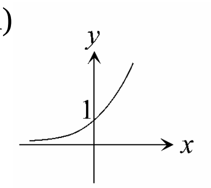
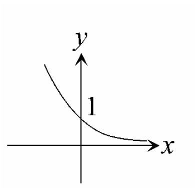
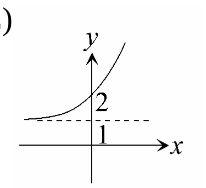
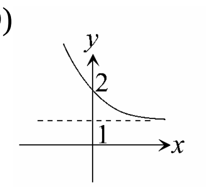
高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：94.10.20					
範圍	Book2 1-1,2 指數	班級	普三 班	姓名	
		座號			

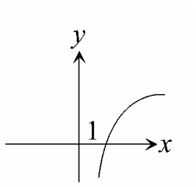
1. 下列何者為$y = 1 + (\frac{3}{5})^x$的部分圖形？

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

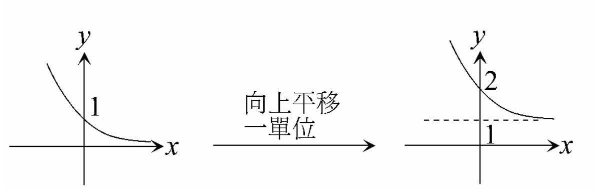
(E) 

【解答】(D)

【詳解】

先作出$y = (\frac{3}{5})^x$的圖形，再將此圖形向上平移一單位

即為$y = 1 + (\frac{3}{5})^x$的圖形



2. 解聯立方程式$\begin{cases} 9^x \cdot 4^{2y} = 3981312 \\ 5^{2x} \cdot 4^y = 400000 \end{cases}$，則得

(1) $x =$ (A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{5}{2}$ (E) 3

(2) $y =$ (A) $\frac{7}{2}$ (B) 4 (C) $\frac{9}{2}$ (D) 5 (E) $\frac{11}{2}$

【解答】(1) (D) (2) (A)

【詳解】

$9^x \cdot 4^{2y} = 3981312 \Rightarrow 3^{2x} \cdot 2^{4y} = 3^5 \cdot 2^{14}$；

$5^{2x} \cdot 4^y = 400000 \Rightarrow 5^{2x} \cdot 2^{2y} = 5^5 \cdot 2^7$

$$\therefore \begin{cases} 2x = 5 \\ 5y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases}$$

3. 設某一項新試驗中，細菌數目一天後增加a倍，且已知 3 天後細菌數為 200000 個，$4\frac{1}{2}$天後細菌數為 1600000 個，則 5 天後細菌數為

(A)2,000,000 (B)2,500,000 (C)3,200,000 (D)3,500,000 (E)3,600,000 個

【解答】(C)

【詳解】

設原有細菌數爲 N ，n 天後爲 $N(1+a)^n$

3 天後爲 $N(1+a)^3=200000\cdots\cdots$①， $4\frac{1}{2}$ 天後爲 $N(1+a)^{\frac{9}{2}}=1600000\cdots\cdots$②

$\frac{②}{①}\Rightarrow(1+a)^{\frac{3}{2}}=8 \quad\Rightarrow\quad (1+a)^{\frac{1}{2}}=2 \quad\therefore\quad a=3$

∴　5 天後細菌數爲

$N(1+a)^5=N(1+a)^3\cdot(1+a)^2=(200000)(1+a)^2=(200000)(1+3)^2=3200000$

4. 設$a>0$，$\sqrt[7]{\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}}}=a^x$，則$x=$ (A)$\frac{1}{14}$ (B)$\frac{1}{12}$ (C)$\frac{3}{14}$ (D)$\frac{1}{7}$ (E)$\frac{5}{12}$

【解答】(B)

【詳解】$\sqrt[7]{\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}}}=[a^{\frac{1}{2}}\cdot(a^{1-\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}]^{\frac{1}{7}}=(a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{12}})^{\frac{1}{7}}=(a^{\frac{7}{12}})^{\frac{1}{7}}=a^{\frac{1}{12}}=a^x \quad\therefore\quad x=\frac{1}{12}$

5. (複選)設$a\in R-\{0\}$，m，$n\in N$，下列等式何者正確？

(A) $a^0=1$ (B) $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ (C) $x=\sqrt[n]{a}$ 與$x^n=a$意義相同 (D) $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ (E)$(a^m)^n=a^{mn}$

【解答】(A)(B)(E)

【詳解】

(C)取$a=4$ 時，$x=\sqrt{4}=2$，但$x^2=4 \quad\Rightarrow\quad x=\pm 2$,故$x=\sqrt[n]{a}$ 與$x^n=a$不同

(D) $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ 必須有條件$a>0$

6. (複選) 若$f(x)=a+bx^n$，a，$b\in R$，$n\in N$，已知$f(2)=23$，$f(4)=519$，$f(8)=16391$，則

(A) $a=5$ (B) $a=7$ (C) $b=2$ (D) $b=\frac{1}{2}$ (E) $n=5$

【解答】(B)(D)(E)

【詳解】

$f(2)=a+b\cdot 2^n=23$

$f(4)=a+b\cdot 4^n=519$

$f(8)=a+b\cdot 8^n=16391$

>相減 $b\cdot 2^n\cdot(2^n-1)=496$

>相減 $b\cdot 4^n\cdot(2^n-1)=15872$

>相除 $2^n=32$

∴　$n=5$，代回得 $a=7$，$b=\frac{1}{2}$ ，故選(B)(D)(E)

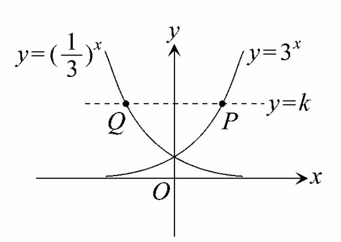
7. (複選)直線$y=k$與$y=3^x$圖形交於P點，與$y=(\frac{1}{3})^x$圖形交於Q點，則

(A) P與Q對稱於x軸 (B) P與Q對稱於y軸 (C) P在Q之右方 (D) P在Q之左方

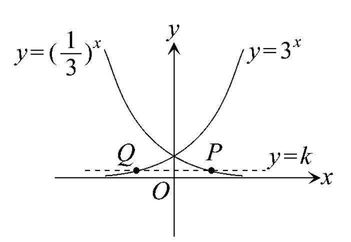
(E)以上皆非

【解答】(B)

【詳解】



或



二、填充題(每題 10 分)

1. 若 $\sqrt{11-\sqrt{72}}$ 的整數部分以 a 表示，小數部分以 b 表示，則 $\dfrac{2b-2}{a+b-5}-\dfrac{4}{a-b-1}=$＿＿＿＿。

【解答】$5\sqrt{2}$

【詳解】

$a+b=\sqrt{11-\sqrt{72}}=\sqrt{11-2\sqrt{18}}=\sqrt{9}-\sqrt{2}=3-\sqrt{2}=1.\cdots\cdots \Rightarrow a=1$，$b=(3-\sqrt{2})-1=2-\sqrt{2}$

故 $\dfrac{2b-2}{a+b-5}-\dfrac{4}{a-b-1}=\dfrac{4-2\sqrt{2}-2}{3-\sqrt{2}-5}-\dfrac{4}{-1+\sqrt{2}-1}=\dfrac{2-2\sqrt{2}}{-2-\sqrt{2}}+\dfrac{4}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}+\dfrac{4}{2-\sqrt{2}}$

$=\dfrac{-2(1-\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}+\dfrac{4(2+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=-(4-3\sqrt{2})+2(2+\sqrt{2})=5\sqrt{2}$

2. 設 $a^{2x}=3-2\sqrt{2}$，則(1) $a^{-x}=$＿＿＿＿。 (2) $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=$＿＿＿＿。

【解答】(1) $\sqrt{2}+1$ (2) 5

【詳解】

(1) $a^{2x}=3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2 \Rightarrow a^x=\sqrt{2}-1 \quad \therefore \quad a^{-x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$

(2) $a^{2x}=3-2\sqrt{2} \Rightarrow a^{-2x}=\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$

$\therefore \quad \dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-a^x\cdot a^{-x}+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}}=6-1=5$

3. 解方程式：

(1) $4^{x+1}-5\cdot 2^{x+2}+16=0 \Rightarrow x=$＿＿＿＿。

(2) $6^x-4\cdot 3^x-3\cdot 2^x+12=0 \Rightarrow x=$＿＿＿＿。

【解答】(1) 0，2 (2) 1，2

【詳解】

(1)原式 $\Rightarrow 4\cdot(2^x)^2-20\cdot 2^x+16=0$，設 $t=2^x$

$\Rightarrow t^2-5t+4=0 \Rightarrow (t-1)(t-4)=0 \Rightarrow t=1,4 \Rightarrow 2^x=1$ 或 $2^x=4 \Rightarrow x=0$ 或 2

(2)原式 $\Rightarrow 2^x\cdot 3^x-4\cdot 3^x-3\cdot 2^x+12=0$

$\Rightarrow (2^x-4)(3^x-3)=0 \Rightarrow 2^x=4$ 或 $3^x=3 \Rightarrow x=2$ 或 1

4. 假設某項實驗中，細菌數 1 日後增加 1 倍，若 10 日後細菌數爲 N，則 k 日後細菌數爲 $\dfrac{N}{8}$，則 $k=$＿＿＿＿。

【解答】7
【詳解】
設實驗開始時，細菌數為m個，則
10 日後，細菌數$m\cdot 2^{10}=N$……①；k日後，細菌數$m\cdot 2^{k}=\dfrac{N}{8}$……②
由$\dfrac{①}{②}$得 $2^{10-k}=8=2^{3}\quad\Rightarrow\quad 10-k=3\quad\Rightarrow\quad k=7$

5. 解方程式$3(4^{x}+4^{-x})-16(2^{x}+2^{-x})+26=0$：__________。
【解答】$x=\log_{2}\dfrac{1}{3}$或$\log_{2}3$或 0
【詳解】
$3(4^{x}+4^{-x})-16(2^{x}+2^{-x})+26=0$
令$2^{x}+2^{-x}=t$，$(2^{x}+2^{-x})^{2}=4^{x}+4^{-x}+2=t^{2}\quad\Rightarrow\quad 4^{x}+4^{-x}=t^{2}-2$，$t\geq 2$
$\therefore\quad 3(t^{2}-2)-16t+26=0$，$3t^{2}-16t+20=0$，$(3t-10)(t-2)=0$，$t=\dfrac{10}{3}$或 2
① $t=\dfrac{10}{3}\quad\Rightarrow 2^{x}+2^{-x}=\dfrac{10}{3}\quad\Rightarrow 3(2^{x})^{2}-10(2^{x})+3=0\quad\Rightarrow 2^{x}=\dfrac{1}{3}$或 $3\Rightarrow x=\log_{2}\dfrac{1}{3}$或$\log_{2}3$
② $t=2\quad\Rightarrow 2^{x}+2^{-x}=2\quad\Rightarrow (2^{x})^{2}-2(2^{x})+1=0\quad\Rightarrow 2^{x}=1\quad\Rightarrow\quad x=0$

6. 若方程式 $4^{x}-3\cdot 2^{x+2}+8=0$ 之兩根為α，β，則$\alpha+\beta=$__________。
【解答】3
【詳解】
$(2^{2})^{x}-3\cdot 2^{2}\cdot 2^{x}+8=0\quad\Rightarrow\quad (2^{x})^{2}-12\cdot 2^{x}+8=0$
令$t=2^{x}$，則$t^{2}-12t+8=0$ 兩根為 2^{α}，2^{β}，由根與係數關係得兩根積 $2^{\alpha+\beta}=2^{\alpha}\cdot 2^{\beta}=8=2^{3}$
$\therefore\quad \alpha+\beta=3$

7. 設$a^{x}=\sqrt[8]{9+4\sqrt{2}+8\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$，則$\dfrac{a^{6x}+a^{-6x}}{a^{2x}+a^{-2x}}=$__________。
【解答】5
【詳解】
$a^{x}=\sqrt[8]{9+4\sqrt{2}+8\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=\sqrt[8]{9+4\sqrt{2}+8(\sqrt{2}+1)}$
$=\sqrt[8]{17+12\sqrt{2}}=\sqrt[8]{17+2\sqrt{72}}=\sqrt[4]{\sqrt{9}+\sqrt{8}}=\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}$
$\therefore\quad a^{4x}=3+2\sqrt{2}$ 且$a^{-4x}=\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$
$\therefore\dfrac{a^{6x}+a^{-6x}}{a^{2x}+a^{-2x}}=\dfrac{(a^{2x}+a^{-2x})(a^{4x}-1+a^{-4x})}{a^{2x}+a^{-2x}}=a^{4x}-1+a^{-4x}=(3+2\sqrt{2})-1+(3-2\sqrt{2})=5$

8. 設$a\in R$，若 $4^{x}-\dfrac{3a+1}{4^{x}}=3a$有實數解，求$a$之範圍為__________。
【解答】$a>-\dfrac{1}{3}$

【詳解】

$(4^x)^2-3a(4^x)-(3a+1)=0 \quad \Rightarrow [4^x-(3a+1)](4^x+1)=0 \quad \Rightarrow 4^x=3a+1>0 \quad \Rightarrow a>-\dfrac{1}{3}$

9. 若 $2^{0.6}=1.516$，$2^{0.03}=1.021$，則 $2^{1.54}$之近似值爲__________（至小數點後第二位）。
$[(1.516)^2=2.298256$，$(1.516)^3=3.484156$，$(1.021)^2=1.042441$，$(1.021)^3=1.0643322]$

【解答】2.91

【詳解】 $2^{1.54}=\dfrac{2\times 2^{0.6}}{(2^{0.03})^2}=\dfrac{2\times 1.516}{(1.021)^2}=\dfrac{3.032}{1.042441}=2.90855=2.91$

10.設 $\sqrt[x]{32}=\sqrt[y]{2^{3y-6}}$ 且 $3^{15y+3x}=81^{xy}$，求 x， y 的值爲__________。

【解答】 $x=5$ ， $y=3$

【詳解】

$$\begin{cases}\sqrt[x]{32}=\sqrt[y]{2^{3y-6}}\\ 3^{15y+3x}=81^{xy}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2^{\frac{5}{x}}=2^{\frac{3y-6}{y}}\\ 3^{15y+3x}=3^{4xy}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{5}{x}=\dfrac{3y-6}{y}\\ 15y+3x=4xy\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{y}=3\\ \dfrac{15}{x}+\dfrac{3}{y}=4\end{cases} \Rightarrow x=5\text{ ， }y=3$$

11.設$x\in R$，$10^x-10^{-x}=1$，則 $1000^x+1000^{-x}=$__________。

【解答】$2\sqrt{5}$

【詳解】

由$(10^x+10^{-x})^2=(10^x-10^{-x})^2+4\times 10^{2x}\times 10^{-2x}=1+4=5$，$10^x+10^{-x}=\sqrt{5}$

平方得 $10^{2x}+2+10^{-2x}=5 \quad \Rightarrow \quad 10^{2x}+10^{-2x}=3$

$1000^x+1000^{-x}=10^{3z}+10^{-3x}=(10^x+10^{-x})(10^{2x}-1+10^{-2x})=\sqrt{5}(3-1)=2\sqrt{5}$

12. $(3.5)^x=(0.035)^y=100$，則$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=$__________。

【解答】1

【詳解】

$$\begin{cases}(3.5)^x=100 \quad \Rightarrow \quad 3.5=100^{\frac{1}{x}} & \cdots\cdots① \\ (0.035)^y=100 \quad \Rightarrow \quad 0.035=100^{\frac{1}{y}} & \cdots\cdots②\end{cases}$$

$\dfrac{①}{②}$ 得$100^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=\dfrac{3.5}{0.035}=100 \quad \therefore \quad \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1$

13.指數不等式$(0.125)^x<0.25<2^{-2x}$的解爲__________。

【解答】 $\dfrac{2}{3}<x<1$

【詳解】

$(0.125)^x<0.25<2^{-2x} \quad \Rightarrow (\dfrac{1}{8})^x<\dfrac{1}{4}<2^{-2x} \quad \Rightarrow 2^{-3x}<2^{-2}<2^{-2x}$

$$\Rightarrow \quad -3x < -2 < -2x \Rightarrow \begin{cases} -3x < -2 \\ -2 < -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{2}{3} \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{2}{3} < x < 1$$

14.不等式 $2^{x+1}+2^{2-x}-6<0$ 之解為__________。

【解答】$0<x<1$

【詳解】

$$2^{x+1}+2^{2-x}-6<0 \quad \Rightarrow \quad 2\cdot 2^{x}+4\cdot \frac{1}{2^{x}}-6<0,$$

設 $t=2^{x} \Rightarrow 2t^{2}-6t+4<0 \Rightarrow t^{2}-3t+2<0 \Rightarrow (t-1)(t-2)<0$

$$1<t<2 \quad \Rightarrow \quad 1<2^{x}<2 \quad \Rightarrow \quad 0<x<1$$

15.設 $a=2^{x}=3^{y}=5^{z}$ 且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$，則 a 之值為__________。

【解答】$\sqrt{30}$

【詳解】

$\because \quad a=2^{x}=3^{y}=5^{z}$ 且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$

$\therefore \quad 2=a^{\frac{1}{x}}$

$3=a^{\frac{1}{y}}$

$\times)\ \ 5=a^{\frac{1}{z}}$

$30=a^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=a^{2}$

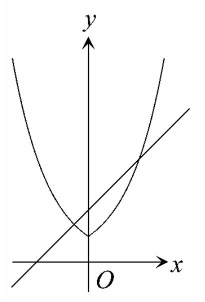
又 $a>0 \quad \therefore \quad a=\sqrt{30}$

16.方程式 $2^{|x|}-2=x$ 有__________個實根。

【解答】2

【詳解】

$2^{|x|}-2=x \quad \Rightarrow \quad 2^{|x|}=x+2 \Rightarrow \begin{cases} y=2^{|x|} \\ y=x+2 \end{cases}$，交點二個。



17.設$f(x)=9^x-2\cdot 3^{x+1}+1$，$-1\le x\le\dfrac{1}{2}$，則$f(x)$之最大値=__________。

【解答】$-\dfrac{8}{9}$

【詳解】

$f(x)=9^x-2\cdot 3^{x+1}+1=3^{2x}-6\cdot 3^x+1$

設$t=3^x\Rightarrow f(x)=t^2-6t+1=(t-3)^2-8$

$\because\quad -1\le x\le\dfrac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\dfrac{1}{3}\le 3^x\le\sqrt{3}\Rightarrow\quad\dfrac{1}{3}\le\ t\le\sqrt{3}$

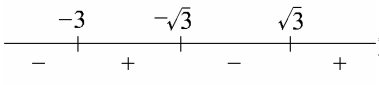
$\therefore$ 當 $3^x=\dfrac{1}{3}$，即$x=-1$ 時，$f(x)$有最大值=$-\dfrac{8}{9}$

18.不等式$(x^2-x+1)(x-1)^{20}(x+3)^{21}(x^2-3)<0$ 之解爲__________。

【解答】$x<-3$ 或 $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ 且 $x\ne 1$

【詳解】

$\because\quad x^2-x+1>0$，$(x-1)^{20}\ge 0\quad\therefore$ 不等式爲$(x+3)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})<0$ 且$x\ne 1$



知$x<-3$ 或 $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ 且$x\ne 1$

19.設$x>0$，不等式$x^{x^2+3}>(x^2)^2$之解爲__________。

【解答】$0<x\ne 1$

【詳解】

①$0<x<1$ 時，$x^2+3<4\quad\Rightarrow\quad x^2<1\quad\Rightarrow\quad -1<x<1\quad\therefore\quad 0<x<1$

②$x=1$ 時，$1>1$（→←）

③ $x>1$ 時，$x^2+3>4\quad\Rightarrow\quad x^2>1\quad\Rightarrow\quad x<-1$ 或$x>1\quad\therefore\quad x>1$

由①②③得 $0<x\ne 1$