<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高三數學平時測驗　　日期：94.09.15</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範
圍</td><td rowspan="2">Book1　2-3,Chap3
直線、數列級數</td><td>班級</td><td>普三　　班</td><td rowspan="2">姓
名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、選擇題(每題 10 分)

1. 下列各無窮級數，何者爲收斂級數？

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}10(-1)^n$　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{50}$　(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4^{n+1}}{9^{n-1}})$　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n^2+n-1}{n^2})$

【解答】(C)

【詳解】

(A)錯。公比 $r=-1$，故發散　(B)錯。公比 $r=1$，故發散

(C)對。$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4^{n+1}}{9^{n-1}})=\sum_{n=1}^{\infty}4^2\cdot(\frac{4}{9})^{n-1}$，公比 $r=\frac{4}{9}$，所以收斂

(D)錯。原式 $=\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})=\sum_{n=1}^{\infty}1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}>\sum_{n=1}^{\infty}1=\infty$，故發散

2. 設 $f(n)=3^{2n+1}+2^{n+2}$，$n\in N$，已知 $f(n)$ 恆爲質數 p 的倍數，$\forall n\in N$，則 $p=$

(A)2　(B)3　(C)5　(D)7　(E)11

【解答】(D)

【詳解】$f(1)=3^3+2^3=35$ 爲 p 的倍數，$f(2)=3^5+2^4=259$ 爲 p 的倍數

$\therefore$ p 爲 35，259 的公因數 $\Leftrightarrow$ $p\mid(35，259)=7$，而 p 爲質數 $\therefore$ $p=7$

3. 級數 $1+\underbrace{2+2}_{2個}+\underbrace{3+3+3}_{3個}+\underbrace{4+4+4+4}_{4個}+\cdots+\underbrace{n+n+\cdots+n}_{n個}+\cdots$，其前 100 項的和爲

(A) 945　(B) 932　(C) 919　(D) 906　(E) 893

【解答】(A)

【詳解】(1)設第 100 項爲 k，則 $1+2+3+4+\cdots+(k-1)<100$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2}(k-1)k<100$ $\Rightarrow$ $k^2-k-200<0$

$\Rightarrow$ $(k-\frac{1+\sqrt{801}}{2})(k-\frac{1-\sqrt{801}}{2})<0$ $\Rightarrow$ $\frac{1-\sqrt{801}}{2}<k<\frac{1+\sqrt{801}}{2}\doteqdot 14.\cdots$

$\therefore$ $k=14$

(2)前 100 項的和爲 $1+\underbrace{2+2}_{2個}+\underbrace{3+3+3}_{3個}+\cdots+\underbrace{13+\cdots+13}_{13個}+\underbrace{14+\cdots+14}_{9個}$

$=1^2+2^2+\cdots+13^2+14\times9=819+126=945$

4. (複選)若 $y^2-axy-3x^2+bx+cy=0$ 表示相交於點 $A(1，-1)$ 之兩直線，$a，b，c\in R$，則

(A)有一直線過原點　(B)有一直線方程式爲 $x+y=0$　(C) $a=2$　(D) $b=4$　(E) $c=4$

【解答】(A)(B)(C)(D)(E)

【詳解】

(A) $\because$ 當 $x=0$，$y=0$ 時，原式成立 $\therefore$ 兩直線中有一直線 L 過原點

(B) L 過原點及 $A(1，-1)$ $\therefore$ L 的方程式爲 $x+y=0$

(C)(D)(E)令$y^2 - axy - 3x^2 + bx + cy = (y + x)(y - 3x + t)$（利用$y^2$係數為 1，$x^2$係數為$-3$）

又兩直線交於$(1，-1)$ $\therefore$ $y - 3x + t = 0$ 過點$(1，-1)$，得$t = 4$

由比較係數得$a = 2$，$b = 4$，$c = 4$

二、填充題(每題 10 分)

1. 假設某鎮每年的人口數逐年成長且成一等比數列，已知此鎮十年前有 25 萬人，現在 30 萬人，那麼二十年後，此鎮人口應有__________萬人。（求到小數點後第一位）

【解答】43.2

【詳解】$a_1 = 25$，$a_2 = 30$ $\Rightarrow$ $r = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{30}{25} = \dfrac{6}{5}$

二十年後為$a_4 = a_1r^3 = 25 \times (\dfrac{6}{5})^3 = \dfrac{216}{5} = 43.2$ 萬人

2. 若等比數列$\{a_n\}$的第四項為 6，第六項為 24，而且數列的每一項都是正數，求這個數列的前 10 項總和為__________。

【解答】$\dfrac{3069}{4}$

【詳解】$\begin{cases} 6 = a_1r^3 & \cdots\cdots① \\ 24 = a_1r^5 & \cdots\cdots② \end{cases}$，$\dfrac{②}{①}$ $\Rightarrow$ $r^2 = 4$，得$r = 2$，-2（不合）

$r = 2$ 代入①，得$a_1 = \dfrac{3}{4}$，所求$= \dfrac{\frac{3}{4}(2^{10} - 1)}{2 - 1} = \dfrac{3069}{4}$

3. 設$< a_1，a_2，70，a_4，a_5，a_6，a_7，a_8，a_9，-7，\cdots >$為一等差數列，求：

(1)第 30 項為__________。

(2)此等差數列前n項總和為S_n，則$n =$__________時，S_n有最大值；又此時總和的最大值為__________。

【解答】(1) -227 (2) 9；432

【詳解】$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d = 70 \\ a_{10} = a_1 + 9d = -7 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $d = -11$，$a_1 = 92$

(1) $a_{30} = 92 - 11 \times 29 = -227$

(2) $S_n = \dfrac{n \times [92 + 92 - 11 \times (n - 1)]}{2} = \dfrac{-11n^2 + 195n}{2} = \dfrac{-11}{2}(n - \dfrac{195}{22})^2 + 432\dfrac{9}{88}$

當$n = 9$ 時，S_n有最大值 432

4. 一等差數列之前 10 項之和為 30，前 30 項之和為 10，則其前 40 項之和為__________。

【解答】-40

【詳解】設前n項之和為S_n，且令$S_{20} = a$，$S_{40} = b$，則S_{10}，$S_{20} - S_{10}$，$S_{30} - S_{20}$，$S_{40} - S_{30}$亦成等差數列，即每 10 項的和一為等差數列。

所以 30，$a - 30$，$10 - a$，$b - 10$ 成等差數列，公差$d = (a - 30) - 30 = a - 60$

則$(b - 10) = (10 - a) + d = (10 - a) + (a - 60) = -50$，得$S_{40} = b = -40$

5. 設$<a_n>$是一個等比數列，若$a_1+a_2+a_3=18$，$a_2+a_3+a_4=-9$，則此數列公比為______；而首n項和$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=$__________。

【解答】$r=-\frac{1}{2}$；$16\cdot[1-(-\frac{1}{2})^n]$

【詳解】設$<a_n>$的公比為r，則$a_2=a_1r$，$a_3=a_1r^2$，$a_4=a_1r^3$

因為$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=18\\a_2+a_3+a_4=-9\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}a_1(1+r+r^2)=18 & \cdots\cdots①\\a_1r(1+r+r^2)=-9 & \cdots\cdots②\end{cases}$

$\frac{②}{①}$，則得公比$r=-\frac{1}{2}$，將之代入①得$a_1=24$

因此，由等比數列求和公式可得

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}=\frac{24[1-(-\frac{1}{2})^n]}{1-(-\frac{1}{2})}=16\cdot[1-(-\frac{1}{2})^n]$$

6. $<a_n>$為一數列，已知$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=n^2+3$，$\forall n\in N$，則$a_n=$__________。

【解答】$\begin{cases}4，n=1\\2n-1，n\geq 2\end{cases}$

【詳解】

$\because\ S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n=n^2+3$，$n\geq 1$

$-)\ S_{n-1}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}=(n-1)^2+3$，$n\geq 2$

$a_n=2n-1$，$n\geq 2$

而$a_1=S_1=4$

7. 一個球從 81 公尺自由落下，每次著地後又跳回原高度的$\frac{1}{3}$再落下，當它第五次著地時，共經過__________公尺；直至靜止共經過__________公尺

【解答】161，162

【詳解】球最先落下經過 81 公尺，因每次反彈的高度為前高度的$\frac{1}{3}$

(1)所求距離和$=81+2\times 81\times\frac{1}{3}+2\times 81\times(\frac{1}{3})^2+2\times 81\times(\frac{1}{3})^3+2\times 81\times(\frac{1}{3})^4$

$=81+162\,[\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^3+(\frac{1}{3})^4]=81+162\times\frac{40}{81}=81+80=161$

(2)所求無窮窮比級數距離和$81+2\times(\frac{81\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}})=162$

8. 已知$<a_n>$，$<a_n'>$均為等差數列，且其第n項之比$a_n：a_n'=(n+2)：(2n+1)$，設其前n項和分別為S_n與S_n'，則$S_9：S_9'=$__________。

【解答】7：11

【詳解】設兩等差數列$<a_n>$，$<a_n'>$ $\Rightarrow\frac{S_9}{S_9'}=\frac{9a_5}{9a_5'}=\frac{a_5}{a_5'}=\frac{5+2}{2\times 5+1}=\frac{7}{11}$

9. 集合序列{1}，{2，3}，{4，5，6}，{7，8，9，10}，⋯，若S_n表第n個集合內之元素各數值總和，求$S_{21}=$__________。

【解答】4641

【詳解】$1+2+3+\cdots+20=\dfrac{(1+20)\times 20}{2}=210$，$1+2+3+\cdots+21=\dfrac{(1+21)\times 21}{2}=231$

$$\therefore\quad S_{21}=211+212+\cdots+231=\frac{(211+231)\times 21}{2}=4641$$

10.設$< z_n >$是一複數等比數列，$z_1=1-4i$且$z_2=5-3i$，若複數等比數列$< z_n >$的前 6 項總和為$a+bi$，a，$b\in R$，則$a+b$之值為__________。

【解答】29

【詳解】公比$r=\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{5-3i}{1-4i}=1+i$

$$S_6=\frac{(1-4i)[(1+i)^6-1]}{(1+i)-1}=\frac{(1-4i)\{[(1+i)^2]^3-1\}}{i}$$

$$=\frac{(1-4i)[(2i)^3-1]}{i}=\frac{(1-4i)(-8i-1)}{i}=\frac{-33-4i}{i}=-4+33i，$$

所以$a+b=(-4)+33=29$

11.L為過$A(2，1)$且與$L_1：2x-y=0$，$L_2：2x+y=0$ 各交於P，Q之直線，若A為$\overline{PQ}$的中點，則L之方程式為__________。

【解答】$y=8x-15$

【詳解】令$P(a，2a)$，則由中點公式得$Q(4-a，2-2a)$，又Q在L_2上

$$\therefore\quad 2(4-a)+(2-2a)=0\quad\Rightarrow\quad a=\frac{5}{2}\quad\Rightarrow P(\frac{5}{2}，5)，Q(\frac{3}{2}，-3)，則L：y=8x-15$$

12.設L_1：$6x+(2a-1)y=8$，L_2：$(a+2)x+(a+3)y=-3$，a是整數。若$L_1\perp L_2$，則$a=$______。

【解答】-1

【詳解】若$L_1\perp L_2$，則$m_1m_2=-1$，即$(\dfrac{-6}{2a-1})(\dfrac{-a-2}{a+3})=-1$

$\Rightarrow 2a^2+11a+9=0\quad\Rightarrow(a+1)(2a+9)=0$，得$a=-1$ 或$\dfrac{-9}{2}$（不合），故$a=-1$

13.已知$A(1，2)$與$B(3，4)$為兩定點，$P(x，y)$為直線$x+2y=3$ 上一點，問$\overline{PA}=\overline{PB}$時，$P$點的坐標為__________。

【解答】$(7，-2)$

【詳解】設$P(3-2y，y)\quad\Rightarrow\quad\sqrt{(3-2y-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(3-2y-3)^2+(y-4)^2}$

$\Rightarrow 4y^2-8y+4+y^2-4y+4=4y^2+y^2-8y+16\quad\Rightarrow y=-2$，$P$點坐標為$(7，-2)$

14.已知點$A(4，-3)$及直線L：$2x+y+5=0$，Q為A在直線L上的投影（過A作L之垂線的垂足），A'為A關於L的對稱點，則(1)Q點坐標為________。 (2)A'點坐標為________。

【解答】(1) $(0，-5)$ (2) $(-4，-7)$

【詳解】

$(4，-3)$代入 $2x+y+5 \Rightarrow v=8-3+5=10$

(1) 投影點 Q 點坐標爲 $(4-\dfrac{1\times2\times10}{2^2+1^2},-3-\dfrac{1\times1\times10}{2^2+1^2})=(0,-5)$

(2) 投影點 A' 點坐標爲 $(4-\dfrac{2\times2\times10}{2^2+1^2},-3-\dfrac{2\times1\times10}{2^2+1^2})=(-4,-7)$

15.已知三點$A(2，1)$，$B(4，3)$，$C(-3，4)$及直線$L：x-2y+5=0$，求

(1)在直線L上找一點P，使$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$之值最小，則$P$之坐標爲__________。

(2)在直線L上找一點Q，使$\overline{BQ}+\overline{CQ}$之值最小，則$Q$之坐標爲__________。

【解答】(1) $(\dfrac{11}{5}，\dfrac{18}{5})$　(2) $(\dfrac{5}{3}，\dfrac{10}{3})$

【詳解】

(1) $(2-2+5)(4-2\times3+5)>0$，表A，B在L之同側

$\because\ P\in L：x-2y+5=0\quad\therefore\ P(2t-5，t)$

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=[(2t-7)^2+(t-1)^2]+[(2t-9)^2+(t-3)^2]$

$=10t^2-72t+140=10(t-\dfrac{18}{5})^2+\dfrac{52}{5}$

當$t=\dfrac{18}{5}$時，$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$有最小值$\dfrac{52}{5}$，此時$P$之坐標爲$(\dfrac{11}{5}，\dfrac{18}{5})$

(2) $(4-2\times3+5)(-3-2\times4+5)<0$，表$B$，$C$在$L$之異側

當Q爲$\overleftrightarrow{BC}$及L之交點時，$\overline{BQ}+\overline{CQ}$最小，解$\begin{cases}L：x-2y+5=0\\ \overleftrightarrow{BC}：y-3=\dfrac{-1}{7}(x-4)\end{cases}$，得$Q(\dfrac{5}{3}，\dfrac{10}{3})$

16.直線$L_1：31x-17y+1=0$，$L_2：19x+13y-2=0$ 相交於點A，而B是原點，則$\overleftrightarrow{AB}$的方程式爲__________。

【解答】$27x-7y=0$

【詳解】設$\overleftrightarrow{AB}：(19x+13y-2)+t(31x-17y+1)=0$ 爲所求

$\because$ 過 $B(0，0)\quad\therefore\ -2+t=0\quad\therefore\ t=2\quad\therefore\ \overleftrightarrow{AB}：27x-7y=0$

17.設$a，b，c\in N$，$1<a<b<c<9$，且$<0.\overline{a}，0.0\overline{b}，0.00\overline{c}，\cdots>$成等比數列，則

(1) $(a，b，c)=$__________。

(2)該數列之第四項爲__________。（寫成循環小數）

【解答】(1) $(2，4，8)$　(2) $0.001\overline{7}$

【詳解】(1) $0.\overline{a}，0.0\overline{b}，0.00\overline{c}$成等比，即$\dfrac{a}{9}，\dfrac{b}{90}，\dfrac{c}{900}$成等比

則$\dfrac{a}{9}\times\dfrac{c}{900}=(\dfrac{b}{90})^2\ \Rightarrow\ b^2=ac$，又 $1<a<b<c<9$，則$(a，b，c)=(2，4，8)$

(2)數列爲$<\dfrac{2}{9}，\dfrac{4}{90}，\dfrac{8}{900}，\cdots>$，首項$a_1=\dfrac{2}{9}$，公比$r=\dfrac{\frac{4}{90}}{\frac{2}{9}}=\dfrac{1}{5}$

故第四項$a_4=a_1r^3=\frac{2}{9}\times\frac{1}{125}=\frac{16}{9000}=0.001\overline{7}$

18.已知$A(2，-2)$，$B(1，1)$，$C(3，5)$，

(1)過A，B兩點之直線方程式為__________。

(2)過C點且x截距與y截距的絕對值相等，而不過原點之直線方程式為__________。

【解答】(1) $3x+y-4=0$　(2) $\frac{x}{-2}+\frac{y}{2}=1$ 或 $\frac{x}{8}+\frac{y}{8}=1$

【詳解】$A(2，-2)$，$B(1，1)$，$C(3，5)$

(1)過A，B兩點之直線方程式為$y-1=\frac{-2-1}{2-1}(x-1)$，即 $3x+y-4=0$

(2)設此直線方程式為$y-5=m(x-3)$　$\Rightarrow mx-y=3m-5$　$\Rightarrow\frac{x}{\frac{3m-5}{m}}+\frac{y}{-(3m-5)}=1$

$\therefore\ \left|\frac{3m-5}{m}\right|=|-(3m-5)|$　$\Rightarrow$　$\left(\frac{3m-5}{m}\right)^2=(3m-5)^2$

$\Rightarrow$　$(3m-5)^2(m^2-1)=0$　$\Rightarrow$　$(3m-5)^2(m+1)(m-1)=0$　$\Rightarrow$　$m=\frac{5}{3}$，1，-1

當$m=\frac{5}{3}$時，直線為$y=\frac{5}{3}x$過原點不合

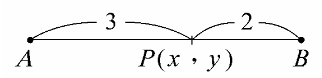
當$m=1$ 時，直線為$\frac{x}{-2}+\frac{y}{2}=1$；當$m=-1$ 時，直線為$\frac{x}{8}+\frac{y}{8}=1$

19.坐標平面上，若$A(-2，1)$，$B(8，6)$，P為直線AB上的點，且滿足$\overline{AP}:\overline{PB}=3:2$，求$P$的坐標為__________。

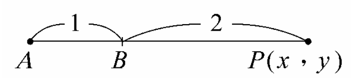
【解答】(4，4)或(28，16)

【詳解】

(i)$\begin{cases}x=\frac{(-2)\times2+8\times3}{3+2}=4\\ y=\frac{1\times2+6\times3}{3+2}=4\end{cases}$，得 $P(x，y)=(4，4)$

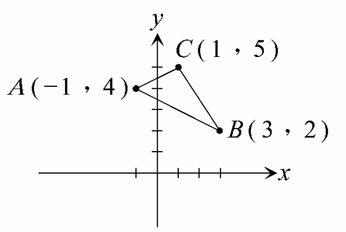


(ii)$\begin{cases}8=\frac{(-2)\times2+x\times1}{1+2}\\ 6=\frac{1\times2+y\times1}{1+2}\end{cases}$，得 $P(x，y)=(28，16)$



20.設 $A(-1，4)$，$B(3，2)$，$C(1，5)$，求$\triangle ABC$ 的重心座標__________，外心座標__________與垂心座標__________。

【解答】重心$(1，\frac{11}{3})$，外心$(\frac{7}{8}，\frac{11}{4})$，垂心$(\frac{5}{4}，\frac{11}{2})$



【詳解】

(1)重心 $=\left(\frac{-1+3+1}{3}，\frac{4+2+5}{3}\right)=\left(1，\frac{11}{3}\right)$

(2)設L_1，L_2分別為$\overline{AB}$，$\overline{BC}$邊上之中垂線

則$\begin{cases} L_1：y-3=2(x-1) \\ L_2：y-\dfrac{7}{2}=\dfrac{2}{3}(x-2) \end{cases}$，解$L_1$，$L_2$之交點，得外心($\dfrac{7}{8}$，$\dfrac{11}{4}$)

(3)設ℓ_1，ℓ_2分別為$\overline{AB}$，$\overline{BC}$邊上之高

則$\begin{cases} L_1：y-5=2(x-1) \\ L_2：y-4=\dfrac{2}{3}(x+1) \end{cases}$，解$\ell_1$，$\ell_2$之交點，得垂心($\dfrac{5}{4}$，$\dfrac{11}{2}$)

21.若直線$y=mx+3$與圖形 $|x|+|y|=2$ 相交，則m的範圍是__________。

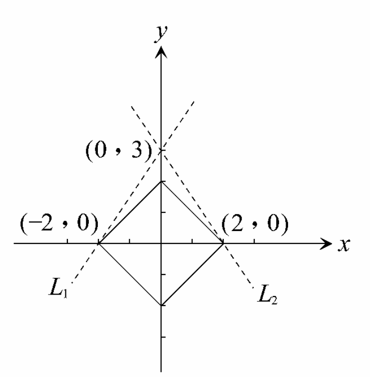
【解答】$m\geq\dfrac{3}{2}$ 或 $m\leq-\dfrac{3}{2}$

【詳解】

$y=mx+3 \quad \Rightarrow \quad y-3=m(x-0)$表恆過(0，3)之直線族，

$|x|+|y|=2$ 表中心為(0，0)之菱形，

由圖可知L_1之斜率為 $-\dfrac{3}{2}$，L_2之斜率為$\dfrac{3}{2}$，故$m\geq\dfrac{3}{2}$或$m\leq-\dfrac{3}{2}$



22.直線L過定點(－3，4)，若與坐標軸在第二象限所圍三角形面積最小，則L之方程式為__，最小面積為__________。

【解答】$-\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{8}=1$；24

【詳解】設直線 L 之方程式為$\dfrac{x}{-a}+\dfrac{y}{b}=1$，$a>0$，$b>0$，

與坐標軸在第二象限所圍三角形面積為$\dfrac{1}{2}|ab|=\dfrac{1}{2}ab$

$\because$ 過(－3，4) $\therefore$ $\dfrac{-3}{-a}+\dfrac{4}{b}=1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{3}{a}+\dfrac{4}{b}=1$

由 $A.M.\geq G.M.$(算術平均數大於或等於幾何平均數)

$\Rightarrow \dfrac{\frac{3}{a}+\frac{4}{b}}{2}\geq\sqrt{\dfrac{3}{a}\cdot\dfrac{4}{b}} \Rightarrow \dfrac{3}{a}+\dfrac{4}{b}\geq2\sqrt{\dfrac{3}{a}\cdot\dfrac{4}{b}} \Rightarrow \quad 1\geq2\sqrt{\dfrac{12}{ab}} \quad \Rightarrow 1\geq4\times\dfrac{12}{ab} \quad \Rightarrow ab\geq48$

$\therefore$ 面積為$\dfrac{1}{2}|ab|=\dfrac{1}{2}ab\geq24$，當$\dfrac{3}{a}=\dfrac{4}{b}=\dfrac{1}{2}$時，最小面積為 24，此時 $a=6$，$b=8$

$\therefore$ L 之方程式為 $-\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{8}=1$

23.一數列$\{a_n\}$的遞迴定義式：$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+(\frac{1}{3})^n$，$n\in N$，試求這個數列的一般項$a_n=$_。（以$n$的式子表示）

【解答】$\frac{5}{2}-\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^{n-1}$

【詳解】

$$a_1=2$$

$$a_2=a_1+\frac{1}{3}$$

$$a_3=a_2+(\frac{1}{3})^2$$

$$\vdots$$

$$+)\quad a_n=a_{n-1}+(\frac{1}{3})^{n-1}$$

$$a_n=2+[\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2+\cdots+(\frac{1}{3})^{n-1}]\quad=2+\frac{\frac{1}{3}[1+(\frac{1}{3})^{n-1}]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^{n-1}$$

24.數列$\langle a_n\rangle$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+3$，$n\in N$，則$\lim_{n\to\infty}a_n=$__________。

【解答】6

【詳解】

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+3\text{，}a_1=1\quad\Rightarrow\quad a_{n+1}-6=\frac{1}{2}(a_n-6)\text{，}a_1=1$$

$$a_1=1$$

$$a_2-6=\frac{1}{2}(a_1-6)$$

$$a_3-6=\frac{1}{2}(a_2-6)$$

$$\vdots$$

$$+)\quad a_n-6=\frac{1}{2}(a_{n-1}-6)$$

$$a_n-6=(\frac{1}{2})^{n-1}(1-6)$$

$$\Rightarrow a_n=-5(\frac{1}{2})^{n-1}+6$$

$$\therefore\quad\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(-5(\frac{1}{2})^{n-1}+6)=6$$

25.設$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$，且$S=\lim_{n\to\infty}S_n$，若 $|S-S_n|<0.002$ 時，試求此時最小自然數n值為____。

【解答】500

【詳解】$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$

$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\ \cdots\ +(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

$|S-S_n|=|1-\frac{n}{n+1}|=\frac{1}{n+1}<0.002\quad\Rightarrow\frac{1}{n+1}<\frac{2}{1000}\quad\Rightarrow 2(n+1)>1000\quad\Rightarrow n>499$

所以最小自然數n值為 500

26. $i=\sqrt{-1}$，求 $1+2i+3i^2+4i^3+\ \cdots\ +100i^{99}$之和為__________。

【解答】$-50(1+i)$

【詳解】

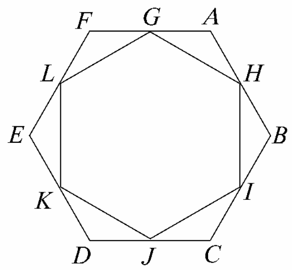
$$\begin{array}{rl} S= & 1+2i+3i^2+4i^3+\ \cdots\ +99i^{98}+100i^{99} \\ -)\ iS= & \qquad i+2i^2+3i^3+\ \cdots\cdots\cdots\ +99i^{99}+100i^{100} \\ \hline (1-i)\,S= & (\,1+\ i+\ i^2+\ i^3\ +\ \cdots\cdots\cdots\ +i^{99}\,)-100i^{100} \end{array}$$

$(1-i)S=\frac{1-i^{100}}{1-i}-100\quad\Rightarrow\quad(1-i)S=-100\quad\Rightarrow\quad S=\frac{-100}{1-i}=-50(1+i)$

27.將一周長為 36 的正六邊形各邊中點連成一新正六邊形，仿此繼續作無窮多個大小正六邊形，則此所有正六邊形的周長的和為________；又此所有正六邊形面積和為________。

【解答】$72(2+\sqrt{3})$；$216\sqrt{3}$

【詳解】如上圖：正六邊形$ABCDEF$的周長為 36 $\therefore\ \overline{AB}=6$



故六邊形$ABCDEF$的面積 $=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 6^2=54\sqrt{3}$

$\triangle AGH$中，$\angle GAH=120°\quad\therefore\quad\angle AGH=\angle AHG=30°$

$\therefore\quad\overline{GH}=2\overline{AH}\cos30°=2\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

(1)$\because\quad\frac{\text{正六邊形}GHIJKL\text{的邊長}}{\text{正六邊形}ABCDEF\text{的邊長}}=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

故所有正六邊形的周長成一等比級數，公比為$\frac{\sqrt{3}}{2}$

故所有正六邊形的周長的總和為$\frac{36}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\cdot36}{2-\sqrt{3}}=72(2+\sqrt{3})$

(2)$\because\quad\frac{\text{正六邊形}GHIJKL\text{的面積}}{\text{正六邊形}ABCDEF\text{的面積}}=(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{3}{4}$

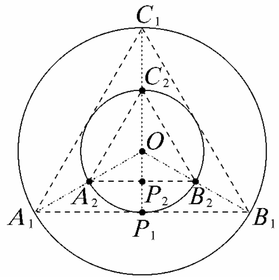
故所有正六邊形的面積成一等比級數，公比為$\frac{3}{4}$

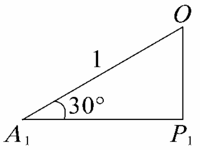
故所有正六邊形的面積的總和為$\frac{54\sqrt{3}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{54\sqrt{3}}{\frac{1}{4}}=216\sqrt{3}$

28.設C_1為一個單位圓，T_1為C_1之內接正三角形，C_2為T_1之內切圓，T_2為C_2之內接正三角形，依此類推，令a_i表T_i之面積，則$\sum_{i=1}^{\infty} a_i =$＿＿＿＿＿＿。

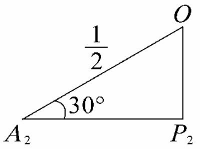
【解答】$\sqrt{3}$

【詳解】



(1)由圖 

得$\begin{cases} \overline{OP_1} = \dfrac{1}{2} = \overline{OA_2} \\ \overline{A_1B_1} = 2\overline{A_1P_1} = \sqrt{3} \end{cases}$

(2)由圖 

得$\overline{A_2B_2} = 2\,\overline{A_2P_2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3)$< a_1，a_2，a_3，\cdots >$為等比數列

公比$r = (\dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}})^2 = (\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}})^2 = \dfrac{1}{4}$，首項$a_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \overline{A_1B_1}^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{3})^2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

故$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{3}$

29.試求下列無窮級數的和：

(1)$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n + (-2)^{n+2}}{4^n} =$＿＿＿＿＿＿。 (2)$\dfrac{1}{2\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+2)} + \cdots =$＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1)$\dfrac{5}{3}$ (2)$\dfrac{5}{12}$

【詳解】

(1)$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n + (-2)^{n+2}}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} [(\dfrac{3}{4})^n + (-2)^2 \cdot (\dfrac{-2}{4})^n] = \sum_{n=1}^{\infty} (\dfrac{3}{4})^n + 4\sum_{n=1}^{\infty} (\dfrac{-1}{2})^n = \dfrac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} + 4 \times \dfrac{(\frac{-1}{2})}{1-(\frac{-1}{2})} = \dfrac{5}{3}$

(2)一般項$a_k = \dfrac{1}{(k+1)(k+3)} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+3})$

原式 $= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+3}) = \dfrac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+3})$

$= \dfrac{1}{2} \lim_{n\to\infty} [(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}) + (\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}) + (\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{6}) + (\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7}) + \cdots + (\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}) + (\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+3})]$

$= \dfrac{1}{2} \lim_{n\to\infty} (\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3}) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}) = \dfrac{5}{12}$

30.設有一數列$< a_n >$之前n項和為$3n^2 + 4$，則一般項$a_n =$＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\begin{cases} a_1 = 7，n = 1 \\ a_n = 6n - 3，n \ge 2 \end{cases}$

【詳解】

已知$S_n = 3n^2 + 4$

(1) $a_1 = S_1 = 3 + 4 = 7$

(2) $a_n = S_n - S_{n-1} = (3n^2 + 4) - [3(n-1)^2 + 4] = 6n - 3$

由(1)，(2)可知$\begin{cases} a_1 = 7，n = 1 \\ a_n = 6n - 3，n \geq 2 \end{cases}$

31.數列$\frac{1}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{4}$，$\frac{1}{5}$，…，依此規則繼續下去，則$\frac{7}{11}$爲第__________項，又此數列的第一項到$\frac{7}{11}$這一項的總和爲__________。

【解答】62；$\frac{771}{22}$

【詳解】

將數列分群　$(\frac{1}{1})$，$(\frac{1}{2}，\frac{2}{2})$，$(\frac{1}{3}，\frac{2}{3}，\frac{3}{3})$，$(\frac{1}{4}，\frac{2}{4}，\frac{3}{4}，\frac{4}{4})$，…

第 k 群共有 k 個數，每個數的分母均爲 k，故知$\frac{7}{11}$在第 11 群的第 7 個數，所以$\frac{7}{11}$的項數爲 $(1 + 2 + \cdots + 10) + 7 = 62$ 項。

第一項到$\frac{7}{11}$這一項的總和爲$(\frac{1}{1}) + (\frac{1}{2}+\frac{2}{2}) + (\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}) + \cdots + (\frac{1}{10}+\cdots+\frac{10}{10}) + (\frac{1}{11}+\cdots+\frac{7}{11})$

$= (\sum_{k=1}^{10}\frac{k+1}{2}) + \frac{1}{11}(1 + 2 + \cdots + 7) = \frac{65}{2} + \frac{28}{11} = \frac{771}{22}$

32.$\triangle ABC$ 中，$A(-2，1)$，$B(0，-3)$，$C(3，0)$，若直線 $y = mx - 4$ 和$\triangle ABC$ 之邊恰交於二點，求 m 之範圍？

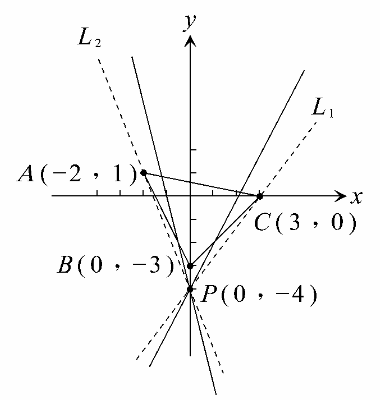
【解答】$m > \frac{4}{3}$ 或 $m < -\frac{5}{2}$

【詳解】

$y = mx - 4$ 必過$P(0，-4)$，且斜率 m

由圖知：L：$y = mx - 4$ 要和$\triangle ABC$之邊恰交於二點　$\Rightarrow$　$m > m_{L_1}$ 或 $m < m_{L_2}$

$\therefore$　$m > m_{L_1} = \frac{0-(-4)}{3-0} = \frac{4}{3}$　或$m < m_{L_2} = \frac{1-(-4)}{-2-0} = -\frac{5}{2}$，故$m > \frac{4}{3}$或$m < -\frac{5}{2}$



33.若$\lim\limits_{n\to\infty}(3n+4)\,a_n=6$，則$\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\,a_n$之値爲＿＿＿＿＿。

【解答】2

【詳解】$\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(3n+4)\,a_n\cdot\dfrac{n+1}{3n+4}=\lim\limits_{n\to\infty}(3n+4)\,a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3n+4}=6\cdot\dfrac{1}{3}=2$

38.設$z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{8}$，則$\lim\limits_{n\to\infty}(3^{n+1}+4^{n+2})\,|\,z\,|^n=$＿＿＿＿＿。

【解答】16

【詳解】$\because\quad |\,z\,|=\sqrt{(-\dfrac{1}{8})^2+(\dfrac{\sqrt{3}}{8})^2}=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\quad$原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}+4^{n+2}}{4^n}=\lim\limits_{n\to\infty}(3\,(\dfrac{3}{4})^n+16)=3\times 0+16=16$