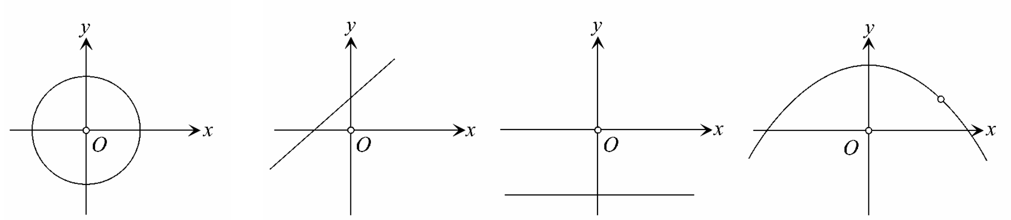
高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：94.08.12					
範圍	Book1 1-1,3+ans 邏輯、函數	班級	普三　　　班	姓名	
		座號			

一、單選題(每題 5 分)

1.下列的圖形中，何者不是 $y=f(x)$之函數圖形？

(A)　　(B)　　(C)　　(D)



【解答】(A)

【詳解】

若 x 所對應的 $f(x)$，必須是唯一的，而且是確定的，則 $y=f(x)$爲一函數

(A)中之 x 有 2 個 $f(x)$值與之對應　∴　(A)不是函數

2.試以代號A，B，C，D塡入下列各題空格中。

其中A表充分非必要，B表必要非充分，C表充要，D表非充分非必要。

(1)設a，$b\in R$，則$a^2+b^2=0$ 爲$ab=0$ 之__________條件。

(2)設a，$b\in Z$，若$ab\neq 0$，則$a|b$且$b|a$爲$a=b$之__________條件。

(3)設a，$b\in R$，則$a=2$ 爲$a^2+b^2-4a+4=0$ 之__________條件。

(4)設a，$b\in R$，則$a+b\leq 1$ 爲$a^2+b^2\leq 1$ 之__________條件。

(5)已知p爲q之充分條件，s爲q之充要條件，r爲s之必要條件，則p爲r之____條件。

【解答】(1) A　(2) B　(3) B　(4) D　(5) A

【詳解】

(1) a，$b\in R$，$a^2+b^2=0$　$\Rightarrow$　$a=0$，$b=0$　$\Rightarrow$　$ab=0$

但$ab=0$，如$a=0$，$b=2$　$\Rightarrow$　$a^2+b^2=4\neq 0$　∴　爲充分非必要條件

(2) a，$b\in Z$，$ab\neq 0$，$a=b\Rightarrow a|b$且$b|a$　，但$a|b$且$b|a$　$\Rightarrow$　$a=b$不合，有可能$a=-b$

∴　爲必要非充分條件

(3) a，$b\in R$，$a^2+b^2-4a+4=0$

$\Rightarrow$　$(a-2)^2+b^2=0$　$\Rightarrow$　$a-2=0$ 且$b=0$　$\Rightarrow$　$a=2$ 且$b=0$

$a=2$ 時，$a^2+b^2-4a+4=2^2+b^2-4\times 2+4=b^2$，不一定要爲 0，∴爲必要非充分條件

(4) a，$b\in R$

若$a=-5$，$b=-2$　$\Rightarrow$　$a+b\leq 1$，但$a^2+b^2=29$

若$a=0.6$，$b=0.6$　$\Rightarrow$　$a^2+b^2=0.72\leq 1$，但$a+b=1.2$

∴　爲非充分非必要條件

(5)由題意知$p\Rightarrow q$，$s\Leftrightarrow q$，$s\Rightarrow r$，則$p\Rightarrow s$，$s\Rightarrow r$，則$p\Rightarrow r$，　∴　p爲r的充分非必要條件

3.設函數$f(x)$滿足$f(x)+1=f(x+1)$，$f(1)=10$，若$f(n)=351$，則$n=$

(A) 341　(B) 342　(C) 343　(D) 344　(E) 345。

【解答】(B)

【詳解】

$$\begin{aligned} &f(1)+1=f(2)\\ &f(2)+1=f(3)\\ &f(3)+1=f(4)\\ &\quad\vdots\\ +)\ &f(n-1)+1=f(n) \\ \hline &f(1)+(n-1)=f(n)\end{aligned}$$

$\therefore\ 10+(n-1)=351$

$\therefore\ n=342$

4. (複選)設a，b，c爲實數，已知$ab=0$，$bc=0$，$ca=0$，則

(A) $a^2+b^2+c^2=0$　(B) $(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)=0$　(C) $a=b=c=0$

(D) $abc=0$　(E) $(a-b)(b-c)(c-a)=0$

【解答】(B)(D)(E)

【詳解】

$ab=0$，$bc=0$，$ca=0$

$\Leftrightarrow$　a，b，c中至少有 2 個爲 0

$\Leftrightarrow$　$a^2+b^2=0$，$b^2+c^2=0$ 或$c^2+a^2=0$

$\Leftrightarrow$　$(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)=0 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} abc=0$

而$a^2+b^2+c^2$可能大於 0（如$a=0$，$b=0$，$c=3$）

又a，b，c中至少 2 個同爲 0

$\therefore$　$(a-b)(b-c)(c-a)=0$

5. (複選)設函數$f(x+5)=f(x)$對任何實數x都成立，且當$3<x\le 8$時$f(x)=2x+7$，則下列敘述何者正確？

(A) $f(5)=17$　(B) $f(-36)=15$　(C) $f(1003)=23$　(D) $f(3)=23$　(E) $f(0)=0$。

【解答】(A)(B)(C)(D)

【詳解】

(A) $f(5)=2\times 5+7=17$

(B) $f(-36)=f(-36+5)=f(-31)=f(-31+5)=f(-26)=\cdots=f(-1)=f(4)=15$

(C) $f(1003)=f(3)=f(8)=23$

(D) $f(3)=f(8)=23$

(E) $f(0)=f(5)=17$

二、填充題(每題 10 分)

6.命題：$\triangle ABC$中，若$\angle A$是最大角，則$\angle A\ge 60°$，則此命題的對偶命題是__________。

【解答】若 $0°<\angle A<60°$，則$\angle A$ 不是$\triangle ABC$ 中之最大角

【詳解】「若 p 則 q」之對偶命題爲「若非 q，則非 p」

7.設x，$k \in R$。

(1) $x=\sqrt{2}$ 爲$x^2=2$ 的__________條件。

(2)若$|x+1| \le 5$ 爲$|x-2| \le k$的必要條件，則k之最大值爲__________。

【解答】(1)充分　(2) 2

【詳解】

(1)$\because$　$x=\sqrt{2}$　$\Rightarrow$　$x^2=2$　$\therefore$　充分

(2) $|x+1| \le 5$　$\Rightarrow$　$-5 \le x+1 \le 5$　$\Rightarrow$　$-6 \le x \le 4$　$\Rightarrow$　$-8 \le x-2 \le 2$，$\therefore k$之最大值 2

8.圓之內接三角形ABC中，若$\angle A=2\angle B$，則$\overline{BC}$與$2\overline{AC}$誰較大？__________。

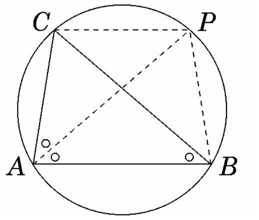
【解答】$2\overline{AC}$ 較大

【詳解】

作$\angle A$ 之角平分線交圓於 P

由$\angle A=2\angle B$　$\Rightarrow$　$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CP}=\overset{\frown}{PB}$　$\Rightarrow$　$\overline{AC}=\overline{CP}=\overline{PB}$

於$\triangle BCP$ 中，二邊之和大於第三邊，$\Rightarrow$　$\overline{BP}+\overline{CP}>\overline{BC}$　$\Rightarrow$　$2\overline{AC}>\overline{BC}$，故得證



9.「a，b均是有理數」是 「$a+b$，$a-b$均是有理數」的__________條件。

「a，b均是無理數」是 「$a+b$，$a-b$均是無理數」的__________條件。（充分，必要，充要，都不是）

【解答】(1)充要條件　(2)都不是

【詳解】

(1) a，b 是有理數　$\Rightarrow$　$a+b$，$a-b$ 是有理數，這是顯而易見的反之，若 $a+b$，$a-b$ 是有理數，則$\dfrac{(a+b)+(a-b)}{2}=a$，$\dfrac{(a+b)-(a-b)}{2}=b$亦均爲有理數

(2)反例：若 $a=2+\sqrt{3}$，$b=2-\sqrt{3}$ 均爲無理數，但 $a+b=4$ 是一有理數

若 $a+b=2+\sqrt{3}$，$a-b=2-\sqrt{3}$　$\Rightarrow$　$a=2$ 是有理數

10.設集合$A=\{1，2，3，4\}$，若f與g均爲由A到A的函數，f：$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$，$g$：$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$，

其中上排對應同一直行中下排的元素，將$f \circ g$表成上下排對應的型式爲__________。

【解答】$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$

【詳解】$f \circ g=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$

11.設a爲正實數，若$|x-1| \le a$是 $-3 \le x \le 7$ 的必要條件，則a之最小值 $=$__________。

【解答】6

【詳解】

集合 A：$|x-1|\le a$，$a>0\Rightarrow\quad -a<x-1<a\quad\Rightarrow\quad 1-a<x<1+a$

集合 B：$-3\le x\le 7$

由題意得知：$B\subset A$

$\Rightarrow\quad 1-a\le -3$ 且 $1+a\ge 7\quad\Rightarrow\quad a\ge 4$ 且 $a\ge 6$

$\Rightarrow\quad a\ge 6$，此即：a 之最小值 $=6$

12.二次方程式$ax^2+bx+c=0$之一根爲他根的二倍，其充要條件是__________。

【解答】$2b^2-9ac=0$，$a\ne 0$

【詳解】

設$ax^2+bx+c=0$之二根爲α，2α，$\alpha\in R$（由題意得知）

由根與係數的關係 $\Rightarrow\quad \begin{cases}\alpha+2\alpha=3\alpha=\dfrac{-b}{a}\\ \alpha\cdot 2\alpha=2\alpha^2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$

消去$\alpha\quad\Rightarrow\quad \dfrac{c}{a}=2\alpha^2=2\cdot(\dfrac{-b}{3a})^2\quad\Rightarrow\quad 9ac=2b^2\quad\Rightarrow\quad 2b^2-9ac=0$，$a\ne 0$

13.設a是整數，「$a^2=4b+1$，b爲非負整數」是「a爲奇數」的什麼條件？__________（充分，必要，充要，都不是）。

【解答】充要條件

【詳解】

$a^2=4b+1$ 是奇數 $\Rightarrow\quad a^2$是奇數 $\Rightarrow\quad a$是奇數

反之，若a是奇數，則可令$a=2k+1$

隨之，$a^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1=4b+1$，其中$b=k^2+k$

14.若A爲綠色，則B爲紅色；若A非綠色，則B爲白色；若B爲紅色，則C爲藍色；若C非黑色，則B爲黃色；若C爲藍色，則D爲非白色，今知D爲白色，則C爲__________色。

【解答】黑

【詳解】

(1)$\because$ 「若 C 爲藍色，則 D 爲非白色。」 $\therefore$ D 爲白色，則 C 爲非藍色

(2)$\because$ 「若 B 爲紅色，則 C 爲藍色。」 $\therefore$ C 爲非藍色，則 B 爲非紅色

(3)$\because$ 「若 A 爲綠色，則 B 爲紅色。」 $\therefore$ B 爲非紅色，則 A 爲非綠色

(4)$\because$ 「若 A 爲非綠色，則 B 爲白色。」 $\therefore$ B 爲白色，當然 B 爲非黃色

(5)$\because$ 「若 C 非黑色，則 B 爲黃色。」 $\therefore$ C 爲黑色

15.若 $1\le x\le 5$ 爲$|x-a|\le b$之充要條件，則數對$(a，b)=$__________。

【解答】(3，2)

【詳解】

$|x-a|\le b\quad\Leftrightarrow\quad b>0$ 且 $-b\le x-a\le b$

$\Leftrightarrow\quad b>0$，$a-b\le x\le a+b\quad\Leftrightarrow\quad 1\le x\le 5$

$\therefore \begin{cases} a+b=5 \\ a-b=1 \end{cases}$ $\therefore$ $a=3$，$b=2$

16.若p，q，r爲三個敘述，已知p爲q的充分條件，r爲q的必要條件，q爲$p \vee r$的______條件。
【解答】充分
【詳解】
已知 $p \Rightarrow q$，$q \Rightarrow r$ $\therefore$ $p \Rightarrow r$
$\therefore$ $p \vee r \Leftrightarrow r$（另外 $p \wedge r \Leftrightarrow p$）
$\therefore$ $q \Rightarrow p \vee r$，故 q 爲 $p \vee r$ 的充分條件

17.「王同學至少是 17 歲」的否定敘述爲__________。
【解答】王同學至多是 16 歲
【詳解】
王同學至少是 17 歲 $\Leftrightarrow$ 王同學的年齡 ≥ 17
否定：王同學的年齡 < 17 $\Leftrightarrow$ 王同學的年齡 $\leq 16 \Leftrightarrow$ 王同學至多是 16 歲

18.設函數$f(x)=\dfrac{2x+5}{x-2}$，$x \in R$，$x \neq 2$，則 $f^{-1}(x)=$__________。
【解答】$f^{-1}(x)=\dfrac{2x+5}{x-2}$，$x \neq 2$
【詳解】
令$y=\dfrac{2x+5}{x-2}$，$x \neq 2 \Rightarrow$ $xy-2y=2x+5$ $\Rightarrow$ $xy-2x=2y+5$
$\Rightarrow$ $x(y-2)=2y+5 \Rightarrow$ $y \neq 2$ $\Rightarrow$ $x=\dfrac{2y+5}{y-2}=f^{-1}(y)$ ，$\therefore$ $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+5}{x-2}$ ，$x \neq 2$

19.設$f(x)=a(2^x)+b$，a，b爲實數，已知$f(1)=7$，$f(2)=13$，則$f(3)$之值爲__________。
【解答】25
【詳解】
$f(1)=7$，$f(2)=13$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} 2a+b=7 \\ 4a+b=13 \end{cases}$ $\therefore$ $a=3$，$b=1$
$\therefore$ $f(x)=3(2^x)+1$ $\therefore$ $f(3)=25$

20.設函數f滿足$f(x-2)=x^2-2x$，$x \in R$，則$f(x)=$__________。
【解答】x^2+2x
【詳解】
於$f(x-2)=x^2-2x$中，令$x-2=t$ $\Rightarrow$ $x=t+2$
$\Rightarrow$ $f(t)=(t+2)^2-2(t+2)=t^2+2t$
$\therefore$ $f(x)=x^2+2x$

21.設$f(x)=3x^2-4x+5$，$g(x-1)=f(2x+1)$，$h(3x+2)=g(x+1)$，則$h(5)=$__________，h

$(x) =$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】$h(5) = 124$；$h(x) = \frac{1}{3}(4x^2 + 36x + 92)$

【詳解】

(1) $h(3x+2) = g(x+1)$，令$x = 1 \Rightarrow h(5) = g(2)$

$g(x-1) = f(2x+1)$，令$x = 3 \Rightarrow g(2) = f(7)$

$\therefore\ h(5) = g(2) = f(7) = 3 \cdot 7^2 - 4 \cdot 7 + 5 = 147 - 28 + 5 = 124$

(2) $h(3x+2) = g(x+1)$，令 $3x + 2 = t \Rightarrow x = \frac{t-2}{3}$代入

$\Rightarrow h(t) = g(\frac{t-2}{3} + 1) = g(\frac{t+1}{3})$

$g(x-1) = f(2x+1)$，令$x - 1 = \frac{t+1}{3} \Rightarrow x = \frac{t+4}{3}$代入

$\Rightarrow g(\frac{t+1}{3}) = f(2 \cdot \frac{t+4}{3} + 1) = f(\frac{2t+11}{3})$

$\therefore\ h(x) = g(\frac{x+1}{3}) = f(\frac{2x+11}{3}) = 3(\frac{2x+11}{3})^2 - 4 \cdot \frac{2x+11}{3} + 5$

$= \frac{12x^2 + 108x + 276}{9} = \frac{4x^2 + 36x + 92}{3}$

22.設$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3，0 \le x < 2 \\ 9 - x，2 \le x < 6 \end{cases}$，且$f(x+6) = f(x)$，則$f(14) + f(f(13))$之值爲＿＿＿＿＿＿。

【解答】12

【詳解】

$f(14) = f(8+6) = f(8) = f(6+2) = f(2) = 9 - 2 = 7$

$f(13) = f(1) = 1^2 + 3 = 4$

$\therefore\ f(f(13)) = f(4) = 9 - 4 = 5$

$\therefore\ f(14) + f(f(13)) = 7 + 5 = 12$

23.試判斷下列各函數之爲奇函數或偶函數或兩者皆不是。

(1) $f(x) = x^2 + 1$＿＿＿＿＿＿。

(2) $f(x) = x^3$＿＿＿＿＿＿。

(3) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$＿＿＿＿＿＿。

(4) $f(x) = x^2 + x + 1$＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1)偶　(2)奇　(3)奇　(4)都不是

【詳解】

(1) $f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$，$\therefore$ f爲偶函數

(2) $f(x) = x^3 \Rightarrow f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$，$\therefore$ f爲奇函數

(3) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} \Rightarrow f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = \frac{-x^3}{x^2+1} = -f(x)$，$\therefore$ f爲奇函數

(4) $f(x) = x^2 + x + 1 \Rightarrow f(-x) = (-x)^2 + (-x) + 1 = x^2 - x + 1 \neq f(x) \Rightarrow f(x)$都不是

24.設函數$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5x-x^2-6}}$，則$f$之定義域$D=$__________，值域$f(D)=$__________。

【解答】$(2，3)$；$[2，\infty)$

【詳解】

$5x-x^2-6>0 \quad \Rightarrow \quad x^2-5x+6<0$

$\Rightarrow \quad (x-2)(x-3)<0 \quad \Rightarrow \quad 2<x<3$

$\therefore \quad D=\{x \mid x\in R，2<x<3\}=(2，3)$

令$t=5x-x^2-6=-x^2+5x-6=-(x-\dfrac{5}{2})^2+\dfrac{1}{4}$，$2\le x<3$

當$x=\dfrac{5}{2}$時，t有最大值$\dfrac{1}{4}$；當$x=2$或3時，t有最小值0

$\Rightarrow$ 當$2<x<3$時，$0<5x-x^2-6\le\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow \quad 0<\sqrt{5x-x^2-6}\le\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{\sqrt{5x-x^2-6}}\ge 2$，$f(x)\ge 2$

$\therefore$ 值域$f(D)=\{y \mid y\in R，y\ge 2\}=[2，\infty)$

25.若$f(\dfrac{x-1}{x+1})=\dfrac{x+1}{x-1}$，則$f(\dfrac{1}{2})=$__________及$f(x)=$__________。

【解答】2；$\dfrac{1}{x}$

【詳解】

$\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x=3$

$\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{4}{2}=2$，令$\dfrac{x-1}{x+1}=\alpha \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{-\alpha-1}{\alpha-1}$

$f(\alpha)=\dfrac{-2}{-2\alpha}=\dfrac{1}{\alpha} \quad \therefore \quad f(x)=\dfrac{1}{x}$

26.(1)設$a，b\in R$，證明：$|a|+|b|\ge|a-b|$，且等號成立之充要條件爲$ab\le 0$。

(2)設$x\in R$，求$\sqrt{x^2-6x+9}+|x|+|x+5|$的最小值。

【解答】(2) 8

【詳解】

(1) $(|a|+|b|)^2=a^2+2|a||b|+b^2$

$(|a|-|b|)^2=a^2-2|a||b|+b^2$

$\Rightarrow \quad |ab|\ge -ab$

若$|ab|=-ab \quad \Rightarrow \quad ab\le 0$

$(|a|+|b|)^2\ge(a-b)^2 \quad \Rightarrow \quad |a|+|b|\ge|a-b|$

(2) $\sqrt{x^2-6x+9}$有最小值$0 \quad \Rightarrow \quad x=3$

$|x+5|=0 \quad \Rightarrow \quad x=-5$

$|x|=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$

令$y = |x-3| + |x| + |x+5|$

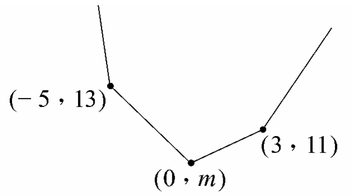
① $x \geq 3 \quad \Rightarrow \quad y = x - 3 + x + x + 5 = 3x + 2$

② $0 \leq x < 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3 - x + x + x + 5 = x + 8$（$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 8$）

③ $-5 \leq x < 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3 - x - x + x + 5 = -x + 8$

④ $x < -5 \quad \Rightarrow \quad y = 3 - x - x - x - 5 = -3x - 2$

$\therefore \quad m = 8$



27.設$f(x) = x - \dfrac{1}{x}$，$x > 0$，試求$f(x)$之反函數$f^{-1}(x)$。

【解答】$f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 4})$

【詳解】

令$y = x - \dfrac{1}{x}$，$x > 0$

$\Rightarrow \quad xy = x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - yx - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2}$

$\because \quad x > 0$，故取「+」號，即$x = \dfrac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2} = f^{-1}(y)$

$\therefore \quad f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 4})$，$x \in R$