高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：94.12.15					
範圍	Book2 CH2 三角函數	班級	普三 班	姓名	
		座號			

一、單選題(每題 10 分)

1. $\triangle ABC$ 中，$2\cos B\sin C=\sin A$，則$\triangle ABC$ 形狀是
(A)正三角形 (B)直角三角形 (C)等腰三角形 (D)鈍角三角形 (E)等腰直角三角形

【解答】(C)

【詳解】$\because\ 2\cos B\sin C=\sin A\quad\therefore\ 2\cos B=\dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{a}{c}$（正弦定理）

$$\Rightarrow\ 2\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)=\frac{a}{c}\quad\Rightarrow\quad c^2+a^2-b^2=a^2\quad\Rightarrow\quad b=c$$

2. $\dfrac{1}{1+\sin^2\theta}+\dfrac{1}{1+\cos^2\theta}+\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}+\dfrac{1}{1+\cot^2\theta}+\dfrac{1}{1+\sec^2\theta}+\dfrac{1}{1+\csc^2\theta}=$
(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2 (E) 1

【解答】(C)

【詳解】原式 $=\dfrac{1}{1+\sin^2\theta}+\dfrac{1}{1+\cos^2\theta}+\dfrac{1}{\sec^2\theta}+\dfrac{1}{\csc^2\theta}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\cos^2\theta}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sin^2\theta}}$

$$=\frac{1}{1+\sin^2\theta}+\frac{1}{1+\cos^2\theta}+\cos^2\theta+\sin^2\theta+\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta+1}+\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+1}=1+1+1=3$$

3. 設 $-540°\le x\le 540°$，則滿足$\cos^{89}x+\cos^{2000}6x+\cos^{365}7x=3$ 的x值共有
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5 個

【解答】(C)

【詳解】

$$\begin{array}{rl} & -1\le\cos^{89}x\le 1\\ & 0\le\cos^{2000}6x\le 1\\ +) & -1\le\cos^{365}7x\le 1\\ \hline \end{array}$$

$\therefore\quad \cos^{89}x+\cos^{2000}6x+\cos^{365}7x\le 3$

已知$\cos^{89}x+\cos^{2000}6x+\cos^{365}7x=3$

$\therefore\quad \cos^{89}x=1$，$\cos^{2000}6x=1$，$\cos^{365}7x=1\quad\Rightarrow\quad \cos x=1$，$\cos 6x=\pm1$，$\cos 7x=1$

$\because\quad -540°\le x\le 540°\quad\Rightarrow\quad x=-360°$，$0°$，$360°$共 3 個

4. 下列各值何者最小？
(A) $\cos 50°$ (B) $\cos 100°$ (C) $\cos 250°$ (D) $\cos 312°$ (E) $\cos(-112°)$

【解答】(E)

【詳解】$\cos 250°=\cos(360°-110°)=\cos 110°$，$\cos 312°=\cos(360°-48°)=\cos 48°$，

$\cos(-112°)=\cos 112°$

$\because\quad 48°<50°<100°<110°<112°$

$\therefore\quad \cos 48°>\cos 50°>\cos 100°>\cos 110°>\cos 112°$

$\Rightarrow \quad \cos 312° > \cos 50° > \cos 100° > \cos 250° > \cos(-112°)$

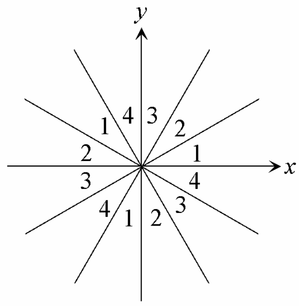
5. (複選) θ 是第二象限角，則 $\dfrac{\theta}{3}$ 可能是第幾象限角？

(A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限 (E) $\dfrac{\theta}{3}$ 可能不是象限角

【解答】(A)(B)(D)

$(\dfrac{\theta}{3}) \Rightarrow$ 每一象限三等分，依序寫上 1，2，3，4；1，2，3，4；⋯

$\because \quad \theta$ 在第二象限，編號 2 者得 $\dfrac{\theta}{3}$ 可能落在第一、二、四象限



6. (複選)若△ABC中，a，b，c分別爲$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的對邊，則下列敘述何者正確？

(A)若$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$，則$\angle C = 90°$ (B)若$\sin A = \dfrac{1}{2}$，則$\angle A = 30°$

(C)若$\cos A < 0$，則$\angle A$是鈍角 (D) $\sin A + \sin B > \sin C$

(E)若$c = \sqrt{2}$，$b = 1$，$\angle B = 30°$，則$\angle C = 45°$

【解答】(A)(C)(D)

【詳解】

(A)由正弦定理 $\Rightarrow \quad (\dfrac{a}{2R})^2 + (\dfrac{b}{2R})^2 + (\dfrac{c}{2R})^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2 \quad \therefore \quad \angle C = 90°$

(B) $\sin A = \dfrac{1}{2}$，則$\angle A = 30°$ 或 $150°$

(C) $\cos A < 0$，則$\dfrac{\pi}{2}\angle A < \pi \quad \therefore \quad \angle A$是鈍角

(D) $a + b > c \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a}{2R} + \dfrac{b}{2R} > \dfrac{c}{2R} \quad \Rightarrow \quad \sin A + \sin B > \sin C$

(E)由正弦定理$\dfrac{1}{\sin 30°} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sin C} \quad \Rightarrow \quad \sin C = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \quad \angle C = 45°$或 $135°$

7. $n \in N$，$f(n) = \sin^n\theta + \cos^n\theta$，若$f(1) = 1$，下列何者正確？

(A) $f(2) = 1$ (B) $f(3) = 1$ (C) $f(4) = 1$ (D) $f(5) = 1$ (E) $f(100) = 1$

【解答】(A)(B)(C)(D)(E)

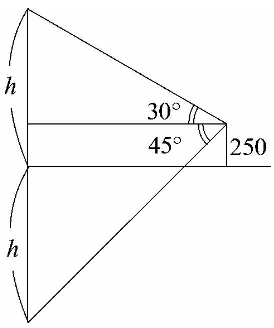
【詳解】$f(1) = \sin\theta + \cos\theta = 1$，又$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\cos\theta = 1 - \sin\theta \Rightarrow \sin^2\theta + (1 - \sin\theta)^2 = 0 \Rightarrow 2\sin\theta(\sin\theta - 1) = 0$

$\Rightarrow \quad \begin{cases} \sin\theta = 1 \\ \cos\theta = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \sin\theta = 0 \\ \cos\theta = 1 \end{cases}$

二、填充題(每題 10 分)

1. 站在湖中小島的山峰上，看對岸的高峰仰角是 30°，看湖面這高峰的鏡影俯角是 45°，所站的山峰高度爲 250 公尺（從湖面算起），則對岸高峰的高度爲__________公尺。



【解答】$250(2 + \sqrt{3})$

【詳解】如右圖所示

$\therefore\quad (h-250)\sqrt{3}=h+250 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{3}h-250\sqrt{3}=h+250 \quad\Rightarrow\quad (\sqrt{3}-1)h=250(1+\sqrt{3})$

$\therefore\quad h=\dfrac{250(1+\sqrt{3})}{(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{250(1+\sqrt{3})^2}{2}=250(2+\sqrt{3})$

2. 設兩方程式$x^2-3x\cos\theta-2=0$與$x^2+6x\sin\theta+4=0$有公根，則$\tan\theta$之值爲__________。

【解答】2 或 -1

【詳解】設公根爲α

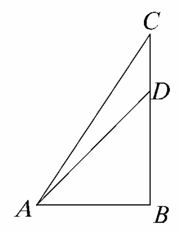
$\therefore\quad \alpha^2-3\alpha\cos\theta-2=0$ ……①，$\alpha^2+6\alpha\sin\theta+4=0$ ……②

①−②得$\alpha=\dfrac{-2}{2\sin\theta+\cos\theta}$代入①，$\therefore\quad \dfrac{4}{(2\sin\theta+\cos\theta)^2}-3\cos\theta\left(\dfrac{-2}{2\sin\theta+\cos\theta}\right)-2=0$

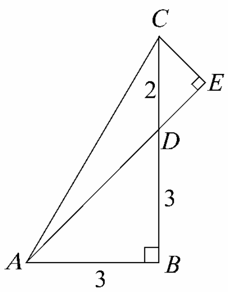
$4+6\cos\theta(2\sin\theta+\cos\theta)-2(2\sin\theta+\cos\theta)^2=0$

$\therefore\quad \sin\theta-2\cos\theta=0$ 或$\sin\theta+\cos\theta=0 \quad\therefore\quad \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-1，2$

3. 如圖，$\angle B=90°$，$3\overline{CD}=2\overline{BD}$，$\overline{AB}=\overline{BD}$，則$\tan\angle CAD$之值爲________。



【解答】$\dfrac{1}{4}$



【詳解】

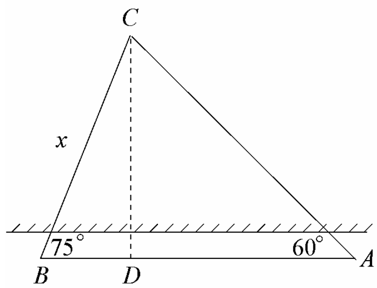
令$\overline{AB}=\overline{BD}=3$，而$3\overline{CD}=2\overline{BD}=6 \quad\therefore\quad \overline{CD}=2$

作$\overline{CE}\perp\overline{AE}$（如圖）　$\because\quad \angle CDE=\angle ADB=45° \quad\therefore\quad \overline{CE}=\sqrt{2}$

$\overline{AE}=\overline{AD}+\overline{DE}=3\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2} \quad\therefore\quad \tan\angle CAD$

$=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{AE}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{1}{4}$

4. 海岸上有A，B兩個觀測站，$\overline{AB}=5$公里。有一船C停泊在海上，由A測得$\angle BAC=60°$，由B測得$\angle ABC=75°$，則$\overline{BC}=$__________公里。



【解答】$\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$

【詳解】

如圖，作$\overline{CD}$垂直$\overline{AB}$於D，設$\overline{BC}=x$，則$\overline{BD}=x\cos75°$，$\overline{CD}=x\sin75°$

$\therefore\quad \overline{AB}=\overline{AD}+\overline{DB}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot x\sin75°+x\cos75°=5 \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{5}{2}\sqrt{6}$（公里）

5. 若$\sin\theta=\cot\theta$，求(1)$\cos\theta=$__________。　(2)$3\cos\theta+2\cos^2\theta+\cos^3\theta+\cos^4\theta=$__________。

【解答】(1)$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$　(2) 3

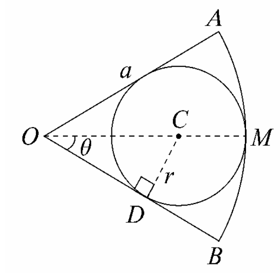
【詳解】

(1) $\sin\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad\Rightarrow\quad \sin^2\theta=\cos\theta \quad\Rightarrow\quad 1-\cos^2\theta=\cos\theta \quad\Rightarrow\quad \cos^2\theta+\cos\theta-1=0$

$\Rightarrow \quad \cos\theta = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ （$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ 不合）

(2)$3\cos\theta + 2\cos^2\theta + \cos^3\theta + \cos^4\theta = 3\cos\theta + 2\cos^2\theta + \cos^2\theta(\cos\theta + \cos^2\theta) = 3\cos\theta + 3\cos^2\theta = 3$

6. 如下圖所示：扇形OAB中，$\overline{OA} = \overline{OB} = a$，$\angle AOB = 2\theta$，已知扇形的內切圓半徑爲$r$，若以$a$及$\theta$ 表內切圓半徑r，則$r =$ ＿＿＿＿＿；又若$\theta = 30°$，則比值$\dfrac{a}{r} =$ ＿＿＿＿＿。

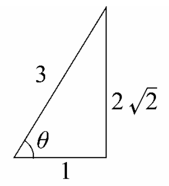


【解答】$r = \dfrac{a\sin\theta}{1+\sin\theta}$ ；3

【詳解】$\because \quad \overline{CD} = \overline{CM} = r \quad \therefore \quad \overline{OC} = a - r$

在$\triangle OCD$ 中，$\angle COD = \theta$，故得 $\sin\theta = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{OC}} = \dfrac{r}{a-r} \quad \therefore \quad r = \dfrac{a\sin\theta}{1+\sin\theta}$

當$\theta = 30°$代入上式，則 $r = \dfrac{\frac{1}{2}a}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}a \quad \therefore \quad \dfrac{a}{r} = 3$



7. 設θ爲銳角且$\sec\theta = 3$，求$\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta} =$ ＿＿＿＿＿。

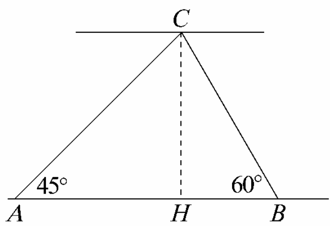
【解答】6

【詳解】原式 $= \dfrac{\frac{1}{3}}{1+\frac{2\sqrt{2}}{3}} + \dfrac{1+\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3+2\sqrt{2}} + (3+2\sqrt{2}) = (3-2\sqrt{2}) + (3+2\sqrt{2}) = 6$

8. 測量員欲測河流的寬度，在岸邊取兩點A、B，並在對岸取一目標C，若測得$\angle CAB = 45°$，$\angle CBA = 60°$且$\overline{AB} = 100$ 公尺，則河寬爲＿＿＿＿＿。

【解答】$50(3-\sqrt{3})$公尺

【詳解】



設河寬$\overline{CH} = x$ 公尺，

於$\triangle AHC$ 中，$\overline{AH} = x$，$\triangle BHC$ 中，$\overline{BH} = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$

又$\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HB} \quad \Leftrightarrow \quad x + \dfrac{x}{\sqrt{3}} = 100 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}x = 100$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{100\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = 50(3-\sqrt{3})$，河寬爲 $50(3-\sqrt{3})$公尺

9. 若$\dfrac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta} + \dfrac{\tan\theta + 1}{\tan\theta - 1} = \dfrac{k}{\sin^2\theta - \cos^2\theta}$，其中$k$爲一常數，則$k =$ ＿＿＿＿＿。

【解答】2

【詳解】

因爲$\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}+\dfrac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}=\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}+\dfrac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}=\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$

$=\dfrac{(\sin\theta-\cos\theta)^2+(\sin\theta+\cos\theta)^2}{(\sin\theta+\cos\theta)\cdot(\sin\theta-\cos\theta)}=\dfrac{2}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}$，故 $k=2$

16.$\log_8\sqrt{2+\tan 60^\circ}+\log_8\sqrt{1-\cos 30^\circ}=$__________。

【解答】$-\dfrac{1}{6}$

【詳解】$\log_8\sqrt{2+\tan 60^\circ}+\log_8\sqrt{1-\cos 30^\circ}=\log_8\sqrt{2+\sqrt{3}}+\log_8\sqrt{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

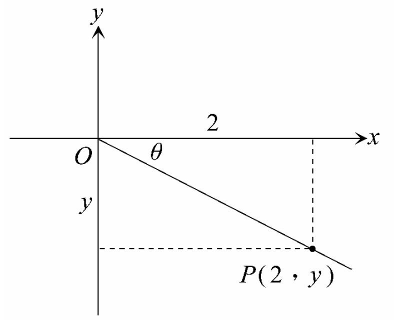
$=\log_8\sqrt{2+\sqrt{3}}+\log_8\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}=\log_8\sqrt{(2+\sqrt{3})(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2})}=\log_8\sqrt{\dfrac{1}{2}}=-\dfrac{1}{6}$

10.已知θ角的頂點與原點重合，始邊落在x軸正向上，終邊通過點$P(2，y)$，並知θ爲第四象限角，若$\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，則(1) y的值爲__________。（恰有一解）

(2) $\tan(90^\circ-\theta)+\cot(180^\circ-\theta)+\sin(270^\circ-\theta)$的值爲__________。

【解答】(1) -1 (2) $-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

【詳解】



(1) θ爲第四象限角，$P(2，y)$ $\therefore$ $y<0$

又$\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{y}{\overline{OP}}$ $\Rightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{y}{\sqrt{4+y^2}}$ $\Rightarrow -\sqrt{5}\,y=\sqrt{4+y^2}$

$\Rightarrow 5y^2=4+y^2$ $\Rightarrow$ $y^2=1$ $\Rightarrow$ $y=\pm 1$（1 不合） $\therefore$ $y=-1$

(2)$\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\tan\theta=\dfrac{-1}{2}$，$\cot\theta=-2$

$\tan(90^\circ-\theta)+\cot(180^\circ-\theta)+\sin(270^\circ-\theta)=\cot\theta-\cot\theta-\cos\theta=-\cos\theta=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

11.設$A(3\cos\theta，2)$，$B(\cos\theta，\sin\theta)$，則線段$\overline{AB}$長度之最大值爲__________。

【解答】$\dfrac{2}{3}\sqrt{21}$

【詳解】

$\overline{AB}^2=(3\cos\theta-\cos\theta)^2+(2-\sin\theta)^2=4\cos^2\theta+4-4\sin\theta+\sin^2\theta$

$=4(1-\sin^2\theta)+4-4\sin\theta+\sin^2\theta=-3\sin^2\theta-4\sin\theta+8=-3(\sin\theta+\dfrac{2}{3})^2+\dfrac{28}{3}$

取$\sin\theta=-\dfrac{2}{3}$ $\Rightarrow$ 最大值 $=\sqrt{\dfrac{28}{3}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$

12.已知$\sec\theta+\tan\theta=-\dfrac{3}{2}$，則$\sec\theta$之值爲__________。

【解答】$\dfrac{13}{12}$

【詳解】$\because\quad \sec\theta+\tan\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{3}{2}\quad\Rightarrow\quad 3\cos\theta=2+2\sin\theta$

平方之$\Rightarrow 9\cos^2\theta-12\cos\theta+4=4(1-\cos^2\theta)$

$\Rightarrow\quad 13\cos^2\theta-12\cos\theta=0$，$\cos\theta(13\cos\theta-12)=0$

$\therefore\quad \cos\theta=\dfrac{12}{13}$或$\cos\theta=0$（不合　$\because$　當$\cos\theta=0$，$\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$無意義）

$\therefore\quad \sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{13}{12}$

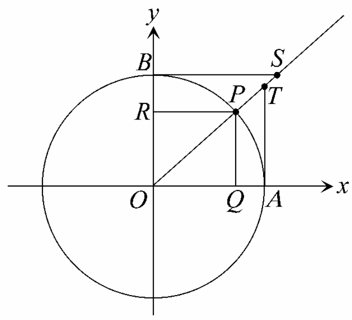
13.設θ爲銳角，若無窮等比級數$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sin^k\theta=1$，則$\theta=$__________。

【解答】30°

【詳解】因爲 θ 爲銳角，而且 $0<\sin\theta<1$，故無窮等比級數

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sin^k\theta=\dfrac{\sin\theta}{1-\sin\theta}=1\quad\Rightarrow\quad\sin\theta=1-\sin\theta\quad\Rightarrow\quad\sin\theta=\dfrac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\theta=30°$

14.如圖，$\overline{PQ}$，$\overline{TA}$垂直x軸，$\overline{PR}$，$\overline{SB}$垂直y軸，A，T，B在圓上，若$\overline{AT}=\dfrac{3}{5}$，$\overline{OP}=1$，則$\overline{OQ}\cdot\overline{OS}+\overline{BS}$之值爲 __________。



【解答】$\dfrac{10}{3}$

【詳解】

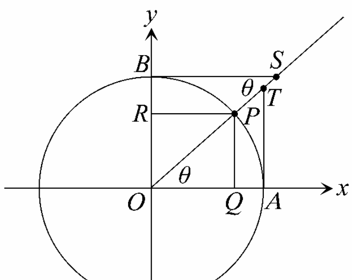
(1)令$\theta=\angle TOA=\angle OSB\quad\Rightarrow\quad\tan\theta=\dfrac{\overline{AT}}{\overline{OA}}=\dfrac{3}{5}$

$\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{34}}$，$\cos\theta=\dfrac{5}{\sqrt{34}}$，$\cot\theta=\dfrac{5}{3}$，$\sec\theta=\dfrac{\sqrt{34}}{5}$，$\csc\theta=\dfrac{\sqrt{34}}{3}$

(2) $\sin\theta=\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}=\overline{PQ}=\dfrac{3}{\sqrt{34}}=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OS}}=\dfrac{1}{\overline{OS}}\quad\Rightarrow\quad\overline{OS}=\dfrac{\sqrt{34}}{3}$

$\cos\theta=\dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}=\overline{OQ}=\dfrac{5}{\sqrt{34}}$，$\sec\theta=\dfrac{\overline{OS}}{\overline{BS}}\quad\Rightarrow\quad\overline{BS}=\overline{OS}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{34}}{3}\cdot\dfrac{5}{\sqrt{34}}=\dfrac{5}{3}$

(3)$\therefore\quad\overline{OQ}\cdot\overline{OS}+\overline{BS}=\dfrac{5}{\sqrt{34}}\cdot\dfrac{\sqrt{34}}{3}+\dfrac{5}{3}=\dfrac{10}{3}$



15.$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=4$，$\angle B$的分角線交$\overline{AC}$於D，則

(1) $\cos B=$__________。　(2) $\tan\angle DBC=$__________。

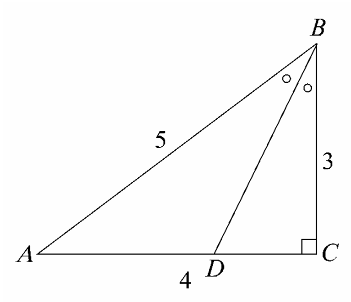
【解答】(1)$\frac{3}{5}$ (2)$\frac{1}{2}$

【詳解】

(1)$\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=9+16=25=\overline{AB}^2$ $\therefore$ $\angle C=90°$ $\Rightarrow$ $\cos B=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{3}{5}$

(2)$\because$ $\overline{BD}$ 爲$\angle B$ 之分角線

$\therefore$ $\overline{AD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{BC}=5:3$ $\Rightarrow$ $\overline{CD}=4\times\frac{3}{8}=\frac{3}{2}$，故 $\tan\angle DBC=\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{\frac{3}{2}}{3}=\frac{1}{2}$



16.設$\sec\theta+\tan\theta=3$，則$\sec\theta$之值爲__________。

【解答】$\frac{5}{3}$

【詳解】

由平方關係$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$ $\therefore$ $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$ $\Rightarrow$ $(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta)=1$

又$\sec\theta+\tan\theta=3$ $\therefore$ $\sec\theta-\tan\theta=\frac{1}{3}$

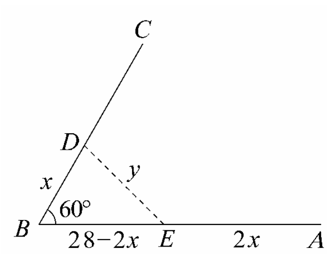
由$\begin{cases}\sec\theta+\tan\theta=3 \cdots\cdots ① \\ \sec\theta-\tan\theta=\frac{1}{3} \cdots\cdots ②\end{cases}$

①+②得 $2\sec\theta=\frac{10}{3}$ $\therefore$ $\sec\theta=\frac{5}{3}$

17.A，B兩鎮相距 28 公里，道路$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$夾角爲 60°，若甲由B沿$\overrightarrow{BC}$方向行走，乙同時由A以甲二倍速率沿$\overrightarrow{AB}$方向行走，當甲，乙相距最近時，甲走了__________公里。

【解答】10

【詳解】



如右圖，設甲走x公里到D，乙走 $2x$公尺到E，$\overline{DE}=y$最小 $\therefore$

$\overline{BE}=28-2x$

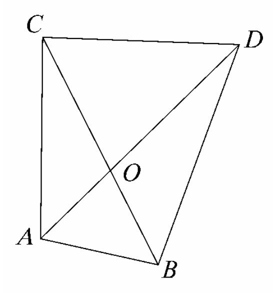
在$\triangle BDE$中，利用餘弦定理

$y^2=x^2+(28-2x)^2-2\cdot x(28-2x)\cdot\cos 60°$

$=7x^2-140x+784=7(x-10)^2+84\geq 84$

$\therefore$ 當$x=10$時，$\overline{DE}=y$有最小值，即甲走 10 公里時，甲乙兩人最接近

18.如圖，$\angle CAD=\angle CBD=45°$，$\overline{AB}=6$，$\overline{AD}$，$\overline{BC}$交於$O$，$\angle AOB=75°$，則$\overline{CD}=$__________。



【解答】$6\sqrt{2}$

【詳解】

(1)△ABC中，$\dfrac{6}{\sin 30°}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin(\theta+45°)}$，得$\overline{BC}=12\sin(\theta+45°)$

(2)△ABD中，$\dfrac{6}{\sin 30°}=\dfrac{\overline{BD}}{\sin\theta}$，得$\overline{BD}=12\sin\theta$

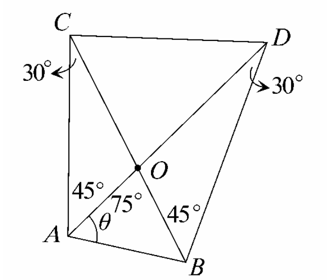
(3)△BCD中，利用餘弦定理知$\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{BD}^2-2\,\overline{BC}\cdot\overline{BD}\cdot\cos45°$

$=12^2\sin^2(\theta+45°)+12^2\sin^2\theta-2\cdot12\sin(\theta+45°)\cdot12\sin\theta\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

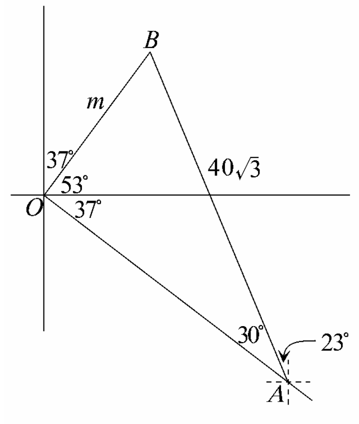
$=12^2[(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta)^2+\sin^2\theta-\sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta)\cdot\sin\theta]$

$=12^2(\dfrac{1}{2}+\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta-\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta)=12^2\times\dfrac{1}{2}=72$

∴ $\overline{CD}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$



19.某船以每小時 20 公里之速度向南 53°東航行，於上午十時測得燈塔之方向爲北 37°東，此時船與燈塔之距離爲m公里，至同日t時，測得該塔之方向爲北 23°西，此時船與燈塔之距離爲 $40\sqrt{3}$ 公里，則$m=$__________公里，而$t=$__________時。



【解答】$20\sqrt{3}$ ；13

【詳解】

如圖：$\angle AOB=37°+53°=90°$，$\angle OAB=53°-23°=30°$

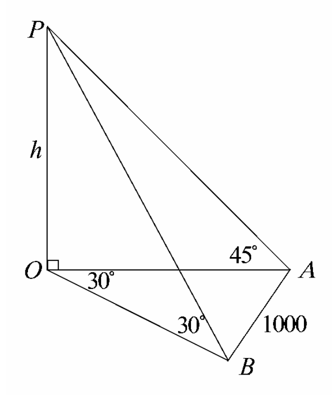
在△OAB 中，$\sin30°=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{AB}}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{2}=\dfrac{m}{40\sqrt{3}}$ $\Rightarrow m=20\sqrt{3}$

$\overline{OA}=60\Rightarrow t=10+\dfrac{60}{20}=13$，即 13 時，也就是下午 1 時

20.自塔之東一點A，測得塔頂之仰角爲 45°；在塔之南 60°東一點B，測得塔頂之仰角爲 30°。設A、B兩點相距 1000 公尺，則塔高爲__________公尺。

【解答】1000 公尺

【詳解】



設塔高$\overline{OP}=h$公尺，$\triangle OAP$中，$\angle OAP=45°\Rightarrow\overline{OA}=h$

$\triangle OBP$中，$\angle OBP=30°\Rightarrow\overline{OB}=\sqrt{3}h$，

$\triangle OAB$中，$\angle AOB=30°$，由餘弦定理

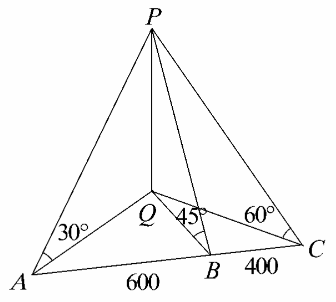
$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos 30°\Rightarrow 1000^2$

$=h^2+3h^2-2\cdot h\cdot\sqrt{3}h\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=h^2$，$\therefore\ h=1000$

21.由地面上共線三點A，B，C測得一塔頂P的仰角各為 30°，45°，60°，已知塔基Q與A，B，C不共線，且$\overline{AB}=600$ 公尺，$\overline{BC}=400$ 公尺，則山高$\overline{PQ}$為_公尺。

【解答】$200\sqrt{15}$

【詳解】



令$\overline{PQ}=h\ \ \therefore\ \overline{AQ}=\sqrt{3}h$，$\overline{BQ}=h$，$\overline{CQ}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}h$

在$\triangle ABQ$及$\triangle ACQ$中，$\cos\angle QAB$

$$=\frac{600^2+(\sqrt{3}h)^2-h^2}{2\times 600\times\sqrt{3}h}=\frac{1000^2+(\sqrt{3}h)^2-(\frac{1}{\sqrt{3}}h)^2}{2\times 1000\times\sqrt{3}h}$$

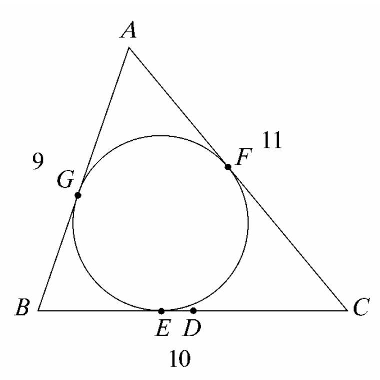
$\Rightarrow\ 5(360000+3h^2-h^2)=3(10^6+3h^2-\dfrac{1}{3}h^2)\ \Rightarrow\ h=200\sqrt{15}$ 公尺

22.在$\triangle ABC$中，已知$\overline{AB}=9$，$\overline{BC}=10$，$\overline{AC}=11$，求：

(1)若D為$\overline{BC}$中點，則$\overline{AD}=$__________。(2)$\triangle ABC$之內切圓切$\overline{BC}$於E，則$\overline{AE}=$______。

【解答】(1) $2\sqrt{19}$ (2) $\sqrt{73}$

【詳解】



(1) $\cos\angle ABC=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{2\overline{AB}\cdot\overline{BC}}=\dfrac{9^2+10^2-11^2}{2\cdot 9\cdot 10}=\dfrac{1}{3}$，

D為$\overline{BC}$中點 $\therefore\ \overline{BD}=5$

$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{BD}\cos\angle ABD$

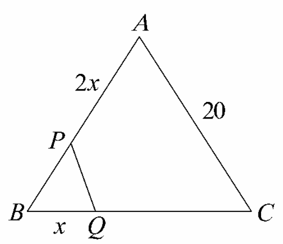
$=9^2+5^2-2\cdot 9\cdot 5\cdot\dfrac{1}{3}=76$，$\therefore\ \overline{AD}=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$

(2)$\triangle ABC$之內切圓切$\overline{BC}$，$\overline{AC}$，$\overline{AB}$於E，F，G

設$\overline{BE}=\overline{BG}=x$，$\overline{CE}=\overline{CF}=10-x\Rightarrow 9-x=\overline{AG}=\overline{AF}=11-(10-x)=1+x$，$\therefore\ x=4$

$\overline{AE}^2=\overline{AB}^2+\overline{BE}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{BE}\cos\angle ABE=9^2+4^2-2\cdot 4\cdot 9\cdot\dfrac{1}{3}=73$，$\therefore\ \overline{AE}=\sqrt{73}$

23.正$\triangle ABC$之邊長為 20，動點P自A往B移動，Q點自B往C移動，若P之速度為Q之兩倍，求$\overline{PQ}$之最小值__________。



【解答】$\dfrac{10\sqrt{21}}{7}$

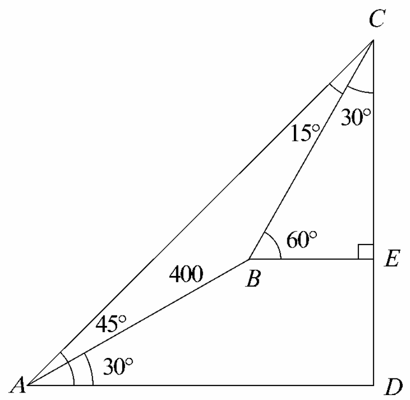
【詳解】

設 x 小時後，$\overline{PQ}$ 之值為 $\sqrt{(20-2x)^2+x^2-2(20-2x)x\cdot\cos 60^\circ}$

$=\sqrt{400-80x+4x^2+x^2-20x+2x^2}=\sqrt{7x^2-100x+400}=\sqrt{7(x-\frac{50}{7})^2+\frac{300}{7}}\geq\frac{10\sqrt{21}}{7}$

$\therefore$ $\overline{PQ}$ 之最小值為 $\frac{10\sqrt{21}}{7}$

45.某人於山麓測得山頂的仰角 45°，由山麓循 30°斜坡上行 400 公尺，再測得山頂的仰角 60°，則山高為__________公尺。



【解答】$200(\sqrt{3}+1)$

【詳解】

如右圖，在△ABC 中，∵ $\angle CAB=45^\circ-30^\circ=15^\circ$，

$\angle ACB=\angle ACD-\angle BCE=45^\circ-30^\circ=15^\circ$

故得$\angle ABC=150^\circ$，所以由正弦定理可得

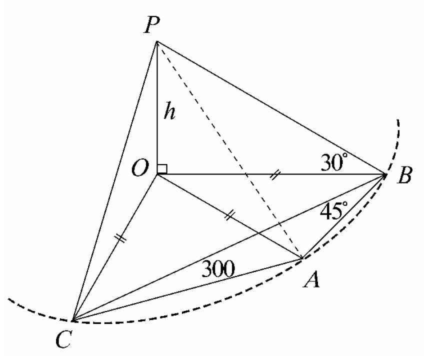
$\frac{\overline{AC}}{\sin 150^\circ}=\frac{\overline{AB}}{\sin 15^\circ}$ $\Rightarrow$ $\overline{AC}=\frac{400\cdot\sin 150^\circ}{\sin 15^\circ}$

在△ACD 中，$\overline{CD}=\overline{AC}\sin 45^\circ$

$=\frac{400\cdot\sin 150^\circ\cdot\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ}=\frac{400\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=200(\sqrt{3}+1)$

故所求山高為 $200(\sqrt{3}+1)$公尺

24.從平地上A，B，C三點測得新光大樓樓頂之仰角均為 30°。若 $\angle ABC=45^\circ$，而 $\overline{AC}=300$ 公尺，則此大樓的高為__________公尺。



【解答】$50\sqrt{6}$ 公尺

【詳解】

從 A，B，C 三點測得樓頂之仰角均為 30°$\Rightarrow$ 如圖：$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ 且 A，B，C 共圓

設$\overline{OP}=h$ $\Rightarrow$ $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{3}\,h$

於△ABC 中，$\overline{AC}=2R\sin 45^\circ$，$R=\overline{OA}$ $\Rightarrow$ $300=2\cdot\sqrt{3}\,h\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ $h=50\sqrt{6}$

25.設$\cos(-100^\circ)=k$，以k表出：(1) $\tan(-80^\circ)=$__________。 (2) $\csc 1360^\circ=$__________。

【解答】(1) $\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$ (2) $\frac{-1}{\sqrt{1-k^2}}$

【詳解】(1) $\cos(-100^\circ)=k$ $\Rightarrow$ $\sin(-100^\circ)=-\sqrt{1-k^2}$

$\therefore$ $\tan(-80^\circ)=-\tan(-100^\circ)=-\frac{\sin(-100^\circ)}{\cos(-100^\circ)}=\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$

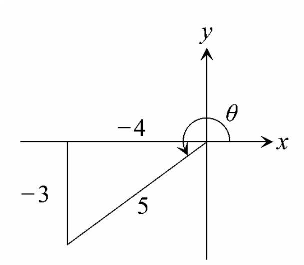
(2) $\csc 1360^\circ=\csc(-100^\circ)=\frac{1}{\sin(-100^\circ)}=\frac{-1}{\sqrt{1-k^2}}$

26.若θ爲第三象限角且$\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$，則

$\tan(90^\circ+\theta)+\sin(270^\circ-\theta)-\sec(180^\circ-\theta)+\cos(270^\circ+\theta)=$ __________ 。

【解答】$-\dfrac{143}{60}$

【詳解】原式 $=-\cot\theta-\cos\theta+\sec\theta+\sin\theta=-\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{5}-\dfrac{5}{4}-\dfrac{3}{5}=-\dfrac{143}{60}$



27.設$\begin{cases}\sin\alpha+\sin\beta=1\\ \cos\alpha+\cos\beta=0\end{cases}$，求$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=$ __________ 。

【解答】$\dfrac{3}{2}$

【詳解】$\begin{cases}\sin\alpha+\sin\beta=1\\ \cos\alpha+\cos\beta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha=1-\sin\beta\\ \cos\alpha=-\cos\beta\end{cases}$

$\Rightarrow\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1-2\sin\beta+\sin^2\beta+\cos^2\beta\ \Rightarrow\ \sin\beta=\dfrac{1}{2}$ 且$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta=1-\sin^2\alpha+1-\sin^2\beta=2-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{2}$

28.若$\triangle ABC$中，已知$\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=4$，$\angle BAC=60^\circ$，若$\angle A$的分角線$\overline{AD}$交$\overline{BC}$於D點，求(1) $\triangle ABC$的面積 $=$ __________ 。 (2)$\angle A$的分角線$\overline{AD}$ $=$ __________ 。

(3)$\overline{BC}$ $=$ __________ 。 (4) $\sin B=$ __________ 。 (5)$\overline{BD}$ $=$ __________ 。

【解答】(1) $6\sqrt{3}$ (2)$\dfrac{12}{5}\sqrt{3}$ (3) $2\sqrt{7}$ (4)$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ (5)$\dfrac{6}{5}\sqrt{7}$

【詳解】(1)$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot4\cdot\sin60^\circ=6\sqrt{3}$

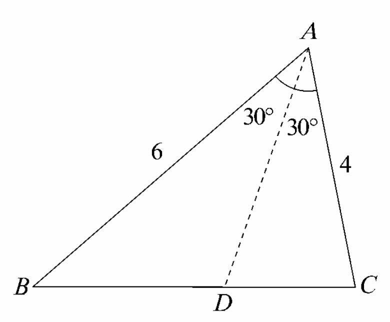
(2)$\triangle ABD+\triangle ACD=\triangle ABC\Rightarrow\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot\overline{AD}\cdot\sin30^\circ+\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot\overline{AD}\cdot\sin30^\circ=6\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{AD}=\dfrac{12}{5}\sqrt{3}$

(3)由餘弦定理，$\overline{BC}^2=6^2+4^2-2\times6\times4\times\cos60^\circ\ \Rightarrow\ \overline{BC}=2\sqrt{7}$

(4)由正弦定理$\dfrac{4}{\sin B}=\dfrac{2\sqrt{7}}{\sin60^\circ}\ \Rightarrow\ \sin B=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

(5)在$\triangle ABD$中，利用正弦定理$\dfrac{\overline{AD}}{\sin B}=\dfrac{\overline{BD}}{\sin30^\circ}\ \Rightarrow\ \overline{BD}=\dfrac{\overline{AD}}{\sin B}\times\sin30^\circ=\dfrac{\frac{12}{5}\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{21}}{7}}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{6}{5}\sqrt{7}$



29.已知$\cot65^\circ20'=0.4592$，$\cot65^\circ30'=0.4557$，$\cot\theta=-0.4575$，且$270^\circ<\theta<360^\circ$，則$\theta=$

__________。

【解答】294°35′

【詳解】因為 cot65°20′ = 0.4592，cot65°30′ = 0.4557，故利用線性內插法公式，計算如下：

$\cot x = 0.4592 + \dfrac{(0.4557 - 0.4592)}{(65°30' - 65°20')} \cdot (x - 65°20')$

$\Rightarrow \quad 0.4575 = 0.4592 + \dfrac{-0.0035}{10'} \cdot (x - 65°20')$

得 $x = 65°20' + \dfrac{0.4575 - 0.4592}{-0.0035} \cdot 10' \doteqdot 65°20' + 5' = 65°25'$

又 $270° < \theta < 360°$，$\cot\theta = -\cot x \quad \Rightarrow \quad \theta = 360° - x = 360° - 65°25' = 294°35'$

30.圓之內接四邊形$ABCD$中，若$\overline{AB} = 6$，$\overline{BC} = 4$，$\overline{CD} = 6$，$\angle B = 120°$，則$\overline{AD} =$__________，$\overline{AC} =$__________，四邊形$ABCD$的面積 =__________。

【解答】$2\sqrt{19}$；10；$21\sqrt{3}$

【詳解】圓內接四邊形$ABCD$，$\angle B = 120° \quad \Rightarrow \quad \angle D = 60°$，於△$ABC$中，利用餘弦定理

$\overline{AC}^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos 120° = 76 \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$

於△ADC中，設$\overline{AD} = d$，利用餘弦定理

$\overline{AC}^2 = 6^2 + d^2 - 2 \cdot 6 \cdot d \cdot \cos 60° \quad \Rightarrow \quad d^2 - 6d - 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 10$

四邊形$ABCD$之面積 $= \dfrac{1}{2}(6 \cdot 4 + 6 \cdot 10) \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 21\sqrt{3}$