高雄市明誠中學 高二(下)平時測驗 日期：95.06.05					
範圍	3-2、3 機率+期望值	班級	普二　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. (複選)投擲公正骰子n個（$n\in N$），點數和的期望值爲E_n，下列何者正確？

(A) $E_2=7$ (B) $E_4=14$ (C) $E_8=28$ (D) $E_{10}=35$ (E) $E_{2n}=7n$

【解答】(A)(B)(C)(D)(E)

【詳解】$E_1=\dfrac{1+2+3+4+5+6}{6}=\dfrac{7}{2}\Rightarrow E_n=nE_1=\dfrac{7n}{2}$

$\therefore$ $E_2=7$，$E_4=14$，$E_8=28$，$E_{10}=35$，$E_{2n}=7n$

二、填充題(每題 10 分)

1. 從 5 雙不同花色的襪子中，任取 4 隻，每隻被取到的機會相等，則此 4 隻，恰成一雙機率爲____________。

【解答】$\dfrac{1}{7}$

【詳解】4 隻恰成一雙⇒ 一雙及來自不同的二雙之一，所求機率 $=\dfrac{C_1^5\cdot C_2^4\cdot 1^2}{C_4^{10}}=\dfrac{5\cdot 6\cdot 1}{210}=\dfrac{1}{7}$

2. 重複投擲一公正骰子，令x_i表第i次所擲出的點數，則

(1) $x_1\le x_2\le x_3$的機率爲____________。

(2) $x_1<x_2<x_3$的機率爲____________。

(3)合於 $x_1+x_2+x_3+x_4=7$ 的機率爲____________。

【解答】(1) $\dfrac{7}{27}$ (2) $\dfrac{5}{54}$ (3) $\dfrac{5}{324}$

【詳解】

(1) $x_1\le x_2\le x_3$表投擲 3 次所出現點數可相同，且須依大小順序排列

其個數相當於從 6 種點數共出現 3 次的重複組合數，故機率爲$\dfrac{H_3^6}{6^3}=\dfrac{C_3^8}{6^3}=\dfrac{7}{27}$

(2) $x_1<x_2<x_3$，此事件元素個數爲從 6 個點數中任取 3 個相異點(從小至大)的組合數

故機率爲$\dfrac{C_3^6}{6^3}=\dfrac{5}{54}$

(3) $x_1+x_2+x_3+x_4=7$表投擲 4 次所出現點數和 $=7$，件相當於$x_1+x_2+x_3+x_4=7$

且$1\le x_1$，x_2，x_3，$x_4\le 6$的正整數解的組數，故機率爲$\dfrac{H_3^4}{6^4}=\dfrac{C_3^6}{6^4}=\dfrac{5}{324}$

3. 有 4 個人同時玩猜拳（剪刀、石頭、布），同時出拳一次，則

(1)恰有一人得勝的機率爲__________。 (2)無法分出勝負的機率爲__________。

【解答】(1) $\dfrac{4}{27}$ (2) $\dfrac{13}{27}$

【詳解】

(1)4 人猜拳，其出拳方法有 3^4種，4 人中恰有 1 人勝的選擇有C_1^4種

如當勝者出「剪刀」時，其他 3 人只能出「布」1 種

勝者的出拳法有 3 種，其餘 3 人皆只有 1 種　∴　所求機率$=\dfrac{C_1^4\times 3\times 1^3}{3^4}=\dfrac{4}{27}$

(2)無人得勝其出拳法為剪刀，石頭，布均有人出或 4 人均出同一種

令「剪刀」為a，「石頭」為b，「布」為c，則不分勝負的出拳法有

①二同二異（$aabc$，$bbac$，$ccab$）：方法數$C_3^3\times\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{4!}{2!}=36$

②四同（$aaaa$，$bbbb$，$cccc$）：方法數$C_1^3\times\dfrac{4!}{4!}=3$

∴　所求機率 $=\dfrac{36+3}{3^4}=\dfrac{13}{27}$

4. 一不公正骰子，每面出現之機率與其點數成正比，擲此骰子 2 次，求點數和為 10 之機率為__________。

【解答】$\dfrac{73}{441}$

【詳解】$P(1):P(2):P(3):P(4):P(5):P(6)=k:2k:3k:4k:5k:6k$

$\Rightarrow\quad k+2k+3k+4k+5k+6k=21k=1\quad\Rightarrow\quad k=\dfrac{1}{21}$

點數和為 10 的情形有$(4,6)$，$(5,5)$，$(6,4)$，故所求 $=\dfrac{4}{21}\times\dfrac{6}{21}+\dfrac{5}{21}\times\dfrac{5}{21}+\dfrac{6}{21}\times\dfrac{4}{21}=\dfrac{73}{441}$

5. 一副撲克牌的大牌（10，J，Q，K，A）共有 20 張，從中一次取 4 張，則點數和大於 53 的機率為何？（點數規定如下：$J=11$，$Q=12$，$K=13$，$A=14$）

【解答】$\dfrac{23}{1615}$

【詳解】從 20 張大牌中任取 4 張的方法數 $=C_4^{20}=4845$

4 張點數和大於 53 的取法，可能有下列情況

(1)4 張 14 點　　(2)3 張 14 點，1 張 13 點

(3)3 張 14 點，1 張 12 點　　(4)2 張 14 點，2 張 13 點

取法數 $=C_4^4+C_3^4C_1^4+C_3^4C_1^4+C_2^4C_2^4=1+16+16+36=69$

取 4 張點數和大於 53 的機率 $=\dfrac{69}{4845}=\dfrac{23}{1615}$

6. 若 $P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{1}{3}$，$P(A\cap B)=\dfrac{1}{10}$，求(1) $P(A\cup B)$。　(2) $P(B')$。

【解答】(1)$\dfrac{11}{15}$　(2)$\dfrac{2}{3}$

【詳解】(1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{10}=\dfrac{11}{15}$

(2) $P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

7. 若 A，B，C 為某試驗的三個事件，且 $P(B) = \frac{1}{4}$，$P(C) = \frac{1}{3}$，$P(A \cup B) = \frac{1}{2}$，$P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(C \cap A) = \frac{1}{12}$，$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{24}$，求 $P(A \cup B \cup C)$。

【解答】$\frac{17}{24}$

【詳解】

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$

又 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 3 \times \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{17}{24}$

8. 袋中有 2 紅球、2 白球，同時取 2 球，求兩球同色的機率是多少？

【解答】$\frac{1}{3}$

【詳解】$\frac{C_2^2 + C_2^2}{C_2^4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

9. 某公司生產的 25 個產品中，有 7 個是不良品。設每一件產品被取中機會均等，今每次取一件，取出不放回，連取四次，試求下列各事件的機率：

(1)在第三次取到不良品。　(2)在第三次取到第二個不良品。

【解答】(1) $\frac{7}{25}$　(2) $\frac{63}{575}$

【詳解】

(1)

1	2	3	機　　率
良	良	不良	$\frac{18 \times 17 \times 7}{25 \times 24 \times 23}$
良	不良	不良	$\frac{18 \times 7 \times 6}{25 \times 24 \times 23}$
不良	良	不良	$\frac{7 \times 18 \times 6}{25 \times 24 \times 23}$
不良	不良	不良	$\frac{7 \times 6 \times 5}{25 \times 24 \times 23}$

$\therefore$　第三次取中不良品的機率=$\frac{1}{25 \times 24 \times 23}(18 \times 17 \times 7 + 18 \times 7 \times 6 + 7 \times 18 \times 6 + 7 \times 6 \times 5) = \frac{7}{25}$

P.S　任何一次取到不良品的機率皆為 $\frac{7}{25}$

(3)如上表，第三次取中第二個不良品的機率$=\dfrac{1}{25\times24\times23}(18\times7\times6+7\times18\times6)=\dfrac{63}{575}$

10.有十個球，編號為 1，2，3，4，…，9，10，今任取三球，求三個數中，任二個均不連續的機率為何？

【解答】$\dfrac{7}{15}$

【詳解】

樣本空間為 S，則 $n(S)=C_3^{10}=120$，任二個均不連續的情況分為

十個編號為 1，2，3，4，…，9，10，今任取三號，任二個均不連續⇒$\dfrac{7!}{7!}\times\dfrac{P_3^8}{3!}=56$

∴ 所求機率為$\dfrac{56}{5!}==\dfrac{7}{15}$

11.一袋中有黑球、白球、紅球共 12 個，已知黑球有四個且由袋中任取二球，取到二個均為紅球的機率為$\dfrac{5}{33}$，求白球的個數。

【解答】3 個

【詳解】設白球有 x 個，則紅球有 $8-x$ 個，$\dfrac{C_2^{8-x}}{C_2^{12}}=\dfrac{5}{33}\quad\Rightarrow\quad(8-x)(7-x)=20\quad\Rightarrow\quad x=3$

12.從 8 個正數、5 個負數中，任取 3 個數相乘，求相乘結果是正數的機率是多少？

【解答】$\dfrac{68}{143}$

【詳解】

積為正數可分為「三正數」或「一正數和二負數」二種

(1)三正數 ⇒ $C_3^8=56$（種），

(2)一正數和二負數 ⇒ $C_1^8\times C_2^5=80$（種）

∴ 所求機率 $=\dfrac{56+80}{C_3^{13}}=\dfrac{136}{286}=\dfrac{68}{143}$

13.將 5 個大小形狀相同，顏色不同的球，全投入 3 個不同的袋子中，則

(1)每個袋子中均有球的機率為__________。 (2)空袋子個數的期望值為__________個。

【解答】(1)$\dfrac{50}{81}$ (2)$\dfrac{32}{81}$

【詳解】5 個不同顏色的球放入 3 個不同的袋子中，其放入法有 $3^5=243$ 種

(1)每個袋子均有球，依個數安排可分成兩類$\begin{cases}(3,1,1)\\(2,2,1)\end{cases}$

故放法有$\dfrac{C_3^5\times C_1^2\times C_1^1}{2!}\times3!+\dfrac{C_2^5\times C_2^3\times C_1^1}{2!}\times3!=60+90=150$

$\therefore$　所求機率為 $\dfrac{150}{243}=\dfrac{50}{81}$

(2) 1 個空袋子的機率為 $C_1^3(C_1^5C_4^4\cdot 2!+C_2^5C_3^3\cdot 2!)=90$

2 個空袋子的機率為 $C_2^3\cdot C_5^5\cdot 1=3$

空袋子個數	0	1	2
機　　　率	$\dfrac{150}{243}$	$\dfrac{90}{243}$	$\dfrac{3}{243}$

$\therefore$　空袋子個數的期望值$=0\times\dfrac{150}{243}+1\times\dfrac{90}{243}+2\times\dfrac{3}{243}=\dfrac{96}{243}=\dfrac{32}{81}$

14.擲 4 個公正硬幣，若出現四個正面，可得 20 元，三個正面可得 15 元，二個正面可得 10 元，一個正面可得 5 元，則為使賭局公平起見，得四個反面應付__________元才公平。

【解答】160

【詳解】

擲 4 個公正硬幣，出現 4 個正面的機率$=\dfrac{1}{16}$

3 個正面的機率$=\dfrac{C_3^4}{16}=\dfrac{4}{16}$，2 個正面的機率$=\dfrac{C_2^4}{16}=\dfrac{6}{16}$

1 個正面的機率$=\dfrac{C_1^4}{16}=\dfrac{4}{16}$，4 個反面的機率$=\dfrac{1}{16}$

設出現 4 反面應付 x 元，為求賭局公平　$\Rightarrow$　期望值$=0$

$\Rightarrow$　$20\times\dfrac{1}{16}+15\times\dfrac{4}{16}+10\times\dfrac{6}{16}+5\times\dfrac{4}{16}+(-x)\times\dfrac{1}{16}=0$

$\Rightarrow$　$x=20+60+60+20=160$ 元

15.甲、乙二人網球比賽，約定先贏 3 局者勝，敗者應付給勝者 4000 元。若已知甲、乙二人實力相當，現於甲勝 2 局時因故不能繼續比賽，如按機率處理，乙應付給甲__________元。

【解答】3000

【詳解】

甲勝
乙勝　甲勝
　　　乙勝　甲勝
　　　　　　乙勝

$P(\text{甲勝})=\dfrac{1}{2}+(\dfrac{1}{2})^2+(\dfrac{1}{2})^3=\dfrac{7}{8}$，$P(\text{乙勝})=(\dfrac{1}{2})^3=\dfrac{1}{8}$

$E(\text{甲})=4000\times\dfrac{7}{8}+(-4000)\times\dfrac{1}{8}=3000$（元）

16.袋中 1 號球 1 個，2 號球 2 個，3 號球 3 個，⋯，n號球n個（$n\in N$），取到k號球可得k元（$1\le k\le n$），假設任取一球得錢的期望值為E_n元，則 $E_7=$__________。

【解答】 5

【詳解】 $E_n=\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2}{1+2+3+\cdots\cdots+n}=\dfrac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot\dfrac{2}{n(n+1)}=\dfrac{2n+1}{3}$

故$E_7=\dfrac{2\times7+1}{3}=5$

17.假設一位用功的高二學生能安全升級的機率爲 0.9999，今某位用功的高二學生參加保險公司「安全升級方案」繳保費 100 元，若在高二升高三不幸留級時，保險公司付給家長 5 萬元的理賠金，試求此保險公司期望利潤爲何？

【解答】95 元

【詳解】(這只是題目，沒這種保險方案)

該高二學生能安全升級的機率爲 0.9999，不幸留級的機率 $=0.0001$

保險公司利潤的期望值$=100\times0.9999-(50000-100)\times0.0001$

$=99.99-5+0.01=95$ 元

18.連續投擲一顆公正的骰子四次，試求：

(1)6 點出現 2 次的機率。 (2)6 點出現次數的期望值。

【解答】(1)$\dfrac{25}{216}$ (2)$\dfrac{2}{3}$

【詳解】(1)$C^4_2(\dfrac{5}{6})^2(\dfrac{1}{6})^2=\dfrac{25}{216}$ (2)$\dfrac{1}{6}\times4=\dfrac{2}{3}$

19. (1)某同學參加電視台機智問答。設有甲、乙兩套題目，甲套較難，乙套較易，比賽規則是：參加者可決定先選哪一套題目，由主持人在該套題目中隨機選取一題，若參加者答對，則主持人在另一套題目中隨機選取一題令參加者作答，若第一次答錯，則立即退出比賽。設只答對甲套題目的獎金是 1200 元，只答對乙套題目的獎金是 800 元，兩題皆答對的獎金是 3000 元，若該同學已知答對甲套題目的機率爲 0.6，答對乙套題目的機率是 0.9，問他應選哪套題目作答比較有利？

(2)試求上題中先選乙套題目參加者之期望獎金。

【解答】(1)乙套 (2)1908

【詳解】

(1)設S_1，S_2分別表答對甲、乙套題目的事件，依題意$P(S_1)=0.6$，$P(S_2)=0.9$

先選甲套之獎金期望值

$=\underset{(\text{甲套答錯})}{0}+\underset{(\text{答對甲，而答錯乙})}{1200\times0.6\times(1-0.9)}+\underset{(\text{答對甲又答對乙})}{3000\times0.6\times0.9}$

$=0+72+1620=1692$

先選乙套之獎金期望值

$=\underset{(\text{乙套答錯})}{0}+\underset{(\text{答對乙，而答錯甲})}{800\times0.9\times(1-0.6)}+\underset{(\text{答對乙又答對甲})}{3000\times0.6\times0.9}$

$=0+1620+288=1908$

(2)$E(\text{乙})=1620+288=1908$