<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高三數學平時測驗　　日期：94.09.22</td></tr>
<tr><td>範圍</td><td>Book1　Chap4
多項式</td><td>班級
座號</td><td>普三　　班</td><td>姓名</td><td></td></tr>
</table>

一、選擇題(每題 10 分)

1. 已知a為整數，且$x^4+4x^3+ax^2-8x+6=0$有兩個根的和為 0，則a的值為

(A) 5　(B) -5　(C) 3　(D) -3　(E) -6

【解答】(B)

【詳解】

$\because$　有兩根的和為 0　$\therefore$　設$x^4+4x^3+ax^2-8x+6=(x^2+p)(x^2+qx+r)$

比較係數　$\Rightarrow$　$\begin{cases} q=4 \\ p+r=a \\ pq=-8 \\ pr=6 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} p=-2 \\ q=4 \\ r=-3 \end{cases}$

故$a=p+r=(-2)+(-3)=-5$

2. 方程式$x^3-3x^2-4x+11=0$

(A)沒有實根　(B)有一個實根　(C)有兩個實根　(D)有三個不等的實根　(E)以上皆非

【解答】(D)

【詳解】

設$f(x)=x^3-3x^2-4x+11$

則$f(-2)=-8-12+8+11=-1$，$f(-1)=-1-3+4+11=11$

$f(1)=1-3-4+11=5$，$f(2)=8-12-8+11=-1$

$f(3)=27-27-12+11=-1$，$f(4)=64-48-16+11=11$

$\therefore$　-2，-1 之間，1，2 之間，3，4 之間各有一根

3. 下列何者為不等式$\dfrac{2x+3}{x-2}\geq 1$的解集合？

(A)$\{x\mid x\geq 2$ 或 $x\leq -5\}$　(B)$\{x\mid x\geq -5$ 且 $x\neq 2\}$　(C)$\{x\mid -5<x<2\}$

(D)$\{x\mid x>2$ 或 $x\leq -5\}$　(E)$\{x\mid x>2$ 或 $x<-5\}$

【解答】(D)

【詳解】

$\dfrac{2x+3}{x-2}\geq 1$　$\Rightarrow$　$\dfrac{2x+3}{x-2}-1\geq 0$　$\Rightarrow$　$\dfrac{(2x+3)-(x-2)}{(x-2)}\geq 0\Rightarrow$　$\dfrac{x+5}{(x-2)}\geq 0$

$\Rightarrow$　$(x-2)(x+5)\geq 0$，但$x\neq 2$　$\Rightarrow$　$x\leq -5$ 或 $x\geq 2$，但$x\neq 2$

得解集合為$\{x\mid x>2$ 或 $x\leq -5\}$

4. (複選)設$f(x)=\dfrac{(x^{15}+1)(x+1)}{(x^5+1)(x^3+1)}$，則

(A) $f(x)$不是多項式　(B) $f(x)=\dfrac{x^{10}-x^5+1}{x^2-x+1}$　(C) $f(x)=\dfrac{x^{12}-x^6+1}{x^4-x^3+x^2-x+1}$

(D) $f(x)=x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1$　(E) $f(x)=x^8+x^7+x^6-x^5-x^4-x^3+x^2+x+1$

【解答】(B)(D)

【詳解】

$$f(x)=\frac{(x^{15}+1)(x+1)}{(x^5+1)(x^3+1)}=\frac{(x^5+1)(x^{10}-x^5+1)(x+1)}{(x^5+1)(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{x^{10}-x^5+1}{x^2-x+1}=x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1$$

$$f(x)=\frac{(x^{15}+1)(x+1)}{(x^5+1)(x^3+1)}=\frac{(x^3+1)(x^{12}-x^9+x^6-x^3+1)(x+1)}{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^3+1)}=\frac{x^{12}-x^9+x^6-x^3+1}{x^4-x^3+x^2-x+1}$$

5. (複選)設$f(x)=x^3-3x^2-4x+12$，$g(x)=x^3-2x^2-9x+18$，$a\in R$，則

(A) $f(-2)\,g(-2)=0$ 且$f(-2)+g(-2)\neq 0$

(B)若$f(a)\,g(a)=0$，$f(a)+g(a)\neq 0$，則$a=-2$ 或 -3

(C)若$f(a)\,g(a)\neq 0$，$f(a)+g(a)=0$，則$a=-\frac{5}{2}$

(D)若 $f(a)\,g(a)=0$，$f(a)+g(a)=0$，則$a=2$ 或 3

(E)若$f(a)\,g(a)\neq 0$，$f(a)+g(a)\neq 0$，則$a\neq\pm 2$，± 3，$-\frac{5}{2}$

【解答】(A)(B)(C)(D)(E)

【詳解】

利用輾轉相除法，得$f(x)$，$g(x)$之 HCF 爲$(x-2)(x-3)$

$\therefore\quad f(x)=(x-2)(x-3)(x+2)$，$g(x)=(x-2)(x-3)(x+3)$

$f(x)+g(x)=(x-2)(x-3)(2x+5)$

(A) $f(-2)\,g(-2)=0$，$f(-2)+g(-2)\neq 0$

(B)若 $f(a)\,g(a)=0$，$f(a)+g(a)\neq 0$，則 $a=-2$ 或 -3

(C)若 $f(a)\,g(a)\neq 0$，$f(a)+g(a)=0$，則 $a=-\frac{5}{2}$

(D)若 $f(a)\,g(a)=0$，$f(a)+g(a)=0$，則 $a=2$ 或 3

(E)若 $f(a)\,g(a)\neq 0$，$f(a)+g(a)\neq 0$，則 $a\neq 2$，-2，3，-3，$-\frac{5}{2}$

6. (複選)設$f(x)=(x^5+2x^4-x^3+2x^2-3x-2)\cdot(3x^6+2x^5+x^4+x^3+2x^2+3x+1)$，則$f(x)$的

(A) x^7係數爲 -2　(B) x^9係數爲 2　(C)各項係數和爲 -13　(D)各奇次項係數和爲 -9

(E)領導係數爲 3

【解答】(A)(B)(C)(D)(E)

【詳解】

(A) x^7係數爲 $2+2-1+4-9=-2$

(B) x^9係數爲 $1+4-3=2$

(C) $f(x)$的各項係數和爲 $=f(1)=(-1)\cdot 13=-13$

(D) $f(x)$的各奇次項係數和爲$\frac{f(1)-f(-1)}{2}=\frac{(-13)-(5)}{2}=-9$

(E) $f(x)$的領導係數 $=3x^{11}$的係數 $=3$

7. (複選)設$x^3+2x^2-1=a(x+1)(x-1)(x-2)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)+d$，則

(A) a，b，c，d皆爲整數　(B) $a+b=5$　(C) $c=4$　(D) $b+d=6$　(E) $c+d=15$

【解答】(A)(B)(D)(E)

【詳解】

$x^3+2x^2-1=a(x+1)(x-1)(x-2)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)+d$

令$x=1$，得 $1+2-1=d\quad\Rightarrow\quad d=2$；令$x=2$，得 $8+8-1=c+d=c+2\quad\Rightarrow\quad c=13$

令$x=-1$，得 $-1+2-1=b(-2)(-3)+(-2)\,c+d\quad\Rightarrow\quad 0=6b-26+2\quad\Rightarrow\quad b=4$

令$x=0$，得 $-1=1\cdot(-1)(-2)\,a+(-1)(-2)b+(-1)\,c+d$

$\Rightarrow\quad -1=2a+8-13+2\quad\Rightarrow\quad a=1$

8. (複選)設a，b，$c\in R$，$a\neq 0$，$f(x)=ax^2+bx+c$且$D=b^2-4ac$，下列敘述何者爲真？

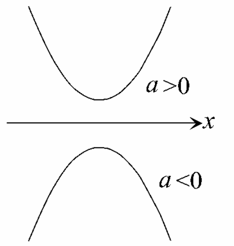
(A)若$D>0$，則$a\,f(x)>0$ 恆成立 (B)若$a>0$ 且$f(x)>0$ 恆成立，則$D>0$

(C)若$f(x)>0$ 的解爲任意實數，則$a>0$ 且$D<0$ (D)若$a\,f(x)\leq 0$ 無解，則$D<0$

(E)若$a<0$ 且$f(x)>0$ 無解，則$D<0$

【解答】(C)(D)(E)

【詳解】



$f(x)=a(x+\dfrac{b}{2a})^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}\quad\Rightarrow\quad a\,f(x)=a^2\,(x+\dfrac{b}{2a})^2-\dfrac{1}{4}(b^2-4ac)\geq\dfrac{-1}{4}(b^2-4ac)=\dfrac{-D}{4}$

$D<0\quad\Leftrightarrow\quad a\,f(x)>0\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}a>0\text{且}f(x)>0,\ \forall x\in R\\ a<0\text{且}f(x)<0,\ \forall x\in R\end{cases}$

$D\leq 0\quad\Leftrightarrow\quad a\,f(x)\geq 0\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}a>0\text{且}f(x)\geq 0,\ \forall x\in R\\ a<0\text{且}f(x)\leq 0,\ \forall x\in R\end{cases}$

又$a\,f(x)\leq 0$ 無解 $\Leftrightarrow$ $a\,f(x)>0$ 的解爲任意實數 $\Leftrightarrow$ $D<0$

故應選(C)(D)(E)

9. (複選)下列選項何者爲真？

(A)方程式 $4x^3+3x^2+2x+1$ 沒有正根 (B)方程式 $4x^3-x^2+2x-1=0$ 沒有負根

(C)方程式$x^3-x+1=0$ 沒有有理根

(D)方程式$x^3+x^2-ix-4=0$ 至少有一個實根，其中$i^2=-1$

【解答】(A)(B)(C)

【詳解】

(A)對。當$x=\alpha>0$ 時，$f(\alpha)=4\alpha^3+3\alpha^2+2\alpha+1>0$，故沒有正根

(B)對。當$x=-\alpha$（$\alpha>0$）時，$f(\alpha)=-4\alpha^3-\alpha^2-2\alpha-1<0$，故沒有負根

(C)對。$f(x)=x^3-x+1=0$ 之可能有理根爲 ± 1，而$f(1)\neq 0$，$f(-1)\neq 0$，故沒有有理根

(D)錯。若有實根，假設實根爲α（$\alpha\neq 0$），則$\alpha^3+\alpha^2-\alpha i-4=0$，矛盾

（$\because$ $(\alpha^3+\alpha^2-4)-\alpha i\neq 0+0i$）

10. (複選)對於二次函數$f(x)=-x^2+x+3$ 的敘述，下列何者正確？

(A)頂點($\dfrac{1}{2}$，3) (B)對稱軸$x+\dfrac{1}{2}=0$ (C)若$-1\leq x\leq 1$，則$f(x)$之最大值$\dfrac{13}{4}$

(D)若$-2\leq x\leq 0$，則$f(x)$之最大值 3 (E)將$y=-x^2+x+3$ 的圖形水平右移 2 單位，再鉛直下移 1 單位所得的拋物線方程式爲$y=-(x-\dfrac{5}{2})^2+\dfrac{9}{4}$

【解答】(C)(D)(E)

【詳解】

(A)錯。$f(x)=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{13}{4}$ $\Rightarrow$ 頂點爲$(\frac{1}{2}，\frac{13}{4})$

(B)錯。對稱軸：$x-\frac{1}{2}=0$

(C)對。由$x=\frac{1}{2}\in\{x\mid -1\le x\le 1\}$，故最大値爲$\frac{13}{4}$

(D)對。由$x=\frac{1}{2}\notin\{x\mid -2\le x\le 0\}$，故最大値爲$f(0)=3$

(E)對。$y=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{13}{4}$右移 2，下移 1

$\Rightarrow$ $y+1=-[(x-2)-\frac{1}{2}]^2+\frac{13}{4}$得$y=-(x-\frac{5}{2})^2+\frac{9}{4}$

二、填充題(每題 0 分)

1. 方程式 $4x^4-8x^3+15x^2-24x+9=0$ 的根爲__________。

【解答】$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$，$\pm\sqrt{3}i$

【詳解】

設 $f(x)=4x^4-8x^3+15x^2-24x+9$，$\because$ $f(x)$係數「正負相間」 $\therefore$ $f(x)=0$ 無負根

利用有理根檢查法，$f(x)=0$ 的有理根可能是 1，3，9，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{9}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$或$\frac{9}{4}$

$\because$ $f(\frac{1}{2})=0$，$f(\frac{3}{2})=0$ $\therefore$ $f(x)=(2x-1)(2x-3)(x^2+3)$

$\therefore$ $f(x)=0$ 的根爲$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$或$\pm\sqrt{3}i$

2.設$f(x)$以$ax+b$除之，商爲$q(x)$，餘式爲r，則$af(x)$以$x+\frac{b}{a}$除之，得到商式爲__________，且餘式爲__________。

【解答】$a^2q(x)$，ar

【詳解】

已知$f(x)=(ax+b)\,q(x)+r$，$a\,f(x)=a\,(ax+b)\,q(x)+ar=(x+\frac{b}{a})(a^2q(x))+ar$

$\Rightarrow$ 商式爲$a^2q(x)$，餘式爲ar

3. 設多項式$f(x)$除以$x-1$，x^2-2x+3 之餘式爲 2，$4x+6$，則$f(x)$除以$(x-1)(x^2-2x+3)$的餘式爲__________。

【解答】$-4x^2+12x-6$

【詳解】多項式$f(x)$除以$x-1$ 餘式爲 2 $\Rightarrow$ $f(1)=2$

$f(x)=(x-1)(x^2-2x+3)\,h(x)+a(x^2-2x+3)+4x+6$

$f(1)=2a+10=2$ $\Rightarrow$ $a=-4$，$\therefore$ 餘式爲 $-4x^2+12x-6$

4.設$\deg f(x)=3$，若$f(2)=f(-1)=f(4)=3$，$f(1)=-9$，則$f(0)=$__________。

【解答】-13

【詳解】

$\deg f(x)=3$，$f(2)=f(-1)=f(4)=3$ $\Rightarrow$ $f(x)=a(x-2)(x+1)(x-4)+3$

$\Rightarrow$ $f(1)=a(-1)(2)(-3)+3=-9$ $\Rightarrow$ $a=-2$ $\Rightarrow$ $f(x)=-2(x-2)(x+1)(x-4)+3$

$\therefore\quad f(0)=-2(-2)(1)(-4)+3=-13$

5.設多項式$f(x)=(a-2)x^2+(b+3)x+c$且$f(-1)=f(\sqrt{2})=f(\sqrt{3})=1$，則$a+b+c$之值爲____。

【解答】0

【詳解】

$\because\quad f(-1)=f(\sqrt{2})=f(\sqrt{3})=1$，且 $\deg f(x)\le 2$

$\therefore\quad f(x)=1\Rightarrow a-2=0$，$b+3=0$，$c=1\quad\Rightarrow a=2$，$b=-3$，$c=1\quad\Rightarrow a+b+c=0$

6.若x^3+3x^2+mx+2 可被x^2+nx+1 整除，則$(m，n)=$__________。

【解答】(3，1)

【詳解】

$$\begin{array}{r|llll} & 1 & & & \\ \hline 1+n+1 & 1+ & 3+ & m+2 & \\ & 1+ & n+ & 1 & \\ \hline & & (3-n)+ & (m-1)+ & 2 \end{array}$$

$\because$ 整除 $\therefore\quad \dfrac{3-n}{1}=\dfrac{m-1}{n}=\dfrac{2}{1}$

則$\begin{cases}\dfrac{3-n}{1}=\dfrac{2}{1}\\ \dfrac{m-1}{n}=\dfrac{2}{1}\end{cases}$得$\begin{cases}m=3\\ n=1\end{cases}$，故數對$(m，n)=(3，1)$

7.以x^2+2x+4 除$(x^2+3x+2)^4$之餘式爲__________。

【解答】$-72x-144$

【詳解】

令$p=x^2+2x+4\quad\Rightarrow\quad x^2+3x+2=p+x-2$

$(x^2+3x+2)^4=[p+(x-2)]^4$

$=C_0^4p^4+C_1^4p^3(x-2)+C_2^4p^2(x-2)^2+C_3^4p(x-2)^3+C_4^4(x-2)^4$

$=p[p^3+4p^2(x-2)+6p(x-2)^2+4(x-2)^3]+x^4-8x^3+24x^2-32x+16$

$x^4-8x^3+24x^2-32x+16=(x^2+2x+4)(x^2-10x+40)+(-72x-144)$

所求餘式爲 $-72x-144$

8.化簡 $7^6-6(7^5)-8(7^4)+10(7^3)-25(7^2)+30(7)+5=$__________。

【解答】19

【詳解】

設$f(x)=x^6-6x^5-8x^4+10x^3-25x^2+30x+5$

$\therefore\quad 7^6-6(7^5)-8(7^4)+10(7^3)-25(7^2)+30(7)+5=f(7)=x-7$ 除$f(x)$之餘式

$\therefore$ 原式 $=f(7)=19$

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} 1 & -6 & -8 & +10 & -25 & +30 & +5 & 7 \\ & +7 & +7 & -7 & +21 & -28 & +14 & \\ \hline 1 & +1 & -1 & +3 & -4 & +2 & +\underline{19} & \end{array}$$

9.設二多項式$f(x)$，$g(x)$其次數均大於 2，已知$f(x)$與$g(x)$除以x^2-x-1 之餘式分別爲 $2x+1$ 與$x-3$，則

(1) $2f(x)-3g(x)$除以x^2-x-1 之餘式爲__________。

(2) $f(x)\cdot g(x)$除以x^2-x-1之餘式爲__________。

【解答】 (1) $x+11$ (2) $-3x-1$

【詳解】

由除法定理，令$f(x)=(x^2-x-1)\,q_1(x)+2x+1$，$g(x)=(x^2-x-1)\,q_2(x)+x-3$

(1) $2f(x)-3g(x)=[\,2(x^2-x-1)\,q_1(x)+4x+2]-[\,3(x^2-x-1)\,q_2(x)+3x-9]$

$=(x^2-x-1)\,[\,2q_1(x)-3q_2(x)\,]+x+11$

$\therefore$ $2f(x)-3g(x)$除以x^2-x-1的餘式爲$x+11$

(2) $f(x)\,g(x)=[(x^2-x-1)\,q_1(x)+2x+1]\,[(x^2-x-1)\,q_2(x)+x-3]$

$=(x^2-x-1)^2\,q_1(x)\,q_2(x)+(x^2-x-1)(x-3)\,q_1(x)+(x^2-x-1)(2x+1)\,q_2(x)+(2x+1)(x-3)$

$=(x^2-x-1)\,Q(x)+(2x+1)(x-3)=(x^2-x-1)\,Q(x)+2(x^2-x-1)-3x-1$

$=(x^2-x-1)\,[Q(x)+2\,]-3x-1$

$\therefore$ $f(x)\,g(x)$除以x^2-x-1的餘式爲$-3x-1$

10.多項式$f(x)$滿足$8f(x)-5x^6f(x^3)-2f(x^2)+18=0$，則$f(x)$的常數項爲__________。

【解答】-3

【詳解】

$f(x)$的常數項爲$f(0)$，由$8f(x)-5x^6f(x^3)-2f(x^2)+18=0$，令$x=0$

$\therefore$ $8f(0)-0-2f(0)+18=0$ $\therefore$ $f(0)=-3$

11.設$f(x)=81x^4-63x^2+39x+5$，則$f(0.334)$之近似值至小數點第三位爲__________。

【解答】12.006

【詳解】$0.334\times3=1.002$

$$
\begin{array}{r|rrrrr|l}
 & 81 & +0 & -63 & +39 & +5 & \frac{1}{3} \\
 & & +27 & +9 & -18 & +7 & \\
\hline
3 & 81 & +27 & -54 & +21 & ,\ +12 & \\
\hline
 & 27 & +9 & -18 & +7 & & \\
 & & +9 & +6 & -4 & & \\
\hline
3 & 27 & +18 & -12 & ,\ +3 & & \\
\hline
 & 9 & +6 & -4 & & & \\
 & & +3 & +3 & & & \\
\hline
3 & 9 & +9 & ,\ -1 & & & \\
\hline
 & 3 & +3 & & & & \\
 & & +1 & & & & \\
\hline
3 & 3 & ,\ +4 & & & & \\
\hline
 & 1 & & & & &
\end{array}
$$

$f(x)=(3x-1)^4+4(3x-1)^3-(3x-1)^2+3(3x-1)+12$

$\therefore$ $f(0.334)=(0.002)^4+4(0.002)^3-(0.002)^2+3(0.002)+12\fallingdotseq 12.006$

12.已知多項式$f(x)=(\sum_{n=1}^{30}x^{n-1})(x-1)$，則

(1)展開式中係數和是__________。 (2) $f(i)=$ __________。

【解答】(1) 0 (2) -2

【詳解】

(1)係數和 $=f(1)=(\sum_{n=1}^{30}1^{n-1})(1-1)=0$

(2) $f(i)=(\sum_{n=1}^{30} i^{n-1})(i-1)=(1+i+i^2+\cdots+i^{29})(i-1)$

$=[\dfrac{1\cdot(1-i^{30})}{1-i}]\cdot(i-1)=[\dfrac{1-(i^4)^7\cdot i^2}{(1-i)}][-(1-i)]=-[1-(-1)]=-2$

13.設$y=x^2-2ax+a$的圖形恆在$y=-2$的圖形上方，則實數a的範圍爲__________。

【解答】$-1<a<2$

【詳解】

$x^2-2ax+a-(-2)$恆正

$\therefore\quad D=a^2-(a+2)=(a-2)(a+1)<0\quad\therefore\quad -1<a<2$

14.多項式$x^5-2x^3-2x^2-3x-2$，x^4-2x^3-2x-1的LCM爲__________。

【解答】$(x^2+1)(x^3-3x-2)(x^2-2x-1)$

【詳解】

用輾轉相除法，求得$\text{HCF}=x^2+1$，$\therefore$ 取$\text{LCM}=\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{\text{HCF}}$

$=\dfrac{(x^2+1)(x^3-3x-2)(x^2+1)(x^2-2x-1)}{x^2+1}=(x^2+1)(x^3-3x-2)(x^2-2x-1)$

15.方程式$6(x+\dfrac{1}{x})^2+7(x-\dfrac{1}{x})-48=0$的解爲__________。

【解答】-3，$\dfrac{-1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，2

【詳解】

$6(x+\dfrac{1}{x})^2+7(x-\dfrac{1}{x})-48=0$，令$t=x-\dfrac{1}{x}$，則$t^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2=(x+\dfrac{1}{x})^2-4$

$\therefore$ 原式化爲$6(t^2+4)+7t-48=0$

$\Rightarrow\quad 6t^2+7t-24=0\quad\Rightarrow\quad(2t-3)(3t+8)=0\quad\Rightarrow\quad t=\dfrac{3}{2}$，$-\dfrac{8}{3}$

若$t=\dfrac{3}{2}$，則$x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}\quad\Rightarrow\quad 2x^2-3x-2=0\quad\Rightarrow\quad x=2$，$\dfrac{-1}{2}$

若$t=-\dfrac{8}{3}$，則$x-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{8}{3}\quad\Rightarrow\quad 3x^2+8x-3=0\quad\Rightarrow\quad x=-3$，$\dfrac{1}{3}$

故解得$x=-3$，$\dfrac{-1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，2

16.設a，$b\in R$，$a\neq 0$，若方程式$ax^3+x^2+bx+1=0$的一根爲$2+\sqrt{2}\,i$，則$a+b$之值爲____。

【解答】$-\dfrac{17}{8}$

【詳解】

令$x=2+\sqrt{2}\,i\quad\therefore\quad x-2=\sqrt{2}\,i$，$(x-2)^2=(\sqrt{2}\,i)^2\quad\therefore\quad x^2-4x+6=0$

令$ax^3+x^2+bx+1=(x^2-4x+6)(ax+\dfrac{1}{6})$（利用$x^3$及常數項兩邊相同）

比較x^2係數：$1=\dfrac{1}{6}-4a$；x係數：$b=-\dfrac{2}{3}+6a$

$\therefore\quad a=-\dfrac{5}{24}$，$b=-\dfrac{23}{12}\quad\therefore\quad a+b=-\dfrac{51}{24}=-\dfrac{17}{8}$

17.設a，$b \in Z$，方程式$x^4+3x^3+ax^2+bx+10=0$有四個相異有理根，則其最大根為______。

【解答】2

【詳解】

設有理根為$\dfrac{q}{p}$，$(p，q)=1$，則$p\mid 1$，$q\mid 10$，所以有理根必為整數，設四根α，β，γ，δ

則$x^4+3x^3+ax^2+bx+10=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$ $\therefore \alpha+\beta+\gamma+\delta=-3$，$\alpha\beta\gamma\delta=10$

$\Rightarrow$ 四根為1，-1，2，-5，故最大根為2

18.若整係數三次方程式$x^3+ax^2+bx+c=0$之三根為a，b，c，且$abc\neq 0$，則三元有序數對$(a，b，c)=$__________。

【解答】$(1，-1，-1)$

【詳解】

$x^3+ax^2+bx+c=0$之三根為a，b，c，其中a，b，$c\in Z$且$abc\neq 0$

則$\begin{cases} a+b+c=-a\cdots\cdots ① \\ ab+bc+ca=b\cdots\cdots ② \\ abc=-c\cdots\cdots ③ \end{cases}$

由③ $\Rightarrow$ $ab=-1$，則$a=1$，$b=-1$或$a=-1$，$b=1$

(i)若$a=1$，$b=-1$代入① $\Rightarrow$ $c=-1$，代入②合

(ii)若$a=-1$，$b=1$代入① $\Rightarrow$ $c=1$，代入②不合

故序對$(a，b，c)=(1，-1，-1)$

19.已知二多項式x^3+ax^2+2x+4與$2x^3+x^2+a^2x+2$有一個二次公因式，則a的值為____。

【解答】2

【詳解】

設$f(x)=x^3+ax^2+2x+4$，$g(x)=2x^3+x^2+a^2x+2$

已知$f(x)$與$g(x)$有一個二次公因式，設為$d(x)$，則

$d(x)\mid 2f(x)-g(x)$ $\Rightarrow$ $d(x)\mid (2a-1)x^2+(4-a^2)x+6\cdots\cdots ①$

又$d(x)\mid f(x)-2g(x)$ $\Rightarrow$ $d(x)\mid -x[3x^2+(2-a)x+2(a^2-1)]$

因x非$f(x)$與$g(x)$的因式，所以$d(x)\mid 3x^2+(2-a)x+2(a^2-1)\cdots\cdots ②$

由①，②知$\dfrac{2a-1}{3}=\dfrac{4-a^2}{2-a}=\dfrac{6}{2(a^2-1)}$

若$a=2$，則$\dfrac{2a-1}{3}=1$，$\dfrac{6}{2(a^2-1)}=\dfrac{3}{3}=1$ $\therefore$ $a=2$為其解

若$a\neq 2$，則$\dfrac{2a-1}{3}=\dfrac{2+a}{1}=\dfrac{3}{a^2-1}$ $\Rightarrow$ $2a-1=6+3a$ $\Rightarrow$ $a=-7$

但 $-5=\dfrac{2-7}{1}\neq\dfrac{3}{(-7)^2-1}=\dfrac{1}{16}$ $\therefore$ $a=-7$不合

20.兩多項式$g(x)=6x^4+7x^3+6x^2-1$與$h(x)=x^4+x^2+1$，

(1)試問$g(x)=0$在下列哪兩個連續整數之間有實根__________？

(A) -2與 -1 (B) -1與0 (C) 0與1 (D) 1與2（複選）

(2) $g(x)$與$h(x)$的最大公因式$d(x)$為__________。

(3)承(2)，$g(x)$與$h(x)$的最低公倍式為$\ell(x)$，若$\dfrac{\ell(x)}{d(x)} = 6x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$，則$c =$______。

【解答】(1)(B)(C)　(2) $x^2 + x + 1$　(3) 4

【詳解】

(1)

	$g(x)$	x
$6+\ 7+\ 6+\ 0$	-1	0
$6+13+19+19$	$+18$	1

（算到同號停止）

	$g(x)$	x
$6+7+\ 6+\ 0$	-1	0
$6+1+\ 5-\ 5$	$+4$	-1
$6-5+16-32$	$+63$	-2

（算到正負相間停止）

由上之計算可知$g(x) = 0$在 0 與 1 之間及 -1 與 0 之間有實根，　故選(B)(C)

(2)

$$\begin{array}{r|r|r|l}
6 & 6+7+6+0-1 & 1+0+1+0+1 & 1 \\
 & 6+0+6+0+6 & 1+0+0-1 & \\ \cline{2-3}
 & 7\quad 7+0+0-7 & 1+1+1 & \\
1-1 & 1+0+0-1 & & \\
 & 1+1+1 & & \\ \cline{2-2}
 & -1-1-1 & & \\
 & -1-1-1 & & \\ \cline{2-2}
 & 0 & &
\end{array}$$

由上之輾轉相除法計算可得$d(x) = x^2 + x + 1$

(3)$\begin{cases} g(x) = (x^2 + x + 1)(6x^2 + x - 1) \\ h(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \end{cases}$　$\Rightarrow$　$\ell(x) = (x^2 + x + 1)\,(6x^2 + x - 1)\,(x^2 - x + 1)$

則$\dfrac{\ell(x)}{d(x)} = \dfrac{\ell(x)}{x^2 + x + 1} = (6x^2 + x - 1)\,(x^2 - x + 1) = 6x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

故$c = 6 - 1 - 1 = 4$

21.將$y = x^2 + 2x + 2$之圖形向右平移 2 單位，再向下平移 3 單位，若所得圖形之方程式為$y = ax^2 + bx + c$，則$c =$__________。

【解答】-1

【詳解】

$y = x^2 + 2x + 2$ 向右平移 2 單位，向下平移 3 單位

$\Rightarrow$　$y + 3 = (x-2)^2 + 2(x-2) + 2$　$\Rightarrow$　$y = x^2 - 2x - 1$　$\Rightarrow$　$c = -1$

22.設 1 為$x^4 - 5x^3 + ax^2 + bx + c = 0$之三重根，則另一根為__________，$b + c =$__________。

【解答】2；-5

【詳解】

已知 1 為$x^4 - 5x^3 + ax^2 + bx + c = 0$之三重根，設另一根為$\alpha$

由根與係數關係，四根和為$1 + 1 + 1 + \alpha = 5$　$\Rightarrow$　$\alpha = 2$

$x^4-5x^3+ax^2+bx+c=(x-1)^3(x-2)=(x^3-3x^2+3x-1)(x-2)=x^4-5x^3+9x^2-7x+2$

$\therefore\quad b+c=-7+2=-5$

23.已知二次函數$y=ax^2+bx+\dfrac{1}{a}$在$x=-2$時有最大值 3，則實數數對$(a，b)=$__________。

【解答】$(-1，-4)$

【詳解】

二次函數$y=f(x)=ax^2+bx+\dfrac{1}{a}$在$x=-2$時有最大值 3

$\therefore\quad y=a(x+2)^2+3$ 且$a<0$（有最大值 $\Rightarrow$ 開口向下 $\Rightarrow$ $a<0$）

$\therefore\quad y=ax^2+4ax+4a+3$

比較係數，得 $4a=b$……①；$4a+3=\dfrac{1}{a}$……②

由②得 $4a^2+3a-1=0$ $\Rightarrow(a+1)(4a-1)=0$ $\Rightarrow a=-1$ 或$a=\dfrac{1}{4}$（不合 $\because$ $a<0$）

代入①得$a=-1$ $\Rightarrow$ $b=-4$，所求a，b之值爲$(a，b)=(-1，-4)$

24.設$f(x)$爲實係數多項式，已知$f(2-3i)=21-9i$，則將$f(x)$除以$x^2-4x+13$得餘式爲_____。

【解答】$3x+15$

【詳解】

$g(x)=x^2-4x+13=(x-2+3i)(x-2-3i)$，

$f(x)=(x^2-4x+13)\,h(x)+a(x-2+3i)+21-9i$

$\because$ $f(x)$，$g(x)$爲實係數多項式 $\therefore$ $3ai-9i=0$ $\Rightarrow$ $a=3$ $\therefore$餘式爲 $3x+15$

25.將拋物線$y=(x-1)^2$沿直線$y=x$向東北方向移動，在第一次經過點$A(4，9)$時，所得新拋物線方程式爲__________。

【解答】$y=(x-6)^2+5$

【詳解】

設$y=(x-1)^2$向右平移k單位，再向上平移k單位時第一次經過$A(4，9)$

即$y=(x-1-k)^2+k$過$A(4，9)$，k取最小正值

$\therefore\quad 9=(4-1-k)^2+k$ $\quad\therefore\quad k=0$ 或 5，取最小正值$k=5$

$\therefore\quad y=(x-1-5)^2+5$，即$y=(x-6)^2+5$ 爲所求

26.設$f(x)=2|x+3|-5$，

(1) x 爲任意實數時，$f(x)$的最小值爲__________。

(2) $-1\le x\le 2$ 時，$f(x)$的最小值爲__________，最大值爲__________。

【解答】(1) -5 (2)最小值 -1；最大值 5

【詳解】

$f(x)=2|x+3|-5$

(1) x 爲任意實數時，$|x+3|\ge 0$ $\Rightarrow$ $f(x)\ge -5$，最小值 -5，沒有最大值

(2)若 $-1\le x\le 2$，則當 $x=-1$ 時，$f(-1)=2|-1+3|-5=-1$ 爲最小值

當 $x=2$ 時，$f(2)=2|2+3|-5=5$ 爲最大值