高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：94.10.27					
範圍	Book2 1-3,4 對數	班級	普三 班	姓名	
		座號			

一、單選題(每題 10 分)

1. $\sqrt{\log\sqrt{6}+\sqrt{\log 3}\cdot\sqrt{\log 2}}+\sqrt{\log\sqrt{6}-\sqrt{\log 3}\cdot\sqrt{\log 2}}$ 可化簡爲

(A) $\sqrt{2}\log 3$ (B) $2\log\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{2\log 3}$ (D) $\frac{1}{2}\log\sqrt{3}$ (E) $\frac{1}{2}\log 3$

【解答】(C)

【詳解】

$\log\sqrt{6}+\sqrt{\log 3}\cdot\sqrt{\log 2}=\frac{1}{2}(\log 3+\log 2)+\sqrt{\log 3}\cdot\sqrt{\log 2}=\frac{1}{2}(\sqrt{\log 3}+\sqrt{\log 2})^2$

同理，$\log\sqrt{6}-\sqrt{\log 3}\cdot\sqrt{\log 2}=\frac{1}{2}(\sqrt{\log 3}-\sqrt{\log 2})^2$

$\therefore$ 原式 $=\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\log 3}+\sqrt{\log 2})^2}+\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\log 3}-\sqrt{\log 2})^2}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}|\sqrt{\log 3}+\sqrt{\log 2}|+\frac{1}{\sqrt{2}}|\sqrt{\log 3}-\sqrt{\log 2}|=\frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{\log 3}=\sqrt{2\log 3}$，故選(C)

2. 若 $0<a<b<1<c$，$A=\log_a 2$，$B=\log_b 2$，$C=\log_c 2$，則A，B，C的大小關係爲

(A) $A<B<C$ (B) $B<C<A$ (C) $C<A<B$ (D) $B<A<C$ (E) $C<B<A$

【解答】(D)

【詳解】

$A=\log_a 2=\frac{1}{\log_2 a}$，$B=\log_b 2=\frac{1}{\log_2 b}$，$C=\log_c 2=\frac{1}{\log_2 c}$

$\because$ $0<a<b<1<c$ $\Rightarrow$ $\log_2 a<\log_2 b<\log_2 1<\log_2 c$ $\therefore$ $A<0$，$B<0$，$C>0$，

$\because$ $\frac{1}{\log_2 a}>\frac{1}{\log_2 b}$ $\Rightarrow$ $A>B$ $\therefore$ $B<A<C$，應選(D)

3. 設$\log x$的首數爲n，尾數爲 α（$\alpha\neq 0$），下列何者正確？

(A) $\log x^2$的首數爲 $2n$ (B) $\log x^2$的尾數爲 2α (C) $\log\sqrt{x}$ 的首數爲 $\frac{n}{2}$

(D) $\log\sqrt{x}$ 的尾數爲 $\frac{\alpha}{2}$ (E)以上皆不對

【解答】(E)

【詳解】

(A)(B)$\log x^2=2\log x=2n+2\alpha$ $\therefore$ $\frac{1}{2}\leq\alpha<1$ 時，首數爲 $2n+1$，尾數爲 $2\alpha-1$

(C)(D)$\log\sqrt{x}=\frac{1}{2}\log x=\frac{n}{2}+\frac{\alpha}{2}$ $\therefore$ n是奇數時，首數爲$\frac{n-1}{2}$，尾數爲$\frac{1+\alpha}{2}$

4. 求下列敘述何者正確？

(A) $y=3^x$與$y=3^{-x}$的圖形對稱於y軸　(B) $y=\log_3 x$與$y=\log_{\frac{1}{3}} x$的圖形對稱於x軸

(C) $y=3^x$與$y=\log_3 x$的圖形對稱於y軸　(D) $y=3^{-x}$與$y=\log_{\frac{1}{3}} x$的圖形對稱於$x-y=0$　(E) $y=3^x$與$y=\log_3 x$的圖形相交於一點

【解答】(A)(B)(D)

【詳解】

(A)將(x，y)用($-x$，y)代入$y=3^x$，得$y=3^{-x}$　∴　$y=3^x$與$y=3^{-x}$兩圖形對稱y軸

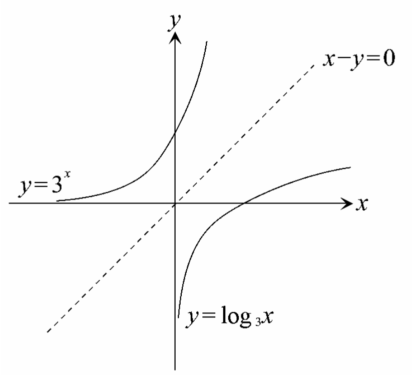
(B)將(x，y)用(x，$-y$)代入$y=\log_3 x$，得$-y=\log_3 x$　⇒　$y=\log_3 x=\log_{\frac{1}{3}} x$

∴　$y=\log_3 x$與$y=\log_{\frac{1}{3}} x$兩圖形對稱x軸

(C) $y=3^x$與$y=\log_3 x$互為反函數　⇒　兩圖形對稱$x-y=0$，但不對稱y軸

(D) $y=3^{-x}=(\frac{1}{3})^x$與$y=\log_{\frac{1}{3}} x$互為反函數　⇒　兩圖形對稱於$x-y=0$

(E)由右圖可知$y=3x$與$y=\log_3 x$不相交



二、填充題(每題 10 分)

1. 解方程式$\log_3(3^x+9)=\log_3 2+1+\frac{x}{2}$：__________。

【解答】$x=2$

【詳解】

$\log_3(3^x+9)=\log_3 2+1+\frac{x}{2}$

$\Rightarrow$　$\log_3(3^x+9)=\log_3 2+\log_3 3+\log_3 3^{\frac{x}{2}}$　$\Rightarrow$　$3^x+9=2\cdot 3\cdot 3^{\frac{x}{2}}$　$\Rightarrow$　$3^x+9=6\cdot 3^{\frac{x}{2}}$

$\Rightarrow$　$(3^{\frac{x}{2}})^2-6(3^{\frac{x}{2}})+9=0$ $\Rightarrow$　$(3^{\frac{x}{2}}-3)^2=0$　$\Rightarrow$　$3^{\frac{x}{2}}=3$　$\Rightarrow$　$\frac{x}{2}=1$　$\Rightarrow$　$x=2$

2. 二次方程式 $2x^2-5x+1=0$ 的二根為$\log a$，$\log b$，則$\log_a b+\log_b a$值為__________。

【解答】$\frac{21}{2}$

【詳解】

$\log a$與$\log b$為 $2x^2-5x+1=0$ 之二根　$\therefore$　$\begin{cases}\log a+\log b=\dfrac{5}{2}\\ \log a\log b=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

則$\log_a b+\log_b a=\dfrac{\log b}{\log a}+\dfrac{\log a}{\log b}=\dfrac{(\log a)^2+(\log b)^2}{\log a\log b}$

$$=\frac{(\log a+\log b)^2-2\log a\log b}{\log a\log b}=\frac{(\frac{5}{2})^2-2\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{21}{2}$$

3. 求值：$\log_3\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+(\dfrac{\log 8}{\log 3}-\dfrac{1}{\log_2 3})\cdot\log_2\sqrt{3}=$__________。

【解答】$-\dfrac{1}{2}$

【詳解】

$\log_3\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+(\dfrac{\log 8}{\log 3}-\dfrac{1}{\log_2 3})\cdot\log_2\sqrt{3}$ $=\log_3\dfrac{1}{3^{\frac{3}{2}}}+(\dfrac{3\log 2}{\log 3}-\dfrac{1}{\log_2 3})\cdot\log_2 3^{\frac{1}{2}}$

$=\log_3 3^{-\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2}(3\log_3 2-\dfrac{1}{\log_2 3})\cdot\log_2 3=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}(3-1)=-\dfrac{3}{2}+1=-\dfrac{1}{2}$

4. 方程式$(8x)^{\log_2 x}=4x^2$之解為__________。

【解答】2 或$\dfrac{1}{4}$

【詳解】

原式取對數　$\Rightarrow$　$\log_2(8x)^{\log_2 x}=\log_2(4x^2)$　$\Rightarrow$　$\log_2 x\,(3+\log_2 x)=2+\log_2 x$

$(\log_2 x)^2+\log_2 x-2=0$　$\Rightarrow$　$(\log_2 x+2)(\log_2 x-1)=0$

$\Rightarrow$　$\log_2 x=-2$ 或 1，即$x=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$ 或 $2^1=2$

5. 解$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{4}}(3-x)$，得__________。

【解答】$1<x<2$

【詳解】

① $x-1>0$　$\Rightarrow$　$x>1$

② $3-x>0$　$\Rightarrow$　$x<3$

③原式　$\Rightarrow$　$\log_{\frac{1}{4}}(x-1)^2>\log_{\frac{1}{4}}(3-x)$

$\Rightarrow$　$(x-1)^2<3-x$

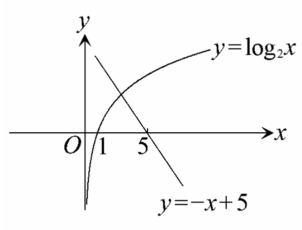
$\Rightarrow$　$x^2-x-2<0$

$\Rightarrow$　$-1<x<2$

綜合①②③得 $1<x<2$

6. 若不論x為任何實數，$\log_{0.1}\{(k-1)x^2+2x+(k+1)\}$恆有意義，則實數$k$之範圍為______。
【解答】$k>\sqrt{2}$
【詳解】
原式 $\Rightarrow$ $\forall x$，$(k-1)x^2+2x+(k+1)>0$ 即恆正
① $k-1>0 \Rightarrow k>1$
② $\triangle<0 \Rightarrow 1-(k-1)(k+1)<0 \Rightarrow 1-(k^2-1)<0 \Rightarrow k^2>2 \Rightarrow k<-\sqrt{2}$ 或 $k>\sqrt{2}$
由①②得$k>\sqrt{2}$

7. x的方程式$\log_2 x+x-5=0$ 共有__________個實根。
【解答】1
【詳解】



(1) $\log_2 x+x-5=0$ 有若干個實根
$\Leftrightarrow$ $y=\log_2 x$，$y=-x+5$ 有若干組實根
$\Leftrightarrow$ $y=\log_2 x$，$y=-x+5$ 有若干個交點
(2)由其圖形知，恰有一個交點（不是切點） $\therefore$ $\log_2 x+x-5=0$ 恰有一個實根

8. $4^{-2\log_2 3}+3^{\log_9 2}-5^{\frac{\log 2}{\log 5}}=$__________。
【解答】$\sqrt{2}-\dfrac{161}{81}$
【詳解】
原式 $=(2^2)^{-2\log_2 3}+3^{\frac{1}{2}\log_3 2}-5^{\log_5 2}=2^{\log_2 3^{-4}}+3^{\log_3\sqrt{2}}-2=3^{-4}+\sqrt{2}-2=\sqrt{2}-\dfrac{161}{81}$

9.設$\log_4 x=-\dfrac{3}{2}$，$\log_y\dfrac{16}{81}=\dfrac{4}{3}$，則(1) $x=$__________。 (2) $y=$__________。
【解答】(1)$\dfrac{1}{8}$ (2)$\dfrac{8}{27}$
【詳解】
(1) $\log_4 x=-\dfrac{3}{2} \Rightarrow x=4^{-\frac{3}{2}}=2^{-3}=\dfrac{1}{8}$
(2) $\log_y\dfrac{16}{81}=\dfrac{4}{3} \Rightarrow \dfrac{16}{81}=y^{\frac{4}{3}} \Rightarrow (\dfrac{2}{3})^4=y^{\frac{4}{3}} \Rightarrow y^{\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{3} \Rightarrow y=(\dfrac{2}{3})^3=\dfrac{8}{27}$

10. x的二次方程式$(x+\log_2 a)^2=16x$有兩個相異實根，則實數a的範圍為__________。
【解答】$0<a<16$
【詳解】

(1)真數$a > 0$

(2)$(x+\log_2 a)^2 = 16x$有兩個相異實根 $\Rightarrow x^2 + 2(\log_2 a - 8)x + (\log_2 a)^2 = 0$ 有兩個相異實根

$\therefore\ D = (\log_2 a - 8)^2 - (\log_2 a)^2 > 0 \quad \therefore\ -16\log_2 a + 64 > 0$

$\log_2 a < 4 = \log_2 16 \quad \therefore\ a < 16$

由(1)(2)得 $0 < a < 16$

11.解$x^{\log x} = \dfrac{x^2}{10}$，得$x =$ ＿＿＿＿＿ 。

【解答】10

【詳解】

原式取對數 $\Rightarrow\ \log x^{\log x} = \log\dfrac{x^2}{10} \Rightarrow (\log x)^2 = 2\log x - 1$

$\Rightarrow (\log x)^2 - 2\log x + 1 = 0 \Rightarrow (\log x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10$

12.設$18^a = 2$，試以a表示$\log_3 2$ =＿＿＿＿＿ 。

【解答】$\dfrac{2a}{1-a}$

【詳解】

原式取對數 $\Rightarrow\ a\log 18 = \log 2 \Rightarrow a(2\log 3 + \log 2) = \log 2$

$\Rightarrow\ 2a \cdot \dfrac{\log 3}{\log 2} + a = 1 \Rightarrow \log_2 3 = \dfrac{1-a}{2a} \quad \therefore\ \log_3 2 = \dfrac{2a}{1-a}$

13.設 $2^{\log x} \cdot x^{\log 2} - 3(x^{\log 2}) - 2^{1+\log x} + 4 = 0$，則$x$之值爲＿＿＿＿＿ 。

【解答】1 或 100

【詳解】

$\because\ 2^{\log x} = x^{\log 2}$

$\therefore$ 原方程式即$(2^{\log x})(2^{\log x}) - 3(2^{\log x}) - 2(2^{\log x}) + 4 = 0$

$\Rightarrow\ (2^{\log x})^2 - 5(2^{\log x}) + 4 = 0 \Rightarrow 2^{\log x} = 1$ 或 $2^{\log x} = 4$

$\Rightarrow\ \log x = 0$ 或$\log x = 2 \Rightarrow x = 1$ 或 100

14.(1)設$S_n = 1 + \dfrac{3}{5} + (\dfrac{3}{5})^2 + \cdots + (\dfrac{3}{5})^{n-1}$，若$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，則$S =$ ＿＿＿＿＿ 。

(2)承上題已知，若$|S_n - S| < 10^{-3}$，則n之最小值爲＿＿＿＿＿ 。

【解答】(1)$\dfrac{5}{2}$ (2) 16

【詳解】

(1)無窮等比級數 $S = \dfrac{1}{1-\dfrac{3}{5}} = \dfrac{5}{2}$

(2) $S_n = \dfrac{1-(\frac{3}{5})^n}{1-\frac{3}{5}} = \dfrac{5}{2}[1-(\frac{3}{5})^n]$

$\therefore\ |S_n - S| = \dfrac{5}{2}\cdot(\dfrac{3}{5})^n < 10^{-3}$ 取對數$\Rightarrow$ $\log5-\log2+n(\log3-\log5)<-3$

$\Rightarrow\ 0.2219n > 3.398\ \Rightarrow\ n > \dfrac{3.398}{0.2219} \doteqdot 15.3\ \ \therefore\ n$之最小值為 16

15.已知$\log2 = 0.3010$，$\log3 = 0.4771$，$\log7 = 0.8451$，若$n\in N$

且級數 $1+10^{\log\frac{8}{5}}+10^{2\log\frac{8}{5}}+10^{3\log\frac{8}{5}}+\cdots+10^{(n-1)\log\frac{8}{5}} > 465$，則$n$的最小值 $=$ ______ 。

【解答】12

【詳解】

$\because\ 10^{k\log\frac{8}{5}} = 10^{\log(\frac{8}{5})^k} = (\dfrac{8}{5})^k$

$\therefore$ 原式 $= 1+\dfrac{8}{5}+(\dfrac{8}{5})^2+\cdots+(\dfrac{8}{5})^{n-1} = \dfrac{1-(\frac{8}{5})^n}{1-\frac{8}{5}}$

$\dfrac{1-(\frac{8}{5})^n}{1-\frac{8}{5}} = \dfrac{5}{3}[(\dfrac{8}{5})^n-1] > 465\ \Rightarrow\ (\dfrac{8}{5})^n - 1 > 465\times\dfrac{3}{5} = 279\ \Rightarrow\ (\dfrac{8}{5})^n > 280$

$\therefore\ \log(\dfrac{8}{5})^n > \log280\ \Rightarrow\ n(3\log2-\log5) > \log(10\times4\times7)$

$\Rightarrow\ n(3\log2-1+\log2) > \log10+2\log2+\log7\ \Rightarrow\ 0.204n > 2.4471\ \Rightarrow\ n > 11.99$

$\therefore\ n$最小值 $= 12$

16.假設定期存款的年利率為 2.6%，每半年為一期，複利計息。胡小姐存進 10000 元，言明定期 5 年。試利用常用對數表，求期滿後的本利和為__________元。

【解答】11350

【詳解】

利率$r = 2.6\%\ \times\dfrac{1}{2} = 1.3\%$，期數$n = 10$，本金$A = 10000$ 元

設$B = (1.013)^{10}$，$\log B = 10\log 1.013 = 10\times(0.0043+0.0012) = 0.055$

查表知$B = 1.135$，本利和 $= A(1+r)^n = 10000(1+1.3\%)^{10} = 10000\times1.135 = 11350$ 元

17.已知

x	5.45	1.07	7.58	9.16	9.17
$\log x$	0.7364	0.0294	0.8797	0.9619	0.9624

若$a = \sqrt[3]{\dfrac{(5.45)(10.7)}{75.8}}$，$a$之近似值至有效數字第四位為__________。（用內插法）

【解答】0.9162

【詳解】

$$\log a=\frac{1}{3}\log\frac{(5.45)(10.7)}{75.8}=\frac{1}{3}\log\frac{(5.45)(1.07)}{7.58}=\frac{1}{3}(\log5.45+\log1.07-\log7.58)$$

$$=\frac{1}{3}(0.7364+0.0294-0.8797)=\frac{1}{3}(-0.1139)\doteqdot-0.0380=(-1)+0.9620$$

0.9619　0.9620　0.9624

9.16　x　9.17

$$\frac{x-9.16}{9.17-9.16}=\frac{0.9620-0.9619}{0.9624-0.9619}\quad\Rightarrow\quad x=9.162\quad\therefore\quad a=9.162\times10^{-1}=0.9162$$

18.若x，y爲正實數，$\log_2 x+\log_2 y=2$，則

(1) $\log_2(x+y)$ 的最小值 $=$ __________。(2)$(\log_2 x)(\log_2 y)$ 的最大值 $=$ __________。

【解答】(1) 2　(2) 1

【詳解】

(1) $\log_2 x+\log_2 y=2\quad\Rightarrow\quad\log_2 xy=2=\log_2 4\quad\therefore\quad\begin{cases}x>0，y>0\\xy=4\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$

$\Rightarrow\quad x+y\ \geq\ 4\quad\Rightarrow\quad\log_2(x+y)\geq\log_2 4=2\quad\therefore\quad\log_2(x+y)$有最小值 $=2$

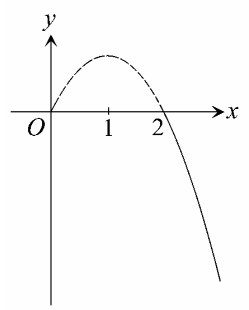
(2)$(\log_2 x)(\log_2 y)=(\log_2 x)(2-\log_2 x)=-(\log_2 x)^2+2\log_2 x=-(\log_2 x-1)^2+1$

$\therefore$　當$\log_2 x=1$，即$x=2$ 時，$(\log_2 x)(\log_2 y)$有最大值 $=1$

19.$10^2\leq x\leq10^3$，設$x^{2-\log x}$之最大值爲M，最小值爲m，則$(M，m)=$ __________。

【解答】$(1，\frac{1}{1000})$

【詳解】



$10^2\leq x\leq10^3\quad\Rightarrow\quad2\leq\ \log x\ \leq3$，令$y=x^{2-\log x}$

$\therefore\quad\log y=\log x^{2-\log x}=(2-\log x)\log x=-(\log x)^2+2\log x=-(\log x-1)^2+1$

$\therefore\quad-3\leq\log y\leq0\quad\Rightarrow\quad10^{-3}\leq y\leq1\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{1000}\leq x^{2-\log x}\leq1$

20.設$x>1$，$f(x)=\log_4(\frac{x^2}{8})+\log_x(\frac{8}{\sqrt{x}})$，則$f(x)$之最小值爲__________。

【解答】$2\sqrt{3}-2$

【詳解】

① $x>1\quad\Rightarrow\quad\log x>0$

② $f(x)=\log_2 x-\frac{3}{2}+3\log_x 2-\frac{1}{2}=\log_2 x+3\log_x 2-2\geq 2\sqrt{\log_2 x\cdot 3\log_x 2}\ -2$（A.M≥G.M）

$=2\sqrt{3}\ -2$

∴　最小値 $=2\sqrt{3}\ -2$

21.若方程式 $(\log ax)(\log ax^2)=4$ 的解皆大於 1，求a的範圍。

【解答】$0<a<\frac{1}{100}$

【詳解】

$(\log a+\log x)(\log a+\log x^2)=4 \quad\Rightarrow\quad 2(\log x)^2+3(\log a)(\log x)+[(\log a)^2-4]=0$

令$t=\log x \quad\Rightarrow\quad 2t^2+3(\log a)t+[(\log a)^2-4]=0$

∵　$x>1 \quad\Rightarrow\quad t>0$，即$t$的方程式有兩正根

$$\therefore \begin{cases} D=9(\log a)^2-8[(\log a)^2-4]\geq 0 \quad\Rightarrow\quad (\log a)^2+32\geq 0 \\ \text{兩根和} =-\frac{3}{2}\ \log a>0 \quad\Rightarrow\quad \log a<0 \\ \text{兩根積} =\frac{1}{2}\ [(\log a)^2-4]>0\Rightarrow\log a>2 \text{ 或 } \log a<-2 \end{cases}$$

∴　$\log a<-2 \quad\Rightarrow\quad \log a<\log 10^{-2}$　∴　$0<a<\frac{1}{100}$