<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高三數學平時測驗　　日期：94.09.09</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">Book1　2-1,2,4
整數、有理數、複數</td><td>班級</td><td>普三　　　班</td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、選擇題(每題 10 分)

1. 設α，β為$x^2+6x+4=0$之二根，則$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=$？

(A) -2　(B) -4　(C) -6　(D) -8　(E) -10

【解答】(E)

【詳解】

$\because$　α，β是$x^2+6x+4=0$之二根　$\therefore$　$\alpha+\beta=-6$，$\alpha\beta=4$　$\Rightarrow$　$\alpha<0$，$\beta<0$

$\therefore$　$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\ \sqrt{\beta}=(\alpha+\beta)-2\sqrt{\alpha\beta}=(-6)-2\sqrt{4}=-6-4=-10$

2. 設x，$y\in R$，且 $|x-1|\le 2$， $|y+1|\le 2$，若$t=x^2-3y$，則t的範圍為

(A) $-3\le t\le 18$　(B) $-2\le t\le 18$　(C) $6\le t\le 9$　(D) $6\le t\le 10$　(E) t為任意實數

【解答】(A)

【詳解】

$\because$　$|x-1|\le 2$　$\Rightarrow$　$-2\le x-1\le 2$　$\Rightarrow$　$-1\le x\le 3$　$\therefore$　$0\le x^2\le 9$…..①

$\because$　$|y+1|\le 2$　$\Rightarrow$　$-2\le y+1\le 2$　$\Rightarrow$　$-3\le y\le 1$

$\therefore$　$-9\le 3y\le 3$　$\Rightarrow$　$-3\le -3y\le 9$…..②

兩式①②相加，故 $-3\le x^2-3y\le 18$　$\therefore$　$-3\le t\le 18$

3. 設 $a\in N$ 且 $\dfrac{3a+40}{a+1}\in N$，則 a 共有幾個？(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3　(E) 4　個

【解答】(B)

【詳解】

$\because$　$\dfrac{3a+40}{a+1}\in N$　$\therefore$　$(a+1)\mid(3a+40)$，$(a+1)\mid(a+1)$

$\therefore$　$(a+1)\mid(3a+40)-3(a+1)$　$\Rightarrow$　$(a+1)\mid 37$

$\because$　$a\in N$　$\therefore$　$a+1>1$　$\Rightarrow$　$a+1=37$　$\therefore$　$a=36$，故只有一個 a

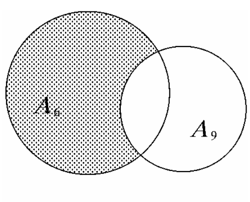
4. 不大於 500 的自然數中，是 6 的倍數不是 9 的倍數者有幾個？

(A) 55　(B) 56　(C) 57　(D) 70　(E) 71

【解答】(B)

【詳解】

所求 $=n(A_6)-n(A_{18})$，其中A_k為k的倍數所成集合 $=[\dfrac{500}{6}]-[\dfrac{500}{18}]=83-27=56$



5. (複選)下列哪一個集合有最小元素？

(A)$\{x \mid x$ 是整數$\}$　(B)$\{x \mid 0 < x < 7，x \in Z\}$　(C)$\{x \mid 0 < x < 7，x \in Q\}$

(D)$\{x \mid x = 2n，n \in Z\}$　(E)$\{x \mid |x+1| \le 2，x \in Q\}$

【解答】(B)(E)

【詳解】

(A)$\{x \mid x$ 是整數$\} = Z = \{\ldots，-3，-2，-1，0，1，2，3，\ldots\}$　$\therefore$　無最小元素

(B)$\{x \mid 0 < x < 7，x \in Z\} = \{1，2，3，4，5，6\}$　$\therefore$　最小元素是 1

(C)$\{x \mid 0 < x < 7，x \in Q\}$有無限多個元素，設 y 爲最小元素，則 $0 < y < 7$

$\because$　在 $0，y$ 間仍有無限多個元素(有理數的稠密姓)　$\therefore$　矛盾（$\rightarrow\leftarrow$）

(D)$\{x \mid x = 2n，n \in Z\} = \{\ldots，-4，-2，0，2，4，\ldots\}$　$\therefore$　無最小元素

(E)$\{x \mid |x+1| \le 2，x \in Q\} = \{x \mid -3 \le x \le 1，x \in Q\}$　$\therefore$　最小元素爲 -3

6. (複選)設α，β都是複數，則下列敘述何者正確？

(A) $\alpha \cdot \overline{\alpha} = |\alpha|^2$　(B) $\alpha + \beta i = 0 \Rightarrow \alpha = 0，\beta = 0$　(C) $(\alpha^4)^{\frac{7}{4}} = \alpha^7$

(D)若$\alpha > \beta$，則$\alpha，\beta \in R$　(E) $\alpha^0 = 1$

【解答】(A)(D)

【詳解】

(A)令$\alpha = a + bi$，a，$b \in R$，則$\alpha \cdot \overline{\alpha} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |\alpha|^2$

(B)必須$\alpha，\beta \in \boldsymbol{R}$ 時，$\alpha + \beta i = 0 \Rightarrow \alpha = 0，\beta = 0$

(C)當$\alpha = i$時，$i^7 = i^{4\times\frac{7}{4}} \ne (i^4)^{\frac{7}{4}} = 1$，即指數律不成立

(D)複數能比較大小時，它們都是實數，即虛數不能比較大小

(E) $\alpha \ne 0$ 時，規定$\alpha^0 = 1$

7. (複選)a，b，c，d 均爲有理數，且 $abcd \ne 0$，x，y 均爲無理數，則下列敘述何者恆真？

(A) $a + bx$ 爲無理數　(B) xy 爲無理數　(C)若 $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$，則 $a = c，b = d$

(D)$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}$ 爲無理數　(E)若 $a + x = b + y$，則 $a = b，x = y$

【解答】(A)(C)

【詳解】

(A)對。a，b 爲有理數且均不爲零，故 $a + bx$ 爲無理數

(B)錯。令 $x = \sqrt{2}$，$y = 3\sqrt{2}$，則 $xy = 6$ 爲有理數

(C)對。設 $b \ne d$，由 $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$，得 $\sqrt{3} = \dfrac{c-a}{b-d}$，矛盾，故 $b = d$，則 $a = c$

(D)錯。令 $a = 1$，$b = -1$，則 $x = y = \sqrt{2}$，則$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0$ 爲有理數

(E)錯。令 $a = 1$，$x = \sqrt{3}$，$b = 0$，$y = 1 + \sqrt{3}$，則 $a + x = b + y$，但 $a \ne b$，$x \ne y$

8. (複選)設a，b，$c \in R$，$a \ne 0$，則下列何者正確？

(A)若$ax^2 + bx + c = 0$ 恰有一個根爲 0，則$c = 0$

(B) $ax^2 + bx + c = 0$ 恰有一個根爲 0　$\Leftrightarrow$　$c = 0$，$b \ne 0$

(C) ax^2+bx+c為完全平方式　$\Leftrightarrow$　$b^2-4ac=0$

(D)若$ax^2+bx+c=0$ 有一根為 $2+i$，則另一根為 $2-i$

(E)已知$(2-i)x^2-3(1-i)x-2(1+i)=0$ 有實根，則另一根為實數

【解答】(A)(B)(C)(D)

【詳解】

(A)(B) $ax^2+bx+c=0$ 恰有一個根為 0　$\Leftrightarrow$　$b\neq 0$，$c=0$　$\Rightarrow$　$c=0$

(C) ax^2+bx+c為完全平方式　$\Leftrightarrow$　$ax^2+bx+c=0$ 有相等實根　$\Leftrightarrow$　$b^2-4ac=0$

(D)實係數方程式虛根成對

(E)設有實根為α，另一根為β，由$\alpha+\beta=\dfrac{3(1-i)}{2-i}=\dfrac{3(1-i)(2+i)}{4+1}=\dfrac{9}{5}-\dfrac{3}{5}i$　$\therefore\beta$為虛數

9. (複選)下列敘述何者正確？

(A)設 a，$b\in N$，則找得到 $n\in N$，使 $na>b$　(B)設 a，$b\in Z$，則找得到 $n\in N$，使 $na>b$

(C)設 a，$b\in Q$，且 $a>0$，則找得到 $n\in N$，使 $na>b$

(D)設 a，$b\in Q$，且 $a\neq 0$，則找得到 $n\in N$，使 $n|a|>b$

(E)設 a，$b\in R$，且 $a\neq 0$，則找得到 $n\in N$，使 $n|a|>b$ 且$(n-1)|a|\leq|b|$

【解答】(A)(C)(D)(E)

【詳解】

(A)$\because$　$a\geq 1$　$\therefore$　$ab\geq b$　$\therefore$　取 $n=b+1$，則 $na>b$

(B)當 $a<0$，$b>0$ 時，此時 n 不存在

(C)當 $a>b$ 時，取 $n=1$，則 $na>b$

當 $a=b$ 時，取 $n=2$，則 $na>a=b$；

當 $a<b$ 時，取 $n=[\dfrac{b}{a}]+1$

$\because\dfrac{b}{a}-1<[\dfrac{b}{a}]\leq\dfrac{b}{a}$　$\Rightarrow\dfrac{b}{a}<[\dfrac{b}{a}]+1\leq\dfrac{b}{a}+1$　$\Rightarrow b<a([\dfrac{b}{a}]+1)$　$\Rightarrow na>b$

(D)$\because$　$a\in Q$，$a\neq 0$　$\therefore$　$|a|>0$，仿(C)得 $n\in N$ 使 $na>b$

(E)當 $b=0$ 時，取 $n=1$，則 $n|a|>b$ 且$(n-1)|a|\leq|b|$

當 $b\neq 0$ 時，取 $n=[|\dfrac{b}{a}|]+1$

$\because$　$|\dfrac{b}{a}|-1<[|\dfrac{b}{a}|]\leq|\dfrac{b}{a}|$　$\Rightarrow$　$|\dfrac{b}{a}|<[|\dfrac{b}{a}|]+1$

且 $n-1\leq\dfrac{|b|}{|a|}$　$\Rightarrow$　$|b|<|a|([|\dfrac{b}{a}|]+1)$且$(n-1)|a|\leq|b|$

$\therefore$　$n|a|>|b|\geq b$ 且$(n-1)|a|\leq|b|$

二、填充題(每題 10 分)

1.　$n\in Z$，若$p=4n^2-9n-9$ 為質數，則$p=$__________。

【解答】19

【詳解】

$P = 4n^2 - 9n - 9 = (n-3)(4n+3)$

$\because$　P爲質數　$\therefore$　$n - 3 = 1$ 或 $4n + 3 = 1$

當$n - 3 = 1$ 時，$n = 4$，$P = 19$；當 $4n + 3 = 1$ 時，$n = \dfrac{-1}{2}$（不合）

2. (1)求$(5814，6018) =$__________。

(2)找一組整數x，y，使 $5814x + 6018y = (5814，6018)$，則$(x，y) =$__________。

【解答】(1) 102　(2) $(29，-28)$

【解析】：

a	5814	6018	b
$-28a+28b$	5712	5814	a
$29a-28b$	102	204	$-a+b$
		204	
		0	

3. 若a，b，q_1，q_2，q_3均爲正整數，且合於下列條件

①$a = bq_1 + 8472$；②$b = 8472q_2 + 444$；③$8472 = 444q_3 + 36$，則a，b的最大公因數爲______。

【解答】12

【詳解】

根據轉轉相除法

$\because$　$a = bq_1 + 8472$　$\therefore$　$(a，b) = (b，8472)$……①

$\because$　$b = 8472q_2 + 444$　$\therefore$　$(b，8472) = (8472，444)$……②

$\because$　$8472 = 444q_3 + 36$　$\therefore$　$(8472，444) = (444，36)$……③

$\xRightarrow{由①，②，③}$　$(a，b) = (444，36) = 12$

4. 設a，$b \in N$，以 5 除a餘 3，以 5 除b餘 2，則以 5 除 $2a^2 + ab + b^2$，得餘數爲__________。

【解答】3

【詳解】

設$a = 5x + 3$，$b = 5y + 2$，x，$y \in Z$

$2a^2 + ab + b^2 = 2(5x+3)^2 + (5x+3)(5y+2) + (5y+2)^2$

$= 50x^2 + 60x + 18 + 25xy + 10x + 15y + 6 + 25y^2 + 20y + 4$

$=5\,(10x^2 + 12x + 5xy + 2x + 3y + 5y^2 + 4y) + 18 + 6 + 4 = 5k + 28 = 5k + 25 + 3$

$\therefore$　以 5 除 $2a^2 + ab + b^2$得餘數爲 3

5. 二自然數a，b，$a > b$，將其和、差、積、商相加，結果爲 450，則數對$(a，b)$爲__________。

【解答】$(100，2)$，$(72，4)$，$(28，14)$

【詳解】

a，$b \in N$，$a > b$，按題意：$(a+b) + (a-b) + ab + \dfrac{a}{b} = 450 \in N$

$\Rightarrow\quad b\mid a$，令$a=bk$，$k\in N$代回 $\quad\Rightarrow\quad 2bk+bk\cdot b+k=450$

$\Rightarrow\quad k(b+1)^2=450=2\cdot 3^2\cdot 5^2\quad\Rightarrow\quad \begin{cases} b+1=\ 3，\ 5，15 \\ \quad k=50，18，2 \end{cases}$

$\Rightarrow\quad b=2，4，14\quad\Rightarrow\quad a=100，72，28$

$\therefore\quad (a，b)=(100，2)，(72，4)，(28，14)$

6. $x，y\in N，xy-2x+3y=0$，則$(x，y)=$__________。

【解答】$(3，1)$

【詳解】

$xy-2x+3y=0\quad\Rightarrow\quad x(y-2)+3(y-2)=-6\quad\Rightarrow\quad (x+3)(y-2)=-6(x，y\in N)$

$x+3$	1	2	3	6
$y-2$	-6	-3	-2	-1

$\Rightarrow$

x	-2	-1	0	3
y	-4	-1	0	1

$\Rightarrow\quad (x，y)=(3，1)$

7. 設$n\in N$且 $1\le n\le 240$，則滿足$(n，240)=10$ 的n有__________個。

【解答】8

【詳解】

設 $n=10k\quad\because\quad 1\le n\le 240\quad\therefore\quad 1\le k\le 24$

由$(n，240)=(10k，240)=10$，且$(k，24)=1$，因爲$24=3\times 2^3$

則 k 之個數爲 $24-([\frac{24}{2}]+[\frac{24}{3}]-[\frac{24}{6}])=24-16=8$

即滿足$(n，240)=10$ 的 n 有 8 個

9. 設a爲整數，若 648 用a去除餘 18，747 用a去除餘 12，求a的最小值 =__________。

【解答】21

【詳解】

由$\begin{cases} 648=aq_1+18\,(a>18) \\ 747=aq_2+12\,(a>12) \end{cases}\quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 630=aq_1 \\ 735=aq_2 \end{cases}\ (a>18)$

則 a 爲 630 與 735 之公因數且 $a>18$

而$(630，735)=105=3\times 5\times 7$，則 a 之最小值爲 21

10.設$a，b\in Z$，滿足$a>b$，且$(a，b)=21$，$[a，b]=378$，則所有a的值之和 =__________。

【解答】504

【詳解】

$(a，b)=21\quad\therefore\quad a=21u，b=21v$ 且 $u，v$ 互質，$u>v$

$[a，b]=21\times u\times v=378\quad\therefore\quad u\times v=18$

$\therefore$ 數對 $(u，v)=(18，1)，(9，2)，(-1，-18)$或$(-2，-9)$

$\therefore$ 所有 a 的值之和 $=21\times(18+9-1-2)=504$

11.設$m，k\in Q，m\ne 0$，且方程式 $2mx^2-3mx+2x+m+k=0$ 之根爲有理數，則有理數$k=$__。

【解答】-1 或 -2

【詳解】$\because$ 方程式 $2mx^2-3mx+2x+m+k=0$ 之根爲有理數

$\therefore \Delta=(-3m+2)^2-4\cdot 2m(m+k)=9m^2-12m+4-8m^2-8mk$

$=m^2-2(6+4k)m+4$ 爲完全平方式

$\Rightarrow\ \ 4(6+4k)^2-4\times 4=0\ \ \Rightarrow\ \ (6+4k+2)(6+4k-2)=0$

$\Rightarrow\ \ (k+2)(k+1)=0\ \ \therefore\ \ k=-1$ 或 $k=-2$

12.a，b，$c\in N$，$a-2b+3c=0$，$3a-b-5c=0$ 且$(a，b，c)+[a，b，c]=2733$，則$c=$________。

【解答】15

【詳解】

$$\begin{cases}a-2b+3c=0\\3a-b-5c=0\end{cases}\ \Rightarrow\ \ a：b：c=13：14：5\ \ (?)$$

設$(a，b，c)=k$，則$[a，b，c]=[13k，14k，5k]=13\times14\times5k=910k$

$(a，b，c)+[a，b，c]=k+910k=911k=2733\ \Rightarrow\ k=3\ \Rightarrow\ c=5k=15$

13.$n=2^7\times3^4\times5^3$的正因數中，被 45 整除，不被 8 整除者共__________個。

【解答】27

【詳解】

$45=3^2\times5$

$n=2^7\times3^4\times5^3$

$\downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow$

$2^0\ \ 3^2\ \ 5^1$

$2^1\ \ 3^3\ \ 5^2$

$2^2\ \ 3^4\ \ 5^3$

$\therefore$ 方法共 $3\times3\times3=27$ 種

14.設$x\in N$，$x>1$，且x除 135，278，395 所得的餘數均相等，則$x=$__________。

【解答】13

【詳解】

設共同餘數爲 r，則 $x\mid(135-r)$，$x\mid(278-r)$，$x\mid(395-r)$

由 $x\mid(135-r)$，$x\mid(278-r)\ \Rightarrow\ x\mid(278-r)-(135-r)\ \ \therefore\ x\mid143$

$x\mid(135-r)$，$x\mid(395-r)\ \Rightarrow\ x\mid(395-r)-(135-r)\ \ \therefore\ x\mid260$

又 $x\mid(278-r)$，$x\mid(395-r)\ \Rightarrow\ x\mid(395-r)-(278-r)\ \ \therefore\ x\mid117$

$\therefore\ x\mid(143，260，117)\ \ \because\ (143，260，117)=13\ \ \therefore\ x\mid13$

$\because\ x>1\ \ \therefore\ x=13$

15.複數平面上

(1)滿足 $|z+3i|=2$ 的z點所成之圖形爲__________。

(2)滿足 $|z+3i|=|z-3i|$ 的z點所成之圖形爲__________。

【解答】(1)圓　(2)一直線

【詳解】

(1)$|z-(2+i)|=3$ 之圖形爲複數平面上與點(2，1)距離 3 的點之集合，亦即圓

(2)$|z-(0-3i)|=|z-(0+3i)|$ 的 z 點爲複數平面上與點(0，−3)及點(0，3)等距離

的點之集合，亦即點(0，-3)及點(0，3)所成線段之中垂線

16.方程式$x^2+5x-3=0$的兩根爲m，n，則以$\dfrac{m}{n}$ ，$\dfrac{n}{m}$爲兩根的方程式爲__________。

【解答】$x^2+\dfrac{31}{3}x+1=0$

【詳解】

$x^2+5x-3=0$的兩根爲m，n，則$m+n=-5$，$mn=-3$

$\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}=\dfrac{m^2+n^2}{mn}=\dfrac{(m+n)^2-2mn}{mn}=\dfrac{(-5)^2-2(-3)}{-3}=-\dfrac{31}{3}$，$\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{n}{m}=1$

$\therefore$ 以$\dfrac{m}{n}$ ，$\dfrac{n}{m}$爲兩根的方程式爲$x^2+\dfrac{31}{3}x+1=0$

17.$|2x+5|+|2x-1|=6$之解集合爲__________。

【解答】$\dfrac{-5}{2}\le x\le\dfrac{1}{2}$

【詳解】$|2x+5|+|2x-1|=|2x+5|+|1-2x|\ge|2x+5+1-2x|=6$

當$|2x+5|+|1-2x|=6$，此時$(2x+5)(1-2x)\ge0$，即$(2x+5)(2x-1)\le0\Rightarrow\dfrac{-5}{2}\le x\le\dfrac{1}{2}$

(※當a,b同號，或a,b至少有一爲 0 時，$|a|+|b|=|a+b|$成立)

18.a，$b\in R$，若 $|ax+1|\le b$之解爲「$-2\le x\le4$」，求數對(a，b)爲__________。

【解答】(-1，3)

【詳解】

$-2\le x\le4 \quad\Rightarrow\quad (-2-1)\le(x-1)\le(4-1)\Rightarrow|x-1|\le3$

$\Rightarrow\quad |-x+1|\le3$ 與 $|ax+1|\le b$ 同義，即 $a=-1$，$b=3$

19.x，$y\in Z$，且$x^2+4xy+5y^2-2x-8y+4=0$，則$x-y$的最小值 $=$__________。

【解答】-8

【詳解】

先對x作配方

原式$\Rightarrow\quad [x^2+(4y-2)x]+(5y^2-8y+4)=0$

$\Rightarrow\quad [x^2+2(2y-1)x+(2y-1)^2]+(5y^2-8y+4)=\quad(2y-1)^2$

$\Rightarrow\quad [x+(2y-1)]^2+(y^2-4y+4)=1 \quad\Rightarrow\quad (x+2y-1)^2+(y-2)^2=1$，其中$x$，$y\in Z$

$x+2y-1$	1	-1	0	0
$y-2$	0	0	1	-1

$\Rightarrow$

x	-2	-4	-5	-1
y	2	2	3	1

故當(x，y)$=$(-5，3)時，$x-y=-8$ 爲最小值

20.設$x\in N$，$f(x)$表$\sqrt{x}$的整數部分，則$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(100)$之值爲__________。

【解答】625

【詳解】

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(100)=\overbrace{1+1+1}^{2^2-1^2\text{個}}+\overbrace{2+2+\cdots+2}^{3^2-2^2\text{個}}+\cdots+\overbrace{9+9+\cdots+9}^{10^2-9^2\text{個}}+10$$

$$=1(2^2-1^2)+2(3^2-2^2)+3(4^2-3^2)+\ldots+9(10^2-9^2)+10$$

$= 1 \times 3 + 2 \times 5 + 3 \times 7 + \ldots + 9(19) + 10 = 625$

21.整數a，b，c合乎$|\,a-2| + 3|\,b+1| + 4\,|\,c-2| = 10$，共有__________組。
其中$a+b+c$的最大值__________。

【解答】34，13

【詳解】

$\lvert a-2\rvert$	0	1	2	3	4	6	7	10
$\lvert b+1\rvert$	2	3	0	1	2	0	1	0
$\lvert c-2\rvert$	1	0	2	1	0	1	0	0

$\Rightarrow$

a	2	3，1	4，0	5，−1	6，−2	8，−4	9，−5	12，−8
b	1，−3	2，−4	−1	0，−2	1，−3	−1	0，−2	−1
c	3，1	2	4，0	3，1	2	3，1	2	2

共有

$(1\times2\times2) + (2\times2\times1) + (2\times1\times2) + (2\times2\times2) + (2\times2\times1) + (2\times1\times2) + (2\times2\times1) + (2\times1\times1) = 34$ 組

其中 $a+b+c = 12 + (-1) + 2 = 13$ 為最大值

22.設複數z滿足$z^2 = 5 - 12i$，則此複數$z =$ __________。

【解答】$3-2i$ 或 $-3+2i$

【詳解】

設$z = a + bi$，a，$b \in R$

$$\Rightarrow\ (a+bi)^2 = (a^2-b^2) + 2abi = 5 - 12i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = -12 \\ a^2 + b^2 = 13 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 由第 1、3 式得$\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 3 \\ b = \mp 2 \end{cases}$

$\Rightarrow\ (a，b) = (3，-2)$或$(-3，2) \quad \Rightarrow \quad z = 3 - 2i$或 $-3+2i$

23.設$z = \dfrac{(5-12i)\cdot(7+2i)}{(2-7i)\cdot(3+4i)}$，則 $|\,z\,| =$__________。

【解答】$\dfrac{13}{5}$

【詳解】

$$|\,z\,| = \left|\frac{(5-12i)\cdot(7+2i)}{(2-7i)\cdot(3+4i)}\right| = \frac{|5-12i|\cdot|7+2i|}{|2-7i|\cdot|3+4i|} = \frac{\sqrt{5^2+12^2}\cdot\sqrt{7^2+2^2}}{\sqrt{2^2+7^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{13\cdot\sqrt{53}}{\sqrt{53}\cdot 5} = \frac{13}{5}$$

24.若$(2-i)x^2 - 3(1-i)x - 2(1+i) = 0$ 有實數解，求另一虛根為__________。

【解答】$-\dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5}i$

【詳解】

設方程式之實根為α，則$(2-i)\alpha^2 - 3(1-i)\alpha - 2(1+i) = 0$

$\Rightarrow\ (2\alpha^2-3\alpha-2)+(-\alpha^2+3\alpha-2)i=0$

$\Rightarrow\ \begin{cases}2\alpha^2-3\alpha-2=0\\ \alpha^2-3\alpha+2=0\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}(2\alpha+1)(\alpha-2)=0\\ (\alpha-1)(\alpha-2)=0\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}\alpha=-\frac{1}{2}\text{或}2\\ \alpha=1\text{或}2\end{cases}\quad\therefore\quad \alpha=2$

設另一根爲β，則$2+\beta=\dfrac{3(1-i)}{2-i}=\dfrac{3}{5}(3-i)\ \Rightarrow\ \beta=\dfrac{3}{5}(3-i)-2=\dfrac{-1-3i}{5}$

25.設$\sqrt{4+2\sqrt{3+2\sqrt{5+12\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}}=a+b$，$a\in Z$，$0\le b<1$，則數對$(a，b)=$__________。

【解答】$(3，\sqrt{2}-1)$

【詳解】

$a+b=\sqrt{4+2\sqrt{3+2\sqrt{5+12(\sqrt{2}+1)}}}=\sqrt{4+2\sqrt{3+2\sqrt{17+2\sqrt{72}}}}=\sqrt{4+2\sqrt{3+2(\sqrt{9}+\sqrt{8})}}$

$=\sqrt{4+2\sqrt{9+2\sqrt{8}})}=\sqrt{4+2(\sqrt{8}+1)}=2+\sqrt{2}=3.\cdots=3+(\sqrt{2}-1)$，$a=3$，$b=\sqrt{2}-1$

26.正整數a，$150\le a\le 400$，使得x，y的方程式$ax+90y=10$有整數解。這樣的a共有______個。

【解答】167

【詳解】方程式$ax+90y=10$有整數解 $\Leftrightarrow$ $(a，90)\mid 10$，則$(a，90)=1，2，5，10$

(1) $(a，90)=1$

共有$(400-149)-\{([\frac{400}{2}]-[\frac{149}{2}])+([\frac{400}{3}]-[\frac{149}{3}])+([\frac{400}{5}]-[\frac{149}{5}])-([\frac{400}{6}]$

$-[\frac{149}{6}])-([\frac{400}{10}]-[\frac{149}{10}])-([\frac{400}{15}]-[\frac{149}{15}])+([\frac{400}{30}]-[\frac{149}{30}])\}=66$

(2) $(a，90)=2$，令$a=2a_1$，$150\le 2a_1\le 400\ \Rightarrow\ 75\le a_1\le 200$

又$(2a_1，90)=2\ \Rightarrow\ (a_1，45)=1$

共有$(200-74)-\{([\frac{200}{3}]-[\frac{74}{3}])+([\frac{200}{5}]-[\frac{74}{5}])-([\frac{200}{15}]-[\frac{74}{15}])\}=67$

(3)$(a，90)=5$，令$a=5a_2$，$150\le 5a_2\le 400\ \Rightarrow\ 30\le a_2\le 80$

又$(5a_2，90)=5\ \Rightarrow\ (a_2，18)=1$

共有$(80-29)-\{([\frac{80}{2}]-[\frac{29}{2}])+([\frac{80}{3}]-[\frac{29}{3}])-([\frac{80}{6}]-[\frac{29}{6}])\}=17$

(4)$(a，90)=10$，令$a=10a_3$，$150\le 10a_3\le 400\ \Rightarrow\ 15\le a_3\le 40$

又$(10a_3，90)=10\ \Rightarrow\ (a_3，9)=1$

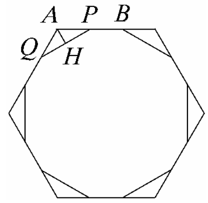
共有$(40-14)-([\frac{40}{3}]-[\frac{14}{3}])=17$

由(1)(2)(3)(4)得a共有$66+67+17+17=167$個

27.有一邊長爲3的正六邊形紙板，今在每一個角各剪掉一個小三角形，使其成爲正十二邊形之紙板，則此正十二邊形之一邊長爲__________。

【解答】$-9+6\sqrt{3}$

【詳解】如圖，在角A剪掉$\triangle APQ$



設$\overline{PQ}=x\Rightarrow\overline{AP}=\overline{AQ}=\frac{1}{2}(3-x)$，$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AP}=\frac{1}{4}(3-x)$，$\overline{PH}=\frac{1}{2}x$

$\overline{AP}^2=\overline{AH}^2+\overline{PH}^2$，$\therefore \frac{1}{4}(3-x)^2=\frac{1}{16}(3-x)^2+\frac{1}{4}x^2$

$\Rightarrow x^2+18x-27=0 \quad \Rightarrow x=-9\pm 6\sqrt{3}$，邊長為 $-9+6\sqrt{3}$

28.設z為複數，若$z^2-\frac{1}{z^2}=2i$，則(1) $z^2=$__________。 (2) $z+\frac{1}{z}=$__________。

【解答】(1) i (2) $\pm\sqrt{2}$

【詳解】

(1) $z^2-\frac{1}{z^2}=2i \quad \Rightarrow \quad (z^2)^2-2iz^2-1=0 \quad \Rightarrow \quad z^2=\frac{2i\pm\sqrt{(-2i)^2+4}}{2}=i$

(2)設$z=a+bi$（a，$b\in R$） $\Rightarrow$ $z^2=(a^2-b^2)+2abi=i$

$$\begin{cases} a^2-b^2=0 \\ 2ab=1 \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=\frac{1}{2} \\ b^2=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ b=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

若$z=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$，則$z+\frac{1}{z}=\frac{z^2+1}{z}=\frac{i+1}{\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)}=\sqrt{2}$

若$z=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$，則$z+\frac{1}{z}=\frac{z^2+1}{z}=\frac{i+1}{-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)}=-\sqrt{2}$

故$z+\frac{1}{z}=\pm\sqrt{2}$

29.設$a=\sqrt{41-12\sqrt{5}}$，b為a的純小數部分，則$\frac{a}{4}+\frac{1}{b}$之值為__________。

【解答】$\frac{9}{4}$

【詳解】

$\because \quad a=\sqrt{41-12\sqrt{5}}=\sqrt{41-2\sqrt{180}}=6-\sqrt{5}=3.\cdots$

$\therefore \quad b=(6-\sqrt{5})-3=3-\sqrt{5}$

故$\frac{a}{4}+\frac{1}{b}=\frac{6-\sqrt{5}}{4}+\frac{1}{3-\sqrt{5}}=\frac{6-\sqrt{5}}{4}+\frac{3+\sqrt{5}}{4}=\frac{9}{4}$

30.設α，β為$x^2-4x+1=0$之二根，則$\sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\beta^2+1}$之值為__________。

【解答】$2\sqrt{6}$

【詳解】$\begin{cases} \alpha^2-4\alpha+1=0 \\ \beta^2-4\beta+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2+1=4\alpha \\ \beta^2+1=4\beta \end{cases}$，又$\begin{cases} \alpha+\beta=4 \\ \alpha\beta=1 \end{cases}$（$\alpha>0$，$\beta>0$）

$\therefore \quad \sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\beta^2+1}=\sqrt{4\alpha}+\sqrt{4\beta}=2(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})$

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\alpha+\beta)+2\sqrt{\alpha\beta}=4+2=6 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})=\sqrt{6}$（$\because \quad \alpha>0$，$\beta>0$）

故所求 $=2(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})=2\sqrt{6}$

31.$-2 \le x \le 4$ 爲 $|x| \le k$之充分條件，則k之最小値爲__________。

【解答】4

【詳解】小集合是大集合的充分條件

所以當$-2 \le x \le 4$ 爲 $|x| \le k$ 之充分條件時， $\{x \mid -2 \le x \le 4\} \subset \{x \mid -k \le x \le k\}$

$\therefore$ k 之最小値爲 4

32.解方程式$\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+1}+\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+2}=\dfrac{5}{2}$所得的所有實根中，最大者爲______，最小者爲____。

【解答】3；-8

【詳解】

令$y=\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+1}$，則$y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{2} \Rightarrow 2y^2-5y+2=0$

$\Rightarrow (2y-1)(y-2)=0 \Rightarrow y=\dfrac{1}{2}$ 或$y=2$

(1)若$y=\dfrac{1}{2}$時，$\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+1}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow 2x^2+4=x^2+4x+1 \Rightarrow x^2-4x+3=0$

$\Rightarrow (x-1)(x-3)=0$，$\therefore x=1$ 或 3

(2)若$y=2$ 時，$\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+1}=2 \Rightarrow 2x^2+8x+2=x^2+2 \Rightarrow x^2+8x=0$

$\Rightarrow x(x+8)=0$，$x=0$ 或$x=-8$

最大者爲 3，最小者爲 -8