高雄市明誠中學 高二(下)平時測驗 日期：95.05.29					
範圍	3-3 期望值	班級	普二 班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. 擲 3 個硬幣，出現 3 正面可得 12 元，2 正面可得 8 元，一正面可得 4 元，為了公平起見，出現三反面時，應賠多少元？(A)20 元 (B)24 元 (C)36 元 (D)40 元 (E)48 元

【解答】(E)

【詳解】

投 3 個硬幣，其樣本空間元素個數 $n(S)=2^3=8$，設出現三反面應賠 x 元則

得款數	12	8	4	$-x$
機率 p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

欲公平，則必須期望值 $E=0 \quad \Rightarrow \quad 12\times\frac{1}{8}+8\times\frac{3}{8}+4\times\frac{3}{8}+(-x)\times\frac{1}{8}=0$

$\therefore \quad x=48$，即賠 48 元

2. (複選)投擲一公正硬幣n次（$n\in N$），出現正面次數的期望值為E_n，下列何者正確？

(A) $E_2=1$ (B) $E_4=2$ (C) $E_8=4$ (D) $E_{10}=8$ (E) $E_n=2^{\frac{n}{2}-1}$

【解答】(A)(B)(C)

【詳解】

投擲一次，正面平均值 $E_1=\frac{1}{2}$，$\therefore \quad E_n=nE_1=\frac{n}{2} \quad \Rightarrow \quad E_2=1$，$E_4=2$，$E_8=4$，$E_{10}=5$

二、填充題(每題 10 分)

1. 某次考試中，有一部分試題採用多重選擇題，每題有五個敘述，其中正確的敘述可能不只一個，但也可能一個也沒有，必須完全選對才得 5 分，否則倒扣S分。某考生決定靠運氣瞎猜，而此部分得分期望值為 0，若他對單獨一題猜對的機率為P，則$P=$________，$S=$__________。

【解答】$\frac{1}{32}$；$\frac{5}{31}$

【詳解】 每題有 5 個敘述，猜答方式有 $2^5=32$ 種，

答對只有一種可能，故 $P=\frac{1}{32}$；答錯機率 $1-P=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$

又答對得 5 分，答錯倒扣S分且期望值為 0，$\therefore \quad 5\times\frac{1}{32}+(-S)\times\frac{31}{32}=0 \quad \Rightarrow \quad S=\frac{5}{31}$

2. 將 5 個大小形狀相同，顏色不同的球，全投入 3 個不同的袋子中，則

(1)每個袋子中均有球的機率為__________。 (2)空袋子個數的期望值為__________個。

【解答】(1) $\frac{50}{81}$ (2) $\frac{32}{81}$

【詳解】5 個不同顏色的球放入 3 個不同的袋子中，其放入法有$3^5=243$種

(1)每個袋子均有球，依個數安排可分成兩類$\begin{cases}(3,1,1)\\(2,2,1)\end{cases}$

放法有$C_3^5\times C_1^2\times C_1^1\times\dfrac{3\,!}{2\,!}+C_2^5\times C_2^3\times C_1^1\times\dfrac{3\,!}{2\,!}=60+90=150$，每袋均有球機率$\dfrac{150}{243}=\dfrac{50}{81}$

(2)

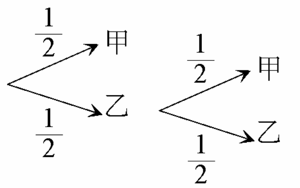
空袋子個數	0	1	2
機　　　率	$\dfrac{150}{243}$	$\dfrac{90}{243}$	$\dfrac{3}{243}$

∴　空袋子個數的期望值$=0\times\dfrac{150}{243}+1\times\dfrac{90}{243}+2\times\dfrac{3}{243}=\dfrac{96}{243}=\dfrac{32}{81}$

3. 甲、乙兩人下棋，兩人棋力相當，規定先勝 3 局者可得獎金 1000 元，但每次對局均須分出勝負，不許和局。今兩人進行到甲勝 2 局，乙勝 1 局時，比賽因故停止，依公平的原則，來分此 1000 元獎金，則甲應得__________元。

【解答】750

【詳解】若比賽不終止，繼續比到先勝 3 局才停，其情形有

（甲勝 2 局，乙勝 1 局）


∴　甲先勝 3 局的機率$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$，故甲應得$1000\times\dfrac{3}{4}=750$元

4. 某人參加保齡球賽，每場比賽得勝機率爲$\dfrac{1}{3}$，失敗機率爲$\dfrac{2}{3}$。今參加五場比賽，規定勝一場可得獎金 1000 元，敗一場罰款 400 元，則

(1)此人至少贏得 3000 元的機率爲__________。

(2)此人獲得獎金的期望值爲__________。

【解答】(1)$\dfrac{11}{243}$　(2)$\dfrac{1000}{3}$元

【詳解】

比賽結果	5 勝	4 勝 1 負	3 勝 2 負	2 勝 3 負	1 勝 4 負	5 負
所得款額	5000	3600	2200	800	-600	-2000
機率	$C_5^5(\frac{1}{3})^5$	$C_4^5(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})$	$C_3^5(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^2$	$C_2^5(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^3$	$C_1^5(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^4$	$(\frac{2}{3})^5$

(1)此人至少贏 3000 元，則五場比賽中須勝 4 場輸 1 場或勝 5 場

$\therefore$ 至少贏 3000 元的機率$=C_4^5(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})+C_5^5(\frac{1}{3})^5=\frac{10+1}{243}=\frac{11}{243}$

(2)期望值$=5000(\frac{1}{3})^5+3600C_4^5(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})+2200C_3^5(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^2+800C_2^5(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^3$

$-600C_1^5(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^4-2000(\frac{2}{5})^5=\frac{1000}{3}$（元）

5. 某人投籃命中率為 0.4，若讓他連續投籃直到中了才停止，則其投籃次數的期望值=____次。

【解答】$\frac{5}{2}$

【詳解】

每次投籃命中率為 0.4，不中的機率為 0.6，而命中後即停止

故投籃次數的期望值$E=1(0.4)+2(0.6)(0.4)+3(0.6)^2(0.4)+\cdots$

$0.6E=\quad 1(0.6)(0.4)+2(0.6)^2(0.4)+3(0.6)^3(0.4)+\cdots$

兩式相減 $(1-0.6)E=0.4+(0.6)(0.4)+(0.6)^2(0.4)+\cdots$

$(1-0.6)E=\frac{0.4}{1-0.6}$ .....無窮等比級數

$E=(0.4)\times\frac{1}{(1-0.6)^2}=\frac{5}{2}$（次）

6. 取球比賽，設袋中有 1 號球 2 個，2 號球 4 個，3 號球 6 個，…，n號球 $2n$個，今自袋中取一球，若取得r號球可得 $3r$元，則期望值為__________元。

【解答】$2n+1$

【詳解】

全部的球共 $2+4+6+\cdots+2n=2(1+2+3+\cdots+n)=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)$個

r 號球有$2r$ 個，每個可得$3r$ 元$\Rightarrow$ r 號球價值$2r\times 3r$ 元

所以總價值$\sum_{r=1}^{n}2r\times 3r=6\cdot\sum_{r=1}^{n}r^2=6\cdot(1^2+2^2+\cdots+n^2)=6\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=n(n+1)(2n+1)$

期望值即平均值知所求為$\frac{n(n+1)(2n+1)}{n(n+1)}=2n+1$

7. 投擲三個均勻的硬幣一次，若出現三正面得 8 元，二正面得 3 元，一正面得 1 元，為使賭局公平，出現三反面應賠__________元。

【解答】20

【詳解】

投擲三硬幣，出現三反面賠x元，則

$8\times C_3^3(\frac{1}{2})^3+3\times C_2^3(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^2+1\times C_1^3(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})+(-x)\times C_0^3(\frac{1}{2})^3=0 \quad\Rightarrow\quad x=8+9+3=20$

8. 袋中有編號 1，2，3 的三個白球，編號 1，2，3，4 的四個紅球，編號 1，2，3，4，5

的五個黑球，今任意抽取兩球，求

(1)兩球不同色的機率爲__________。　(2)兩球號碼和的期望值爲__________。

【解答】(1) $\dfrac{47}{66}$　(2) $\dfrac{31}{6}$

【詳解】

$$\begin{cases} 白：1,2,3 \\ 紅：1,2,3,4 \\ 黑：1,2,3,4,5 \end{cases}$$

(1)
$$\frac{\overset{白紅}{C_1^3C_1^4}+\overset{紅黑}{C_1^4C_1^5}+\overset{黑白}{C_1^5C_1^3}}{C_2^{12}}=\frac{12+20+15}{66}=\frac{47}{66}$$

(2)$$\left[\frac{(1+2+3)+(1+2+3+4)+(1+2+3+4+5)}{12}\right]\times 2=\frac{31}{6}$$

9. 五骰子投擲一次，若五骰子同點，則可得 1200 元，若恰四骰子同點，則可得 600 元，則投擲一次之期望值爲__________元。

【解答】$\dfrac{25}{2}$

【詳解】五骰子同點⇒五同；四骰子同點⇒四同一異

獎金	1200	600
機率	$6\times(\frac{1}{6})^5$	$C_2^6\times 2!\times\frac{5\,!}{4\,!}\times(\frac{1}{6})^5$

∴　期望值爲 $1200\times(\dfrac{1}{6})^4+600\times\dfrac{25}{6^4}=\dfrac{25}{2}$ 元

10.A袋中有 100 元 5 張，10 元 3 張，1 元 4 張，B袋中有 10 元鈔票 10 張，

(1)自A袋中任取二張，其期望值爲__________。

(2)自A袋中取一張放入B袋，再自B袋取二張，求期望值爲__________。

【解答】(1) 89　(2) $\dfrac{289}{11}$

【詳解】

(1) $E=2(\dfrac{100\times5+10\times3+1\times4}{12})=2\cdot\dfrac{89}{2}=89$　(2) $E=2(\dfrac{\frac{89}{2}\times1+10\times10}{11})=2\times\dfrac{289}{22}=\dfrac{289}{11}$

11.一袋中有 1 號球 1 個，2 號球 2 個，3 號球 3 個，4 號球 4 個，

(1)從袋中任取一球，若取到k號球可得 $5-k$元，則此試驗得獎金的期望值爲________元。

(2)從袋中一次取兩球，取到的號碼和爲k時，可得 $10-k$元，則此試驗得獎金的期望值爲__________元。

【解答】(1) 2　(2) 4

【詳解】

Sol 一

(1)袋中球的總數 $=1+2+3+4=10$，此試驗得獎金的機率分布如下

獎金 X	5 - 1	5 - 2	5 - 3	5 - 4
機率	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

故得獎金的期望值 $E(X)=4\times\frac{1}{10}+3\times\frac{2}{10}+2\times\frac{3}{10}+1\times\frac{4}{10}=2$（元）

(2)一次取兩球，設此試驗得獎金的金額爲 X 元，則機率分布如下：

$k=3\Rightarrow(1+2)\Rightarrow C_1^1C_1^2$

$k=4\Rightarrow(1+3);(2+2)\Rightarrow C_1^1C_1^3+C_2^2=4$

$k=5\Rightarrow(1+4);(2+3)\Rightarrow C_1^1C_1^4+C_1^2C_1^3=10$

$k=6\Rightarrow(2+4);(3+3)\Rightarrow C_1^2C_1^4+C_2^3=11$

$k=7\Rightarrow(3+4)\Rightarrow C_1^3C_1^4=12$

$k=8\Rightarrow(4+4)\Rightarrow C_2^4=6$

X	7	6	5	4	3	2
機率	$\frac{2}{C_2^{10}}$	$\frac{4}{C_2^{10}}$	$\frac{10}{C_2^{10}}$	$\frac{11}{C_2^{10}}$	$\frac{12}{C_2^{10}}$	$\frac{6}{C_2^{10}}$

故獎金的期望值 $E(X)=7\times\frac{2}{45}+6\times\frac{4}{45}+5\times\frac{10}{45}+4\times\frac{11}{45}+3\times\frac{12}{45}+2\times\frac{6}{45}=\frac{180}{45}=4$（元）

Sol 二：(參閱第 16 題)

(1) $5-\frac{2\times4+1}{3}=2$ (2) $10-2\times\frac{2\times4+1}{3}=4$

12.一盒子中有 5 個紅球，3 個白球，且每球被取的機率相同，

(1)若一次取一球，則取到白球個數的期望值爲__________。

(2)若一次取三球，則取到白球個數的期望值爲__________。

【解答】(1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{9}{8}$

【詳解】

(1)取到白球個數的期望值 $\frac{3}{5+3}=\frac{3}{8}$

(2)取到白球個數的期望值 $E(X)=3\times\frac{3}{8}=\frac{9}{8}$

13.一袋中有 10 元硬幣 3 個，5 元硬幣x個，每個硬幣被取的機會相同，

(1)若從中取一個硬幣時，取得金額的期望值爲 8 元，則$x=$__________。

(2)若$x=4$，則從中取兩個硬幣可得的金額之期望值爲__________ 元。

【解答】(1) 2 (2) $\frac{100}{7}$

【詳解】

(1)期望值 $E(X)=8=\frac{10\times3+5x}{x+3}$，即 $8x+24=30+5x$，所以 $x=2$

(2)期望值 $E(X)=\dfrac{10\times 3+5\times 4}{4+3}=\dfrac{100}{7}$（元）

14.根據統計資料得知，一個 50 歲的人，在一年內存活的機率爲 98.5%，今有一個 50 歲的人參加一年期保險額度爲五十萬元的人壽保險，須繳保費一萬元，則保險公司獲利的期望值爲＿＿＿＿＿。

【解答】2500（元）

【詳解】保險公司獲利的期望值 $=98.5\% \times 10000+1.5\% \times(10000-500000)=2500$（元）

15.同時擲三粒公正的骰子，求

(1)三粒骰子的點數均相同時，可得 300 元；恰有兩粒點數相同時，可得 200 元，則其期望值爲＿＿＿＿＿元。

(2)出現最大點數的期望值爲＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $\dfrac{275}{3}$ (2) $\dfrac{119}{24}$

【詳解】

(1) $E=300\cdot C_1^6(\dfrac{1}{6})^3+200\cdot C_2^6\cdot 2!\cdot\dfrac{3!}{2!}\cdot(\dfrac{1}{6})^2(\dfrac{1}{6})=\dfrac{1800+18000}{216}=\dfrac{275}{3}$

(2) 最大點爲 2 有 2^3-1^3 個，最大點爲 3 有 3^3-2^3 個，…..，最大點爲 6 有 6^3-5^3 個，

$$E=1\cdot\frac{1}{6^3}+2\cdot\frac{2^3-1^3}{6^3}+3\cdot\frac{3^3-2^3}{6^3}+4\cdot\frac{4^3-3^3}{6^3}+5\cdot\frac{5^3-4^3}{6^3}+6\cdot\frac{6^3-5^3}{6^3}$$

$$=\frac{1+14+57+148+305+546}{216}=\frac{119}{24}$$

16.袋中 1 號球 1 個，2 號球 2 個，3 號球 3 個，⋯，n號球n個（$n\in N$），取到k號球可得k元（$1\le k\le n$），假設任取一球得錢的期望值爲E_n元，則

(1) $E_n=$＿＿＿＿＿。 (2) $E_{10}=$＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $\dfrac{2n+1}{3}$ (2) 7

【詳解】

$$(1)\ E_n=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2}{1+2+3+\cdots\cdots+n}=\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2n+1}{3}$$

$$(2)E_{10}=\frac{2\times 10+1}{3}=7$$

17.袋中有鈔票 1000 元 4 張，500 元 3 張，100 元 3 張，每張被取到的機會相等，今任取 3 張，則所得錢數的期望值爲＿＿＿＿＿元。

【解答】1740 元

【詳解】

任取 3 張錢數之期望值是任取一張錢數期望值之 3 倍

$\Rightarrow$ 所求期望值 $= 3\cdot(\dfrac{1000\times4+500\times3+100\times3}{10}) = 1740$

18.投擲一公正的骰子一次，則出現點數的期望值 ＝ ________；又同時投擲兩公正的骰子，則出現點數和的期望值 ＝ __________ 。

【解答】$\dfrac{7}{2}$；7

【詳解】(1) 投擲一公正骰子出現點數的期望值爲 $\dfrac{1+2+3+4+5+6}{6}=\dfrac{21}{6}=\dfrac{7}{2}$

(2) 投擲兩公正骰子點數和的期望值 $\dfrac{7}{2}\times2 = 7$

19.袋中有 5 個白球，3 個黑球，今自袋中隨機抽出 3 個球，

(1)取出的球中恰有 2 個白球的機率。 (2)取出的白球個數的期望值。

【解答】(1) $\dfrac{15}{28}$ (2) $\dfrac{15}{8}$

【詳解】(1) $\dfrac{C_2^5C_1^3}{C_3^8}=\dfrac{15}{28}$ (2) $\dfrac{5}{5+3}\times3=\dfrac{15}{8}$

20.依據過去經驗，在松山機場排班的計程車，載客人數 1 人的機率是 60%，2 人的機率是 30%，3 人的機率是 5%，4 人的機率是 5%，請問在松山機場一部計程車載客人數的期望值是多少？

【解答】1.55 人

【詳解】 $0.6\times1+0.3\times2+0.05\times3+0.05\times4=1.55$（人）

21.某人擲二骰子，若擲出之點數和爲 9 時，可得 100 元，並得繼續投擲之權利，若第二回又擲出 9 點，則又可得 100 元，並得繼續投擲，將此方法重複進行時，則此人所得之期望值爲何？

【解答】12.5 元

【詳解】點數和爲 9：$\begin{cases}(3,6)\text{有 2 種}\\(4,5)\text{有 2 種}\end{cases}$，共 4 種

$\therefore$ 得錢機率 $=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$，不得之機率 $=1-\dfrac{1}{9}=\dfrac{8}{9}$

X	100	200	300	400	500	600	⋯
機率	$\frac{1}{9}\times\frac{8}{9}$	$\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}\times\frac{8}{9}$	$(\frac{1}{9})^3\times\frac{8}{9}$	$(\frac{1}{9})^4\times\frac{8}{9}$	$(\frac{1}{9})^5\times\frac{8}{9}$	$(\frac{1}{9})^6\times\frac{8}{9}$	⋯

$E(X)=100\times(\frac{1}{9})(\frac{8}{9})+200(\frac{1}{9})^2(\frac{8}{9})+300(\frac{1}{9})^3(\frac{8}{9})+\cdots$ ……①

$\frac{1}{9}E(X)=100(\frac{1}{9})^2(\frac{8}{9})+200(\frac{1}{9})^3(\frac{8}{9})+\cdots$ ……②

①−②得 $\frac{8}{9}E(X)=100(\frac{1}{9})(\frac{8}{9})+100(\frac{1}{9})^2(\frac{8}{9})+100(\frac{1}{9})^3(\frac{8}{9})+\cdots$

$$=100\times(\frac{8}{9})(\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}})=100\times\frac{8}{9}\times\frac{\frac{1}{9}}{\frac{8}{9}}$$

$\therefore\quad E(X)=100\times\frac{1}{8}=12.5$ 元為所求

22. 5 封寫好的信，任意放入 5 個寫好此 5 人的姓名與地址的信封內，試求：
(1)恰有一封放對的機率。 (2)信放對個數的期望值。

【解答】(1)$\frac{3}{8}$ (2)1

【詳解】

5 封信任意放，放法有 $5!=120$ 種

(1)恰一封放對(其餘 4 封錯排))放法=$C_1^5[\,4\,!-C_1^4\times3\,!+C_2^4\times2\,!-C_3^4\times1!+C_4^4\times0\,!\,]=45$ 種

$\therefore$ 所求機率=$\frac{45}{120}=\frac{3}{8}$

(2)五封信均放對的機率$=\frac{1}{120}$，

恰有四封放對的機率$=0$

恰有三封放對的機率$=\frac{C_3^5}{120}(2\,!-C_1^2\times1!+C_2^2\times0\,!)=\frac{1}{12}$

恰有二封放對的機率$=\frac{C_2^5}{120}(3\,!-C_1^3\times2\,!+C_2^3\times1!-C_3^3\times0\,!)=\frac{1}{6}$

恰有一封放對的機率$=\frac{3}{8}$，全放錯的機率 $=1-\frac{1}{120}-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}-\frac{3}{8}=\frac{44}{120}=\frac{11}{30}$

$\therefore$ 信放對信封的個數之期望值 $=5\times\frac{1}{120}+4\times0+3\times\frac{1}{12}+2\times\frac{1}{6}+1\times\frac{3}{8}+0\times\frac{11}{30}=1$

23.某地發行彩券 50 萬張，其中 1 張獎金 300 萬元，2 張獎金各 50 萬元，50 張獎金各 1 萬元，試問每張彩券獎金的期望值為何？

【解答】9 元

【詳解】

所求期望值為$\frac{3000000\times1+500000\times2+10000\times50}{500000}=9$（元）

24.某人玩擲骰子遊戲，在玩之前，須先付 10 元，若擲出點數k，可得k^2元，問他擲骰子後，可期望淨得多少元？

【解答】$\frac{31}{6}$

【詳解】$\frac{1}{6}[1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2]-10=\frac{31}{6}$（元）

25.一袋中有 9 個硬幣，其中 5 個為 5 元硬幣，而其他 4 個同值，若從袋中一次取出 2 個硬幣之期望值為 6 元，求其他 4 個硬幣之值。

【解答】0.5 元

【詳解】

設另一種硬幣之面值爲 x 元，則$(\frac{5\times 5+4x}{9})\cdot 2=6\Rightarrow\ x=0.5$，故其他 4 個硬幣爲 0.5 元

26.擲一骰子，若出現點數爲偶數，可得與點數相同的元數，若出現點數爲奇數，須賠與點數相同的元數，求每擲一次的期望值。

【解答】$\frac{1}{2}$

【詳解】

X	-1	2	-3	4	-5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$\therefore$ 期望值$=\frac{1}{6}(-1+2-3+4-5+6)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

27.十個樣品中有 2 個不良品，今取出 3 個，求含有不良品的期望值。

【解答】$\frac{3}{5}$

【詳解】

取出不良品之期望個數爲$\frac{2}{10}\times 3\ =\frac{3}{5}$