高雄市明誠中學 高二(下)平時測驗					日期：95.05.22
範圍	3-2 機率(1)	班級	普二 班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. 自 1～10^5之自然數中，任取一數，取到數字之和為 11 的自然數的機率為

(A)0.01300 (B)0.01340 (C)0.01355 (D)0.01365

【解答】(B)

【詳解】

自 1～10^5之自然數可看成 00001、00002、00003、……..、99999、10000，

設一數字和為 11 的 5 位數為$x\ y\ z\ u\ t$

數字和 11 有多少個，即求$x+y+z+u+t=11$ 之整數解有多少組

但 $0\le x$，y，z，u，$t\le 9$，故其中不合者有兩種：

(1) x，y，z，u，t中有一為 11 的解有 5 種，

(2) x，y，z，u，t中有一為 10、另一為 1 的解有 $5\times 4=20$ 種

∴ 所求整數解共有$H^5_{11}-5-20=1340$ 種 ∴ 所求機率為$\dfrac{1340}{10^5}=0.01340$

2. (複選)袋中有紅球 8 個，白球 4 個，今逐次取出一球，取後不放回，則

(A)第二次取到紅球之機率為$\dfrac{2}{3}$ (B)第三次取到白球之機率為$\dfrac{1}{3}$

(C)白球先取完的機率為$\dfrac{1}{3}$ (D)紅球先取完的機率為$\dfrac{2}{3}$

(E)第四次時，取到第二個白球之機率為$\dfrac{5}{12}$

【解答】(A)(B)

【詳解】

(A) $P=\underbrace{\dfrac{8}{12}\cdot\dfrac{7}{11}}_{RR}+\underbrace{\dfrac{4}{12}\cdot\dfrac{8}{11}}_{WR}=\dfrac{2}{3}$

(B) $P=\underbrace{\dfrac{4}{12}\cdot\dfrac{3}{11}\cdot\dfrac{2}{10}}_{WWW}+\underbrace{\dfrac{4}{12}\cdot\dfrac{8}{11}\cdot\dfrac{3}{10}}_{WRW}+\underbrace{\dfrac{8}{12}\cdot\dfrac{4}{11}\cdot\dfrac{3}{10}}_{RWW}+\underbrace{\dfrac{8}{12}\cdot\dfrac{7}{11}\cdot\dfrac{4}{10}}_{RRW}=\dfrac{1}{3}$

(C) $\underbrace{\times\times\cdots\times\times}_{7R4W}R\Rightarrow P=\dfrac{11!}{7!4!}\times\underbrace{\dfrac{8}{12}\cdot\dfrac{7}{11}\cdot\dfrac{6}{10}\cdot\dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{4}{8}\cdot\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{2}{6}}_{7R}\cdot\underbrace{\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}}_{4W}\cdot\dfrac{1}{1}=\dfrac{2}{3}$，

最後一球為 R 的機率$\dfrac{8}{12}$

(D) $\underbrace{\times\times\cdots\times\times}_{8R3W}W\Rightarrow P=\dfrac{11!}{8!3!}\times\underbrace{\dfrac{8}{12}\cdot\dfrac{7}{11}\cdot\dfrac{6}{10}\cdot\dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{4}{8}\cdot\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{1}{5}}_{8R}\cdot\underbrace{\dfrac{4}{4}\cdot\dfrac{3}{3}\cdot\dfrac{2}{2}}_{3W}\cdot\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{3}$，

即最後一球為 W 的機率$\dfrac{4}{12}$

(E) $\underbrace{\times\times\times}_{2R1W}W \Rightarrow P=\frac{3!}{2!}\times\frac{8}{12}\times\frac{7}{11}\times\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{28}{165}$

二、填充題(每題 10 分)

1. 從不大於 600 的自然數中，任取一數，則其與 600 互質之機率為__________。

【解答】$\frac{4}{15}$

【詳解】

Sol一：∵ $600=2^3\times3\times5^2$，1～600 的自然數中，2 的倍數有 $\left[\frac{600}{2}\right]=300$ 個，

3 的倍數有 $\left[\frac{600}{3}\right]=200$ 個，5 的倍數有 $\left[\frac{600}{5}\right]=120$ 個，6 的倍數有 $\left[\frac{600}{6}\right]=100$ 個，

10 的倍數有 $\left[\frac{600}{10}\right]=60$ 個，15 的倍數有 $\left[\frac{600}{15}\right]=40$ 個，30 的倍數有 $\left[\frac{600}{30}\right]=20$ 個

故與 600 互質者共有 $600-(300+200+120-100-60-40+20)=160$ 個

∴ 所求機率 $=\frac{160}{600}=\frac{4}{15}$

Sol二：$600(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})=600\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=160$

2. 某公路一週內共發生了七次車禍，則恰好每天發生一次的機率=__________。

【解答】$\frac{720}{117649}$

【詳解】$P=\frac{7\,!}{7^7}=\frac{720}{117649}$

3. 甲，乙兩人各寫一個兩位數，

(1)甲所寫的數字與乙所寫的數字相同的機率為______________。

(2)甲所寫的數字與乙所寫的數字相異的機率為______________。

(3)甲所寫的數字大於乙所寫的數字的機率為__________。

(4)甲所寫的十位數、個位數字分別大於乙所寫的十位數、個位數字的機率為__________。

【解答】(1) $\frac{1}{90}$ (2) $\frac{89}{90}$ (3) $\frac{89}{180}$ (4) $\frac{1}{5}$

【詳解】

10 ~ 99 兩位數共 90 個

(1) $P=\frac{C_1^{90}C_1^1}{C_1^{90}\cdot C_1^{90}}=\frac{1}{90}$ (2) $P=\frac{C_1^{90}C_1^{89}}{C_1^{90}\cdot C_1^{90}}=\frac{89}{90}$

(3) 即每次挑 2 個數字大的給甲，小的給乙： $P=\frac{C_2^{90}}{C_1^{90}\cdot C_1^{90}}=\frac{89}{180}$

(4) 十位數、個位數字分別挑 2 個數字大的給甲，小的給乙： $P=\frac{C_2^9C_2^{10}}{90^2}=\frac{1}{5}$

4. 有六雙大小分別不同的鞋子（共 12 隻），假設每隻鞋被選出的機會均等，今從其中任意挑選出四隻，試求

(1) 此四隻恰爲兩雙的機率爲__________。

(2) 四隻皆不成雙的機率爲__________。

(3) 此四隻中恰有 2 隻成一雙之機率爲__________。

【解答】(1) $\dfrac{1}{33}$ (2) $\dfrac{16}{33}$ (3) $\dfrac{16}{33}$

【詳解】

(1) $\dfrac{C_2^6}{C_4^{12}}=\dfrac{1}{33}$ (2) $\dfrac{C_4^6 2^4}{C_4^{12}}=\dfrac{16}{33}$ (3) $\dfrac{C_1^6 C_2^5 2^2}{C_4^{12}}=\dfrac{16}{33}$

5. 甲、乙、丙、丁、戊等五人排成一列，甲不排首，乙不排末之機率爲__________。

【解答】$\dfrac{13}{20}$

【詳解】

(錯排)排容原理：任意排 $-$(甲排首)$-$(乙排末)$+$(甲排首且乙排末)

$=5\,!-4\,!-4\,!+3\,!=5\,!-2\times 4\,!+3\,!=120-48+6=78$，故所求機率爲 $\dfrac{78}{5!}=\dfrac{13}{20}$

6. 袋中有 5 紅球，3 白球；今任取 3 球，每球被取到的機會相等，則 3 球中至少 2 紅球之機率爲__________。

【解答】$\dfrac{5}{7}$

【詳解】3 球中，至少 2 紅球 $\Rightarrow$ 2 紅 1 白及 3 紅球，所求機率 $=\dfrac{C_2^5 C_1^3+C_3^5}{C_3^8}=\dfrac{30+10}{56}=\dfrac{5}{7}$

7. 從 1、2、3、…、9 等九個數字中任取相異兩數，則所取得二數互質的機率爲__________。

【解答】$\dfrac{3}{4}$

【詳解】

反面做法：

任取兩數的方法有 $C_2^9=36$ 種，其中不互質的有(2，4)，(2，6)，(2，8)，(3，6)，(3，9)，(4，6)，(4，8)，(6，8)，(6，9)等 9 種情況

故由 1、2、3、…、9 等九個數字中任取相異兩數，其中互質的機率 $=1-\dfrac{9}{36}=\dfrac{3}{4}$

8. 有 3 個人同時玩猜拳（剪刀、石頭、布），同時出拳一次，則

(1)恰有一人得勝的機率爲__________。 (2)無法分出勝負的機率爲__________。

【解答】(1) $\dfrac{1}{3}$ (2) $\dfrac{1}{3}$

【詳解】

(1)3 人猜拳，其出拳方法有 3^3種，3 人中恰有 1 人勝的選擇有C_1^3種

當勝者出「剪刀」時，其他 2 人只能出「布」1 種，

故勝者的出拳法有剪刀，石頭，布 3 種，其餘 2 人只有 1 種

∴ 所求機率$=\dfrac{C_1^3\times 3\times 1^2}{3^3}=\dfrac{1}{3}$

(2)無人得勝出拳法爲：剪刀，石頭，布 3 人(均出同一種)或(三種均有人出)

令「剪刀」爲a，「石頭」爲b，「布」爲c，則不分勝負的出拳法有

①三同（aaa，bbb，ccc）：方法數 3 種

②三異（abc，acb，bca，bca，cab，cab）：方法數$3!=6$

∴ 所求機率 $=\dfrac{3+6}{3^3}=\dfrac{1}{3}$

9. 有 5 個人同時玩猜拳（剪刀、石頭、布），同時出拳一次，則

(1)恰有一人得勝的機率爲＿＿＿＿＿。 (2)無法分出勝負的機率爲＿＿＿＿＿。

【解答】(1)$\dfrac{5}{81}$ (2)$\dfrac{17}{27}$

【詳解】

(1)5 人猜拳，其出拳方法有 3^5種，5 人中恰有 1 人勝的選擇有C_1^5種

當勝者出「剪刀」時，其他 4 人只能出「布」1 種，同理其餘類推

故勝者的出拳法有 3 種，其餘 4 人只有 1 種 ∴ 所求機率$=\dfrac{C_1^5\times 3\times 1^4}{3^5}=\dfrac{5}{81}$

(2)無人得勝其出拳法爲剪刀，石頭，布均有人出或 5 人均出同一種

令「剪刀」爲a，「石頭」爲b，「布」爲c，則不分勝負的出拳法有

①三同二異（$aaabc$，$bbbac$，$cccab$）： $C_1^3\times\dfrac{5\,!}{3\,!}=60$(三種拳挑 1 種給三同)

②二同二同一異（$aabbc$，$aaccb$，$bbcca$）： $C_2^3\times\dfrac{5\,!}{2\,!\,2\,!}=90$(三種拳挑 2 種給二同)

③五同（$aaaaa$，$bbbbb$，$ccccc$）： $3\times\dfrac{5!}{5!}=3$(三種拳挑 1 種給五同)

∴ 所求機率 $=\dfrac{60+90+3}{3^5}=\dfrac{153}{3^5}=\dfrac{17}{27}$

10.投擲一不均勻骰子一次，其出現點數與其發生的機率成正比，則出現質數點的機率爲＿。

【解答】$\dfrac{10}{21}$

【詳解】

設出現 1 點的機率爲k，則出現 2，3，4，5，6 點的機率分別爲 $2k$，$3k$，$4k$，$5k$，$6k$

∵ $P(S)=1 \quad\Rightarrow\quad k+2k+3k+4k+5k+6k=1 \quad\Rightarrow\quad k=\dfrac{1}{21}$

故出現質數點 2、3、5 的機率爲$\dfrac{2}{21}+\dfrac{3}{21}+\dfrac{5}{21}=\dfrac{10}{21}$

11.袋中有 2 個 2 號球，3 個 3 號球，4 個 4 號球，今由袋中每次取出一球，取後不放回，每個球被取的機會相同，則

(1)前三次取的球都不同號碼的機率爲＿＿＿＿＿＿，

(2)前三次取的球的號碼和爲偶數的機率爲＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $\frac{2}{7}$ ； (2) $\frac{19}{42}$

【詳解】

(1) 前三次取的球都不同號碼 2、3、4 各出現一次有 $3!$ 種 $\Rightarrow 3!\times\frac{2}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{2}{7}$

(2) 三球號碼和爲偶數可分二種情況：(三球均爲偶數)、(二球奇數，另一球偶數)

三球均爲偶數(6 個偶數挑 3 個) $\Rightarrow$ $C_3^6\times 3!=6\times 5\times 4$ 種

二球奇數，另一球偶數 $\Rightarrow$ $C_2^3\times C_1^6\times 3!$ 種

$\therefore$ 所求機率 $=\frac{6\times 5\times 4+C_2^3\times C_1^6\times 3!}{9\times 8\times 7}=\frac{19}{42}$

12.投 3 粒公正的骰子，出現最大點數爲 5，最小點數爲 2 的機率爲＿＿＿＿＿。

【解答】 $\frac{1}{12}$

【詳解】

最大點數 5，最小點數 2，有以下各類：

$(2，2，5)\rightarrow\frac{3!}{2!}=3$，

$(2，5，5)\rightarrow\frac{3!}{2!}=3$，

$(2，x，5)\rightarrow 2\times 3!=12$（$x$ 可爲 3，4）

所求機率 $=\frac{3+3+12}{6^3}=\frac{1}{12}$

13.已知路旁有 10 棵樹，將它們任意編號爲 1，2，3，⋯，9，10，且其中有三棵松樹，則編號爲 4 與 5 都是松樹的機率爲＿＿＿＿＿。

【解答】 $\frac{1}{15}$

【詳解】

Sol 一：

從三棵松樹挑 2 棵編爲 4、5 號的方法數爲 $C_2^3\times 2!\times 8!$

10 棵樹任意編號有 10！方法，故三棵松樹編號爲 4 與 5 的機率 $\frac{C_2^3\times 2!\times 8!}{10!}=\frac{1}{15}$

Sol 二：

10 個號碼挑 3 個給三棵松樹 $C_3^{10}\times 3!$，挑 4 與 5 及另一號碼給三棵松樹 $C_2^2\times C_1^8\times 3!$

所求機率 $\frac{C_2^2\times C_1^8\times 3!}{C_3^{10}\times 3!}=\frac{1}{15}$

14.擲一枚硬幣四次，恰出現三次正面的機率爲＿＿＿＿＿，至少出現三次正面的機率爲＿＿。

【解答】$\frac{1}{4}$；$\frac{5}{16}$

【詳解】

(1)恰三次正面的機率爲 $C_3^4(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{4}$

(2)至少三次正面的機率爲 $C_3^4(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^3+\ C_4^4(\frac{1}{2})^4=\frac{5}{16}$

15.若將四位數 1234 的數字任意重新排列，則恰有兩個數字位置不變的機率爲＿＿＿＿＿，每個數字都改變位置的機率爲＿＿＿＿＿。

【解答】$\frac{1}{4}$；$\frac{3}{8}$

【詳解】

1，2，3，4，重新任意排列，其方法有 4！= 24 種

(1)恰兩個數字位置不變其餘錯排的排列有 $C_2^4\times1\times1\ =6\Rightarrow\ P(A)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$

(2) Sol 一：每個數字位置都改變的排列如下，若 1 的位置改爲 2，則

1	2	3	4
2	1	4	3
	3	4	1
	4	1	3

共有 3 × 3 = 9 種排列每個數字都改變。

Sol 二：如同 4 個人的 4 個人錯排：$1\times4!-4\times3!+6\times2!-4\times1!+1\times0!=9$，機率 $\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$

16.擲一粒骰子三次，第三次出現 1 點的機率爲＿＿＿＿＿，第一次或第三次出現奇數點的機率爲＿＿＿＿＿。

【解答】$\frac{1}{6}$；$\frac{3}{4}$

【詳解】

(1)擲一粒骰子三次，第三次出現 1 的機率與前兩次無關，即爲 $\frac{1}{6}$

(2)第一次或第三次出現奇數點的機率爲：

(第一次出現奇數) +(第三次出現奇數) −(第一次、第三次皆出現奇數)的機率

$=\frac{3}{6}+\frac{3}{6}-\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{3}{4}$

17.袋中有 3 個紅球，2 個白球，1 個黑球，每球被取的機會相同，

(1)若一次取兩球，則兩球同色的機率爲＿＿＿＿＿。

(2)若一次取三球，則三球均不同色的機率爲＿＿＿＿＿。

【解答】(1)$\frac{4}{15}$　(2)$\frac{3}{10}$

【詳解】

(1)　2 紅　2 白$\Rightarrow \dfrac{C_2^3+C_2^2}{C_2^6}=\dfrac{4}{15}$

(2)一次取三球，三球均不同色的機率=$\dfrac{C_1^3C_1^2C_1^1}{C_3^6}=\dfrac{6}{20}=\dfrac{3}{10}$

18.六對夫婦參加一家庭舞會，若舞伴是以抽籤的方式來決定的，則至少有一對夫妻共舞的機率為__________。

【解答】$\dfrac{91}{144}$

【詳解】

6 位先生全部皆不與自己太太共舞 $6!-C_1^6\times 5!+C_2^6\times 4!-C_3^6\times 3!+C_4^6\times 2!-C_5^6\times 1!+C_6^6\times 0!$

至少有一對夫妻共舞的 = 全部 −(6 位先生全部皆不與自己太太共舞)

$6!-(6!-C_1^6\times 5!+C_2^6\times 4!-C_3^6\times 3!+C_4^6\times 2!-C_5^6\times 1!+C_6^6\times 0!)$

$=C_1^6\times 5!-C_2^6\times 4!+C_3^6\times 3!-C_4^6\times 2!+C_5^6\times 1!-C_6^6\times 0!$

$P=\dfrac{1}{6!}(C_1^6\times 5!-C_2^6\times 4!+C_3^6\times 3!-C_4^6\times 2!+C_5^6\times 1!-C_6^6\times 0!)$

$=1-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}-\dfrac{1}{4!}+\dfrac{1}{5!}-\dfrac{1}{6!}=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{120}-\dfrac{1}{720}=\dfrac{91}{144}$

19.自 10^3至 10^6的正整數中任取一數，則既不是平方數，也不是立方數之機率為__________。

【解答】$\dfrac{997948}{999001}$

【詳解】

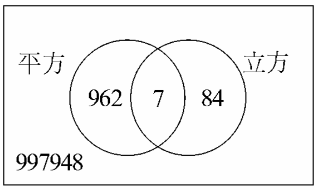
10^3至 10^6的正整數共 $1000000-1000+1=999001$ 個中，

平方數有 32^2，33^2，…，1000^2共 $969-32+1=969$ 個

立方數有 10^3，11^3，…，100^3共 $100-10+1=91$ 個，

六次數有 4^6，5^6，…，10^6共 7 個，

$\therefore\quad P=\dfrac{999001-969-91+7}{999001}=\dfrac{997948}{999001}$



20.甲、乙兩人參加演講比賽，共有 10 個人參賽，若以抽籤方式決定上場的次序，則甲、乙兩人相鄰上場的機率為__________。

【解答】$\dfrac{1}{5}$

【詳解】

$\dfrac{9!\times 2!}{10!}=\dfrac{1}{5}$

21.5 男 5 女圍一圓桌而坐，則恰好男女相間之機率爲__________。

【解答】$\dfrac{1}{126}$

【詳解】$P=\dfrac{\dfrac{5!}{5}\times 5!}{9!}=\dfrac{1}{126}$

22.將 3 個球任意投入 3 個不同的袋中，每次投一個球，連續投 3 次，則

(1)每個袋子均有球的機率爲________。

(2)3 個球均投入同一袋中的機率爲__________。

【解答】(1) $\dfrac{2}{9}$　(2) $\dfrac{1}{9}$

【詳解】

樣本空間 $3^3=27$

(1)將 3 個不同球排在 3 個相異袋子的排列數$=3!=6$ $\Rightarrow$ 機率 $\dfrac{3!}{3^3}=\dfrac{6}{27}=\dfrac{2}{9}$

(2)3 個球全放在同一袋中的排列數 $C_3^3\times P_1^3=3$ $\Rightarrow$ 機率 $\dfrac{3}{27}=\dfrac{1}{9}$

23.同時投擲三粒公正的骰子，則出現點數和爲 5 的倍數的機率爲__________。

【解答】$\dfrac{43}{216}$

【詳解】

同時投擲三粒骰子點數和爲 5 的倍數者有：

(1) 點數和 $=5$ 者有$(1，1，3)$，$(1，2，2)$

(2) 點數和 $=10$ 者有

$(1，3，6)$，$(1，4，5)$，$(2，2，6)$，$(2，3，5)$，$(2，4，4)$，$(3，3，4)$

(3) 點數和 $=15$ 者有$(3，6，6)$，$(4，5，6)$，$(5，5，5)$

(二同一異)有 6 種、(三異)4 種、(三同)1 種，故所求機率爲 $\dfrac{\dfrac{3!}{2!}\times 6+3!\times 4+\dfrac{3!}{3!}\times 1}{6^3}=\dfrac{43}{216}$

或(3 骰子電話) $\dfrac{6+27+10}{6^3}=\dfrac{43}{216}$

24.自一副撲克（A poker hand）牌 52 張中任取 5 張，

(1)求 5 張牌成爲「富而好施」（Full house），即點數如$(x，x，x，y，y)$的形式，但$x，y$是不同點數的機率爲__________。

(2)求 5 張牌成爲「兩對」（Two pairs），即點數如$(x，x，y，y，z)$的形式，但$x，y，z$是不同點數的機率爲__________。

【解答】(1) $\dfrac{6}{4165}$　(2) $\dfrac{198}{4165}$

【詳解】

$$(1)\ P=\frac{C^{13}_{2}\times 2!\times C^{4}_{3}C^{4}_{2}}{C^{52}_{5}}=\frac{13\times 12\times 6\times 4}{\frac{52\times 51\times 50\times 49\times 48}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}}=\frac{6}{4165}$$

$$(2)\ P=\frac{C^{13}_{3}\times \frac{3!}{2!}\times C^{4}_{2}C^{4}_{2}C^{4}_{1}}{C^{52}_{5}}=\frac{13\times 6\times 11\times 6\times 6\times 4}{\frac{52\times 51\times 50\times 49\times 48}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}}=\frac{198}{4165}$$

25.袋中有 10 張籤條，其中 3 張有獎，今從袋中一次抽取一張籤條，共取 10 次，將籤條取完，則第二張中獎的機率為__________，第八張中獎的機率為__________。

【解答】$\frac{3}{10}$；$\frac{3}{10}$

【詳解】

(1)第二張中獎即第二張中獎其餘的 9 次中有 2 次中獎 7 次銘謝惠顧

機率 $=\frac{9!}{2!7!}\times\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{7}\cdot\frac{6}{6}\cdot\frac{5}{5}\cdot\frac{4}{4}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3\times 9!}{10!}=\frac{3}{10}$

(2)第八張中獎即第八張中獎其餘的 9 次中有 2 次中獎 7 次銘謝惠顧

機率 $=\frac{9!}{2!7!}\times\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3\times 9!}{10!}=\frac{3}{10}$