3}$

18.設 $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$ 且 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，$\cot\beta=-3$，則 $\alpha-\beta=$ __________ 。（以弧度表示）

【解答】$\frac{5\pi}{4}$

【詳解】

$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$ $\Rightarrow$ $\pi<\alpha-\beta<2\pi$

$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}-(\frac{-1}{3})}{1+\frac{1}{2}(\frac{-1}{3})}=1$ $\therefore$ $\alpha-\beta=\frac{5\pi}{4}$

19.設 $P(\cos\alpha，-\sin\alpha)$，$Q(\cos\beta，-\sin\beta)$，且 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{3}$，則 $\overline{PQ}=$ __________ 。

【解答】1

【詳解】

$\overline{PQ}=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(-\sin\alpha+\sin\beta)^2}=\sqrt{1+1-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta}$

$=\sqrt{2-2\cos(\alpha-\beta)}=\sqrt{2-1}=1$

20.設 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 爲 $x^2+6x+3=0$ 之二根，則

(1) $\cos^2(\alpha+\beta)=$__________ 。

(2) $\sin^2(\alpha+\beta)+2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+5\cos^2(\alpha+\beta)$ 之值爲__________ 。

【解答】(1) $\frac{1}{10}$ (2) 2

【詳解】

(1)由根與係數關係得$\tan\alpha+\tan\beta=-6$，$\tan\alpha\tan\beta=3$

$\Rightarrow\quad \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-6}{1-3}=3$

$\therefore\quad \cos^2(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{\sec^2(\alpha+\beta)}=\dfrac{1}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}=\dfrac{1}{1+3^2}=\dfrac{1}{10}$

(2)原式$=\cos^2(\alpha+\beta)\left[\dfrac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}+\dfrac{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}+\dfrac{5\cos^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}\right]$

$=\cos^2(\alpha+\beta)[\tan^2(\alpha+\beta)+2\tan(\alpha+\beta)+5=\dfrac{1}{10}(3^2+2\cdot3+5)=2$

21.設$z=\dfrac{(\cos7^\circ+i\sin7^\circ)^5(\cos28^\circ+i\sin28^\circ)^2}{\cos61^\circ+i\sin61^\circ}=\cos\theta+i\sin\theta$，$0^\circ\le\theta<360^\circ$。

(1) $\theta=$ __________。 (2)化爲標準式$z=$ __________。

【解答】(1) 30° (2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

【詳解】

(1) $z=\dfrac{(\cos7^\circ+i\sin7^\circ)^5(\cos28^\circ+i\sin28^\circ)^2}{\cos61^\circ+i\sin61^\circ}=\dfrac{(\cos35^\circ+i\sin35^\circ)(\cos56^\circ+i\sin56^\circ)}{\cos61^\circ+i\sin61^\circ}$

$=\cos(35^\circ+56^\circ-61^\circ)+i\sin(35^\circ+56^\circ-61^\circ)=\cos30^\circ+i\sin30^\circ$

$\therefore\quad\theta=30^\circ$

(2) $z=\cos30^\circ+i\sin30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

22.(1) $\sin^{-1}(\sin\dfrac{9\pi}{10})=$ __________。 (2) $\cos^{-1}(\cos\dfrac{9\pi}{10})=$ __________。

(3) $\tan^{-1}(\tan\dfrac{9\pi}{10})=$ __________。

【解答】(1) $\dfrac{\pi}{10}$ (2) $\dfrac{9\pi}{10}$ (3) $-\dfrac{\pi}{10}$

23.(1) $\sin^{-1}(\sin(-5))=$ __________。 (2) $\cos^{-1}(\cos(-5))=$ __________。

(3) $\tan^{-1}(\tan(-5))=$ __________。

【解答】(1) $2\pi-5$ (2) $2\pi-5$ (3) $2\pi-5$

24.$\tan[\cos^{-1}(-\dfrac{1}{2})-\sin^{-1}(-\dfrac{1}{\sqrt{2}})]=$ __________。

【解答】$2+\sqrt{3}$

【詳解】

$\tan[\cos^{-1}(-\dfrac{1}{2})-\sin^{-1}(-\dfrac{1}{\sqrt{2}})]=\tan(120^\circ-45^\circ)=\tan75^\circ=2+\sqrt{3}$

25.滿足$\tan^{-1}x+\tan^{-1}(1-x)=\tan^{-1}\dfrac{1}{7}$的$x$值爲__________。

【解答】-2，3

【詳解】

兩邊取正切函數，則得$\tan(\tan^{-1}x+\tan^{-1}(1-x))=\tan(\tan^{-1}\frac{1}{7})$

$\Rightarrow \dfrac{\tan(\tan^{-1}x)+\tan(\tan^{-1}(1-x))}{1-\tan(\tan^{-1}x)\tan(\tan^{-1}(1-x))}=\dfrac{1}{7} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x+(1-x)}{1-x(1-x)}=\dfrac{1}{7}$

$\Rightarrow \quad x^2-x-6=0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x+2)=0$

$\therefore \quad x=3$，$x=-2$

26.設$-1\le x\le 1$，則$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x+\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】π

【詳解】

$(\sin^{-1}x+\cos^{-1}x)+(\tan^{-1}x+\cot^{-1}x)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$

27.$\sin^{-1}\sin 6+\cos^{-1}\cos 8+\tan^{-1}\tan 10=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$24-7\pi$

【詳解】

$\sin 6=-\sin(2\pi-6)=\sin(6-2\pi) \quad \because \quad -\frac{\pi}{2}\le 6-2\pi\le 0 \quad \Rightarrow \quad \sin^{-1}\sin 6=6-2\pi$

$\cos 8=\cos(2\pi-8)=\cos(8-2\pi) \quad \because \quad 0\le 8-2\pi\le \pi \quad \Rightarrow \quad \cos^{-1}\cos 8=8-2\pi$

$\tan 10=-\tan(3\pi-10)=\tan(10-3\pi) \quad \because \quad 0\le 10-3\pi\le\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \tan^{-1}\tan 10=10-3\pi$

$\therefore$ 原式 $=6-2\pi+8-2\pi+10-3\pi=24-7\pi$

28.求$\tan(\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2})$之值＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$2-\sqrt{3}$

【詳解】

$\tan(\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2})=\tan(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})=\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$

29.$\sin 80°-\sin 40°-\sin 20°=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】0

【詳解】

$\sin 80°-\sin 40°-\sin 20°=(\sin 80°-\sin 40°)-\sin 20°=2\cos\frac{80°+40°}{2}\sin\frac{80°-40°}{2}-\sin 20°$

$=2\cos 60°\sin 20°-\sin 20°=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 20°-\sin 20°=\sin 20°-\sin 20°=0$

30.令$\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$，則$\sum_{k=1}^{2001}\omega^k$ 之值爲＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】ω

【詳解】

$\omega^5=1$，$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$

$\therefore \quad \sum_{k=1}^{2001}\omega^k=(\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5)+(\omega^6+\omega^7+\omega^8+\omega^9+\omega^{10})$

$+\cdots+(\omega^{1996}+\omega^{1997}+\omega^{1998}+\omega^{1999}+\omega^{2000})+\omega^{2001}$

$=\overbrace{0+0+\cdots+0}^{400個}+(\omega^5)^{400}\cdot\omega=\omega$

31.已知$\sin\theta$ ，$\cos\theta$ 是方程式$x^2+kx+k=0$之兩根，則$k=$__________。

【解答】$1-\sqrt{2}$

【詳解】

$\sin\theta$，$\cos\theta$ 是$x^2+kx+k=0$之兩根

$\therefore\ \begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=-k \\ \sin\theta\cos\theta=k\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\quad\Rightarrow\quad |k|\le\sqrt{2}$

$k^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+2k$

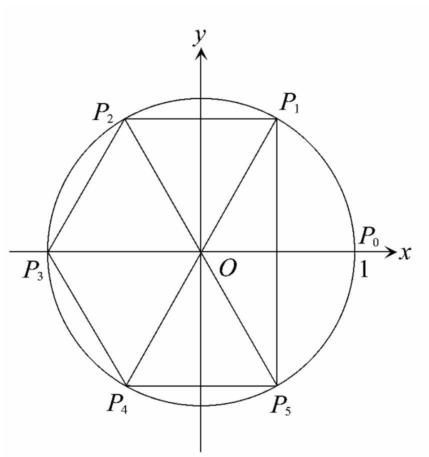
$\Rightarrow\quad k^2-2k-1=0\quad\Rightarrow\quad k=1\pm\sqrt{2}$（正數不合）

$\therefore\quad k=1-\sqrt{2}$

32.方程式$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$的五個複數根可表爲$x_k=$__________；又以此五個根爲頂點在複數平面上所成五邊形區域的面積爲__________。

【解答】$x_k=\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}$，$k=1$，2，3，4，5；$\frac{5\sqrt{3}}{4}$

【詳解】



$(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=x^6-1$

$x^6-1=0\quad\Rightarrow\quad x^6=1=\cos0+i\sin0$ 的根爲

$x_k=\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6}$，$k=0$，1，2，3，4，5

又$x_0=\cos0+i\sin0=1$，故$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$的五個根爲$x_k=\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6}$，$k=1$，2，3，4，5

設x_k在複數平面上的對應點爲P_k，則五個點P_1，P_2，P_3，P_4，P_5爲頂點的五邊形如圖：

$\angle P_1OP_2=\angle P_2OP_3=\angle P_3OP_4=\angle P_4OP_5=\frac{\pi}{3}$，$\angle P_1OP_5=\frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ 五邊形的面積爲

$4\triangle P_1OP_2+\triangle P_1OP_5=4\times\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{5}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{4}$

33.設$z=\frac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i}$，則(1) z之極式爲__________。 (2) $z^{100}=$__________。

【解答】(1) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$ (2) 1

【詳解】

(1) $z=\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i}=\dfrac{2(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)}{2(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)}=\dfrac{2(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})}{2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})}=\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}$

(2) $z^{100}=(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2})^{100}=\cos(150\pi)+i\sin(150\pi)=1$

34.z爲複數，若$(z^5-1)+(z^5+1)i=0$，則$z=$ ＿＿＿＿＿ 。

【解答】$-i$，$\pm\sin36°+i\cos36°$，$\pm\cos18°-i\sin18°$

【詳解】

$\therefore\quad (z^5-1)+(z^5+1)i=0\quad\Rightarrow\quad z^5(1+i)=1-i$

$\Rightarrow\quad z^5=\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i=\cos270°+i\sin270°$

$\therefore\quad z=\cos54°+i\sin54°$，$\cos126°+i\sin126°$，$\cos198°+i\sin198°$，$\cos270°+i\sin270°$，$\cos342°+i\sin342°$

$\Rightarrow\quad z=\sin36°+i\cos36°$，$-\sin36°+i\cos36°$，$-\cos18°-i\sin18°$，$-i$，$\cos18°-i\sin18°$

35.設 $0\le x\le\pi$，若函數$f(x)=4\sin x-2\sqrt{3}\sin(x-\dfrac{\pi}{6})$在$x=x_1$時有最大值$M$；在$x=x_2$時有最小值爲$m$，則數對$(x_1，M)=$ ＿＿＿＿＿，$(x_2，m)=$ ＿＿＿＿＿ 。

【解答】$(\dfrac{\pi}{6}，2)$；$(\pi，-\sqrt{3})$

【詳解】

$f(x)=4\sin x-2\sqrt{3}\sin(x-\dfrac{\pi}{6})=4\sin x-2\sqrt{3}(\sin x\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos x\sin\dfrac{\pi}{6})=4\sin x-$
$2\sqrt{3}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}\cos x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2(\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x)=2\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$

因爲 $0\le x\le\pi$，所以$\dfrac{\pi}{3}\le x+\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{4\pi}{3}$。因此

①當 $x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{\pi}{6}$時，$f(x)$最大值 $M=2$

②當 $x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}$，即 $x=\pi$ 時，$f(x)$最小值 $m=-\sqrt{3}$

36.若$\cot x=\dfrac{\sin318°-\sin58°}{\cos318°+\cos58°}$，$0°<x<360°$，則$x=$ ＿＿＿＿＿ 。

【解答】140°或 320°

【詳解】

$\cot x=\dfrac{\sin318°-\sin58°}{\cos318°+\cos58°}=\dfrac{2\cos188°\sin130°}{2\cos188°\cos130°}=\dfrac{\sin130°}{\cos130°}=\tan130°=\tan(270°-140°)$

$=\cot140°=\cot(180°+140°)=\cot320°$

$\because\quad 0°<x<360°\quad\therefore\quad x=140°$或 $x=320°$

37.求下列各值：

(1) $\sin52.5°\cos7.5°=$ ＿＿＿＿＿ 。　(2) $\sin52.5°\sin7.5°=$ ＿＿＿＿＿ 。

(3) $\sin65°-\sin55°-\sin5°=$ ＿＿＿＿＿ 。　(4) $\cos10°+\cos110°+\cos130°=$ ＿＿＿＿＿ 。

【解答】(1) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$　(2) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{4}$　(3) 0　(4) 0

【詳解】

(1) $\sin 52.5° \cdot \cos 7.5° = \frac{1}{2}[\sin(52.5° + 7.5°) + \sin(52.5° - 7.5°)] = \frac{1}{2}(\sin 60° + \sin 45°)$

$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$

(2) $\sin 52.5° \sin 7.5° = \frac{1}{2}[\cos(52.5° - 7.5°) - \cos(52.5° + 7.5°)] = \frac{1}{2}(\cos 45° - \cos 60°) = \frac{\sqrt{2}-1}{4}$

(3) $\sin 65° - \sin 55° - \sin 5° = 2\cos 60° \sin 5° - \sin 5° = \sin 5° - \sin 5° = 0$

(4) $\cos 10° + \cos 110° + \cos 130° = 2\cos 60° \cos(-50°) + \cos 130° = \cos 50° - \cos 50° = 0$

38.$\cos 55° \cos 65° + \cos 65° \cos 175° + \cos 175° \cos 55° =$ __________。

【解答】$-\frac{3}{4}$

【詳解】

原式 $= \frac{1}{2}(\cos 120° + \cos 10° + \cos 240° + \cos 110° + \cos 230° + \cos 120°)$

$= \frac{1}{2}(-\frac{1}{2} + \cos 10° - \frac{1}{2} + \cos 110° + \cos 230° - \frac{1}{2}) = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}(\cos 10° + 2\cos 170° \cos 60°) = -\frac{3}{4}$

39.設α，β 不同界，已知α，β 為方程式$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$ 的兩個根，則$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$之值為__
。

【解答】$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

【詳解】

(1) α，β 為 $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$ 的兩個根

$\therefore \quad \sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha = 1$

$-) \quad \sin\beta - \sqrt{3}\cos\beta = 1$

$(\sin\alpha - \sin\beta) - \sqrt{3}(\cos\alpha - \cos\beta) = 0$

$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \sqrt{3}(-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2})$

(2)但α，β 不同界 $\therefore \quad \alpha - \beta \neq 2k\pi$，$k \in Z$

$\Rightarrow \quad \frac{\alpha-\beta}{2} \neq k\pi$，$k \in Z \quad \Rightarrow \quad \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \neq 0$

(3)由(1)(2)得 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = -\sqrt{3}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \quad \Rightarrow \quad \tan\frac{\alpha+\beta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

40.若$\begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta = \frac{1}{2} \\ \sin\alpha + \sin\beta = \frac{1}{3} \end{cases}$，則$\sin(\alpha+\beta) =$ __________。

【解答】$\frac{12}{13}$

【詳解】

$$\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{2}\\ \sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{1}{2}\cdots\cdots ①\\ 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{1}{3}\cdots\cdots ②\end{cases}$$

$$\frac{②}{①}\Rightarrow\tan(\frac{\alpha+\beta}{2})=\frac{2}{3}，\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\tan(\frac{\alpha+\beta}{2})}{1+\tan^2(\frac{\alpha+\beta}{2})}=\frac{12}{13}$$

41.$\dfrac{\pi}{12}\leq\theta\leq\dfrac{3\pi}{4}$ 且 $3\sin^2\theta+4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta=5$，則$\theta=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{\pi}{3}$

【詳解】

$3\sin^2\theta+4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta=5\quad\Rightarrow\quad 3(\dfrac{1-\cos2\theta}{2})+2\sqrt{3}\sin2\theta-\dfrac{1+\cos2\theta}{2}=5$

$\Rightarrow\quad 2\sqrt{3}\sin2\theta-2\cos2\theta=4\quad\Rightarrow\quad\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin2\theta-\dfrac{1}{2}\cos2\theta=1\quad\Rightarrow\quad\sin(2\theta-\dfrac{\pi}{6})=1$

$\therefore\quad 2\theta-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5\pi}{2}$，$-\dfrac{3\pi}{2}$，$\cdots$，但$\dfrac{\pi}{12}\leq\theta\leq\dfrac{3\pi}{4}\quad\therefore\quad\theta=\dfrac{\pi}{3}$

42.函數$f(x)=\dfrac{2\cos x}{3+\sin x}$的最大值爲＿＿＿＿＿，最小值爲＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【詳解】

令$k=\dfrac{2\cos x}{3+\sin x}\quad\therefore\quad k(3+\sin x)=2\cos x\quad\Rightarrow\quad 3k=2\cos x-k\sin x$

因爲x爲任意實數，由重點 2 可知：$|3k|\leq\sqrt{2^2+(-k)^2}\quad\Leftrightarrow\quad 9k^2\leq 4+k^2$

$\therefore\quad 8k^2\leq 4\quad\Rightarrow\quad k^2\leq\dfrac{1}{2}$

所以 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leq k\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故最大值爲$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，而最小值爲 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

43.$\sin x-\cos x-1\neq 0$，設當 $0\leq x<2\pi$時，$f(x)=\dfrac{\sin x\cos x}{\sin x-\cos x-1}$的最大值爲$M$，最小值爲$m$，則數對$(M，m)=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】$(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}，-\dfrac{\sqrt{2}+1}{2})$

【詳解】

(1)令$t=\sin x-\cos x\neq 1\quad\Rightarrow\quad t^2=1-2\sin x\cos x\quad\Rightarrow\quad\sin x\cos x=\dfrac{1-t^2}{2}$

(2)$f(x)=\dfrac{\frac{1}{2}(1-t^2)}{t-1}=-\dfrac{1}{2}(t+1)$

(3)$0\leq x<2\pi\quad\Rightarrow\quad-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad 1-\sqrt{2}\leq t+1\leq 1+\sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} \ge -\dfrac{1}{2}(t+1) \ge -\dfrac{\sqrt{2}+1}{2} \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{\sqrt{2}+1}{2} \le f(x) \le \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

$\therefore \quad M=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$，$m=-\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

44.設$\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x$的最大值為$M$，最小值為$m$，則$M+m=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】2

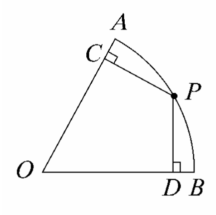
【詳解】

$\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+1$

$=2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x)+1=2(\sin 2x\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos 2x\sin\dfrac{\pi}{6})+1=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})+1$

$\therefore \quad M=3$，$m=-1 \quad \Rightarrow \quad M+m=2$

45.扇形OAB（見下圖）之圓心角$\dfrac{\pi}{4}$，半徑 1，P為$\overset{\frown}{AB}$上之動點，$\overline{PC}\perp\overline{OA}$於$C$，$\overline{PD}\perp\overline{OB}$於$D$，求四邊形$PCOD$之最大面積＿＿＿＿＿。



【解答】$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

【詳解】

四邊形$PCOD$面積

$=\dfrac{1}{2}\overline{OD}\cdot\overline{PD}+\dfrac{1}{2}\overline{OC}\cdot\overline{PC}=\dfrac{1}{2}(\cos\alpha\sin\alpha+\cos\beta\sin\beta)$

$=\dfrac{1}{2}[\sin\alpha\cos\alpha+\cos(\dfrac{\pi}{4}-\alpha)\sin(\dfrac{\pi}{4}-\alpha)]$（$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$）$=\dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha+\sin(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}+\alpha)\sin(\dfrac{\pi}{4}-\alpha)]$

$=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha+\sin^2\dfrac{\pi}{4}-\sin^2\alpha)=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2})$

$=\dfrac{1}{4}(1+\sin 2\alpha-1+\cos 2\alpha)=\dfrac{1}{4}(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)\le\dfrac{1}{4}\cdot\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$