高雄市明誠中學 高二(下)平時測驗 日期：95.05.01					
範圍	2-4，5 組合、二項式定理	班級	普二 班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1. 有渡船 3 艘，每艘限載 6 人，試求下列之安全渡法？

   (1) 6 人同時渡河。____________ (2) 8 人同時渡河。____________

【解答】(1)729 (3)6510

【詳解】

(1) 6 人同時渡河的搭乘方法有 $3^6 = 729$ 種

(2)8 人渡河，超載的情形有二類

①8 人同搭乘一船方法有 $C_8^8 \times P_1^3 = 3$ 種

② 8 人先分成 7 人、1 人兩組，分法有 $C_7^8 \cdot C_1^1 = 8$ 種；7 人一船，1 人於另外一船，其方法有 $8\times\ P_2^3\ = 48$ 種

∴ 8 人安全渡河方法有 $3^8 - 3 - 48 = 6510$ 種

2. 試求：(1) $C_2^3 + C_2^4 + C_2^5 + C_2^6 + \cdots + C_2^{21} =$ __________。

   (2) $H_1^4 + H_2^4 + H_3^4 + H_4^4 + \cdots + H_{10}^4 =$ __________。

   (3) $C_0^{10} + C_1^{10} + C_2^{10} + \cdots + C_9^{10} + C_{10}^{10} =$ __________。

【解答】(1) 1539 (2) 1000 (3)1024

【詳解】

(1)先補 C_3^3

$\underline{C_3^3 + C_2^3} + C_2^4 + C_2^5 + C_2^6 + \cdots + C_2^{21}$

$= \underline{C_3^4 + C_2^4} + C_2^5 + C_2^6 + \cdots + C_2^{21}$ （巴斯卡公式 $C_m^{n-1} + C_{m-1}^{n-1} = C_m^n$ ）

$= \underline{C_3^5 + C_2^5} + C_2^6 + \cdots + C_2^{21} = C_3^6 + C_2^6 + \cdots + C_2^{21} = \cdots = C_3^{22} = 1540$

∴ 所求 $= 1540 - C_3^3 = 1540 - 1 = 1539$

(2) $H_1^4 + H_2^4 + H_3^4 + H_4^4 + \cdots + H_{10}^4 = C_1^4 + C_2^5 + C_3^6 + C_4^7 + \cdots + C_{10}^{13}$

又 $\underline{C_0^4 + C_1^4} + C_2^5 + C_3^6 + C_4^7 + \cdots + C_{10}^{13} = \underline{C_1^5 + C_2^5} + C_3^6 + C_4^7 + \cdots + C_{10}^{13}$

$= \underline{C_2^6 + C_3^6} + C_4^7 + \cdots + C_{10}^{13} = C_3^7 + C_4^7 + \cdots + C_{10}^{13} = \cdots = C_{10}^{14} = 1001$

∴ 所求 $= 1001 - C_0^4 = 1001 - 1 = 1000$

(3) $C_0^{10} + C_1^{10} + C_2^{10} + C_3^{10} + \cdots + C_9^{10} + C_{10}^{10} = 2^{10} = 1024$

3. 有 6 位學生打完球到福利社喝飲料，福利社有 3 種不同飲料，每位喝一瓶，由一人代表買飲料，則此人有__________種選擇飲料的方式。

【解答】28

【詳解】

三種不同飲料共 6 瓶 ∴ 選法有 $H_6^3 = C_6^8 = 28$ 種

4. 有 6 件不同的物品：

(1)等分成三堆，每堆各有 2 個，則分法有__________種。

(2)分給A，B，C三人，其中A3 件，B2 件，C1 件，則分法有__________種。

【解答】(1) 15　(2) 60

【詳解】

(1) 6 件不同物品分成三堆，三堆個數一樣多　∴　共$\dfrac{C_2^6C_2^4C_2^2}{3!}=15$種分法

(2)6 件分成 3 件、2 件、1 件三堆，依序給A，B，C　，共$C_3^6C_2^3C_1^1\times1\times1\times1=60$種分法

5. 自CONSONANT一字中，任取 3 個字母，設x，y分表其排列數、組合數，則$x-y=$______。

【解答】120

【詳解】

NNN　OO　CSAT

	組合數：y	排列數：x
3 同	1	1
2 同 1 異	$C_1^2C_1^5=10$	$C_1^2C_1^5\cdot\dfrac{3!}{2!}=30$
3 異	$C_3^6=20$	$C_3^6\cdot3!=120$
	$y=31$	$x=151$

$x-y=151-31=120$

6.方程式$x+y+z+w=8$的正整數解有_____________組，又方程式$x+y+z+2w=8$的正整數解有____________組。

【解答】35；13

【詳解】

(1) $x+y+z+w=8$的正整數解，有$H_{8-1-1-1-1}^4=C_3^7=35$組

(2) $x+y+z+2w=8$的正整數解

① $w=1$時，$x+y+z=6$，有$H_{6-1-1-1}^3=C_2^5=10$

② $w=2$時，$x+y+z=4$，有$H_{4-1-1-1}^3=C_1^3=3$

共有$10+3=13$組解

7. 試求滿足$x+y+z+u\le14$的所有正整數解的個數爲__________。

【解答】1001

【詳解】

$x+y+z+u\le14\quad\Rightarrow\quad x+y+z+u+t=14$，$t$爲非負整數

所有正整數解的個數爲$H_{14-4}^5=H_{10}^5=C_{10}^{14}=1001$

8. 六個不同玩具全部分給甲、乙、丙 3 人，每人至少 1 個之分法有__________種。

【解答】540

【詳解】

Sol 一

(1)按(4，1，1)分 3 人　$\Rightarrow$　$\dfrac{C_4^6\cdot C_1^2\cdot C_1^1}{2!}\times 3!=90$

(2)按(3，2，1)分 3 人　$\Rightarrow$　$C_3^6\cdot C_2^3\cdot C_1^1\times 3!=360$

(3)按(2，2，2)分 3 人　$\Rightarrow$　$\dfrac{C_2^6\cdot C_2^4\cdot C_2^2}{3!}\times 3!=90$

$\therefore$　所求 $=90+360+90=540$

Sol 二

$1\cdot 3^6-3\cdot 2^6+3\cdot 1^6-1\cdot 0^6=340$

9. 5 件不同物品，分給甲、乙、丙、丁 4 人，

(1)甲恰得 1 件，有__________種分法。　(2)每人至少一件，有__________種分法。

【解答】(1) 405　(2) 240

【詳解】

(1)先選 1 件給甲，餘下三人分另外 4 件，$C_1^5\cdot(3^4)=5\times 81=405$（種）

(2) $4^5-4\cdot 3^5+6\cdot 2^5-4\cdot 1^5+1\cdot 0^5=240$（種）

10.由四對夫婦中選出 4 人組成管理委員會，規定男性至少 2 人，女性至少 1 人，則有____種選法。

【解答】52

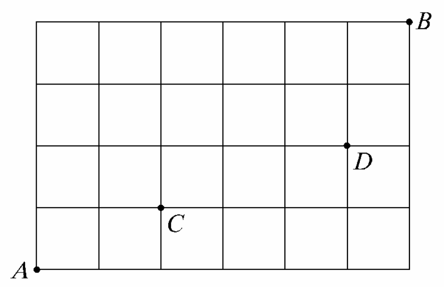
【詳解】

其選法有(二男二女)或(三男一女)兩種　$\therefore$　選法有 $C_2^4C_2^4+C_3^4C_1^4=52$ 種

11.棋盤型街道如下圖：由A取捷徑到B

(1)至少經過C，D二點之一的走法有__________種。

(2)恰轉過 3 個彎的走法有__________種。

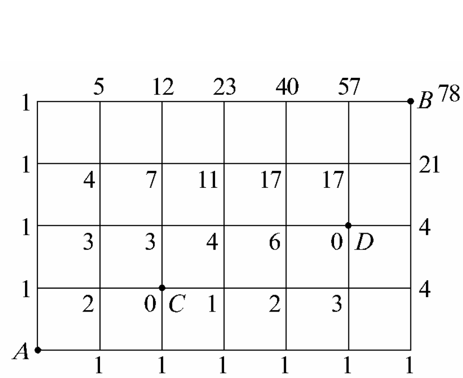


【解答】(1) 132　(2) 30

【詳解】

(1)Sol一：

應用累加法知，由A到B捷徑不過C，D者有 78 種，所求 $=\dfrac{10!}{6!4!}-78=210-78=132$

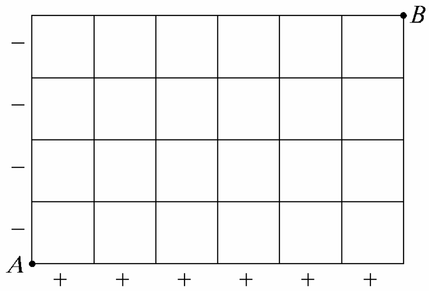


Sol二：

過C或過D

=(過C) + (過D) − (過C且過D)

$= \frac{3!}{2!1!} \times \frac{7!}{4!3!} + \frac{7!}{5!2!} \times \frac{3!}{1!2!} - \frac{3!}{2!1!} \times \frac{4!}{3!1!} \times \frac{3!}{1!2!} = 132$



(2)橫軸視為 6 個「+」號，縱軸視為 4 個「−」號，

(一個轉彎 ＝ 一個變號數)

將 ++++++−−−− 排成一列，有 3 個變號數求法

① + − + −

甲 A 乙 B

$\begin{cases} ++++\text{ 任意分給甲乙，分法 } H_4^2 = C_4^5 = 5 \\ --\text{ 任意分給}A\text{，}B\text{，分法 } H_2^2 = C_2^3 = 3 \end{cases}$ $\therefore \quad 5 \times 3 = 15$

② − + − +

A 甲 B 乙

$\begin{cases} ++++\text{ 任意分給甲乙，分法} H_4^2 = 5 \\ --\text{ 任意分給}A\text{、}B\text{，分法} H_2^2 = 3 \end{cases}$ $\therefore \quad 5 \times 3 = 15$

所求① + ② = 15 + 15 = 30

12.五種酒倒入 4 個酒杯中，酒不混合，

(1)若酒杯相異，而酒可重複使用，則倒法有__________種。

(2)若酒杯相同，而每種酒至多只能倒一次，則倒法有__________種。

【解答】(1)625 (2)5

【詳解】

(1)$5^4 = 625$ (2)$C_4^5 = 5$

13.將 8 件不同的物品，全部分給甲、乙、丙三人，

(1)每人至少得一件，分法有__________種。

(2)甲至少得一件、乙至少得二件、丙至少得三件，分法有__________種。

【解答】(1)5796 (2)2268

【詳解】

(1)$3^8 - 3 \times 2^8 + 3 \times 1^8 + 1 \times 0^8 = 5796$

(2)

甲	乙	丙	方法
3	2	3	$C_3^8 C_2^5 = 560$
2	3	3	$C_2^8 C_3^6 = 560$
2	2	4	$C_2^8 C_2^6 = 420$
1	4	3	$C_1^8 C_4^7 = 280$
1	3	4	$C_1^8 C_3^7 = 280$
1	2	5	$C_1^8 C_2^7 = 168$

共 $560+560+420+280+280+168=2268$

14.(1)5 對夫婦任選出 4 人代表，此 4 人中恰有一對夫婦，共__________種。

(2)5 對夫婦圍圓桌，不計方位，男女相間，有一對夫婦A，a相鄰，有________種坐法。

(3)5 對夫婦圍圓桌，不計方位，每對夫婦均相對而坐，有__________種方法。

【解答】(1)120　(2)1152　(3)384

【詳解】Aa Bb Cc Dd Ee五對夫婦

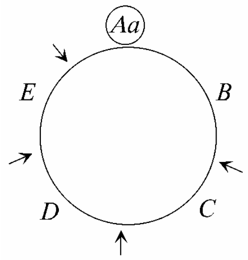
(1) $C^5_1 C^4_2 \cdot 2^2 = 120$

選夫或婦

選 2 對夫婦

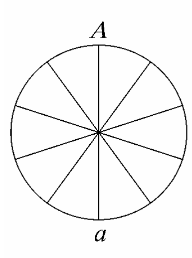
選 1 對夫婦作代表

(2) $\frac{5!}{5}\times \underbrace{2!}_{Aa\text{ 可交換}} \times \underbrace{4!}_{bcde\text{ 之排法}} = 1152$



(3) A，a先於直經相對入坐，坐法有$\frac{2!}{2}$，再讓四對夫婦選擇另 4 直徑入坐有 4！種坐法，而四對夫婦可互換有 2^4種方法，

故所求爲$\frac{2!}{2}\times 4!\times 2^4 = 384$



15.有 6 件物品全放入 3 個箱子，任意放（可放在同一箱或不同箱、可空箱），則

(1)物品相同，箱子相異，放法有__________種。

(2)物品相異，箱子相同，放法有__________種。

(3)物品相同，箱子相同，放法有__________種。

(4)物品相異，箱子相異，放法有__________種。

【解答】(1) 28　(2) 122　(3) 7　(4) 729

【詳解】

(1) 6 件相同物全放入 3 個箱子的放法，3 個箱子中物品的個數加起來 6 個

故放法有$H^3_6 = C^8_6 = 28$ 種

(2)先安排箱子中物品的個數，後再取物品（即爲分堆的方式）

(0，0，6)有$C^6_6 = 1$ 種，

(0，1，5)有$C^6_1\times C^6_1 = 6$ 種，

(0，2，4)有$C^6_2\times C^4_4 = 15$ 種

(1，1，4)有$\frac{C^6_1\times C^5_1\times C^4_4}{2!} = 15$ 種，

(0，3，3)有$\frac{C^6_3\times C^3_3}{2!} = 10$ 種

(1，2，3)有$C^6_3 \times C^3_2 \times C^1_1 = 60$ 種，

(2，2，2)有$\frac{C^6_2\times C^4_2\times C^2_2}{3!} = 15$ 種

共有 $1+6+15+15+10+60+15=122$ 種

(3)物品相同，箱子相同，只看物品個數分布方式，由(2)中的分類知有 7 種

(4)相異物的重複排列：每件物品有 3 種放法　∴　放法有 $3^6=729$ 種

16.$(x+\frac{2}{x})^8$的展開式中，(1)常數項 ＝__________。　(2) x^4之係數爲__________。

【解答】(1)1120　(2)112

【詳解】

$(x+\frac{2}{x})^8 \Rightarrow$一般項$C^8_k x^{8-k}(\frac{2}{x})^k = C^8_k 2^k x^{8-2k}$

(1) 取 $8-2k=0 \quad \Rightarrow \quad k=4 \quad \therefore \quad C^8_4 2^4=1120$

(2) 取 $8-2k=4 \quad \Rightarrow \quad k=2 \quad \therefore \quad C^8_2 2^2=112$

17.$(1+x^2)+(1+x^2)^2+(1+x^2)^3+\cdots+(1+x^2)^{20}$的展開式中，$x^6$的係數爲__________。

【解答】5985

【詳解】

等比級數公式：$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

原式 $=\dfrac{(1+x^2)[(1+x^2)^{20}-1]}{(1+x^2)-1}=\dfrac{(1+x^2)^{21}-(1+x^2)}{x^2}$

原式x^6的係數爲$(1+x^2)^{21}$中第五項$C^{21}_4 x^8$的係數　$\therefore \quad C^{21}_4=5985$

18.$(1-x+x^2)^{101}$展開式中，x^2的係數爲__________，x^{200}的係數爲__________。

【解答】5151；5151

【詳解】

$(1-x+x^2)^{101} \Rightarrow$一般項 $\dfrac{101!}{p!q!r!}(1)^p(-x)^q(x^2)^r=\dfrac{101!}{p!q!r!}(-1)^q x^{q+2r}$

(1)$\begin{cases} p+q+r=101 \\ q+2r=2 \end{cases}$

p	99	100
q	2	0
r	0	1

x^2之係數 $=\dfrac{101!}{99!\,0!\,2!}\cdot(-1)^2+\dfrac{101!}{100!\,0!\,1!}\cdot(-1)^0=5151$

(2) $\begin{cases} p+q+r=101 \\ q+2r=200 \end{cases}$

p	2	1
q	0	0
r	99	100

x^{200}之係數 $=\dfrac{101!}{2!\,0!\,99!}\cdot(-1)^0+\dfrac{101!}{1!\,0!\,100!}\cdot(-1)^0=5151$

19.$a\in R$，設$(ax^2-\frac{1}{x})^5$展開式中，x^4項係數爲 270，求$\frac{1}{x^2}$項係數爲__________。

【解答】15

【詳解】$(ax^2-\frac{1}{x})^5 \Rightarrow$一般項$C^5_k(ax^2)^{5-k}(-\frac{1}{x})^k=C^5_k(-1)^k a^{5-k}x^{10-3k}$

(1)當$10-3k=4 \Rightarrow k=2$，$C^5_2(-1)^2 a^{5-2}=270$，$10a^3=270 \quad \therefore \quad a=3$

(2)當$10-3k=-2 \Rightarrow k=4$，$C^5_4(-1)^4 3^{5-4}=15$，所求係數 $=15$

20.$(3x-\frac{1}{9\sqrt{x}})^{12}$的展開式中，試求：(1) x^2項的係數爲________。 (2) x^6項的係數爲_________。

【解答】(1) 0 (2) 495

【詳解】

$$(3x-\frac{1}{9\sqrt{x}})^{12}\Rightarrow \text{一般項}C_k^{12}(3x)^{12-k}(-\frac{1}{9}x^{-\frac{1}{2}})^k=C_k^{12}(3)^{12-k}(-\frac{1}{9})^k x^{12-\frac{3}{2}k}$$

(1)$12-\frac{3}{2}k=2 \quad\Rightarrow\quad k=\frac{20}{3}$，但$k\in Z$ $\therefore$ 沒有此項，即x^2項係數爲 0

(2) $12-\frac{3}{2}k=6 \quad\Rightarrow\quad k=4$，$x^6$項係數爲$C_4^{12}\cdot 3^8(-\frac{1}{9})^4=495$

21.$(1+x+x^2)^5$中，x^4，x^5之係數分別爲a，b，則$a=$___________，$b=$___________。

【解答】45；51

【詳解】

$$(1+x+x^2)^5\Rightarrow \text{一般項}\frac{5!}{p!\,q!\,r!}1^p x^q(x^2)^r=\frac{5!}{p!\,q!\,r!}x^{2r+q}\text{，其中 }p+q+r=5$$

(1)$\begin{cases}p+q+r=5\\ q+2r=4\end{cases}$

p	1	2	3
q	4	2	0
r	0	1	2

x^4之係數 $=a=\frac{5!}{4!\,1!}+\frac{5!}{2!\,2!}+\frac{5!}{3!\,2!}=5+30+10=45$

(2)$\begin{cases}p+q+r=5\\ q+2r=5\end{cases}$

p	0	1	2
q	5	3	1
r	0	1	2

x^5之係數 $=\frac{5!}{5!}+\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{2!2!}=1+20+30=51$

22.以$(x-1)^2$除$x^{11}-x+2$，其餘式爲___________。

【解答】$10x-8$

【詳解】

$x^{11}-x+2=[(x-1)+1]^{11}-x+2=C_0^{11}(x-1)^{11}+\cdots+C_{10}^{11}(x-1)+C_{11}^{11}-x+2$

$\therefore$ 餘式 $=C_{10}^{11}(x-1)+C_{11}^{11}-x+2=11(x-1)+1-x+2=10x-8$

23.在$(2-\frac{3}{x}+4x^2)^4$之展開式中，(1)常數項爲___________。 (2) x^3項之係數爲___________。

【解答】(1) 880 (2) -1152

【詳解】

$$(2-\frac{3}{x}+4x^2)^4\Rightarrow \text{一般項}\frac{4!}{p!\,q!\,r!}2^p(-\frac{3}{x})^q(4x^2)^r=\frac{4!}{p!\,q!\,r!}2^p(-3)^q4^r x^{-q+2r}$$

(1)$\begin{cases}p+q+r=4\\ -q+2r=0\end{cases}$ $\therefore$

p	4	1
q	0	2
r	0	1

$\therefore$ $\frac{4!}{4!}2^4(-3)^0\cdot 4^0+\frac{4!}{1!\,2!\,1!}2\cdot(-3)^2\cdot 4=880$

(2)$\begin{cases}p+q+r=4\\ -q+2r=3\end{cases}$ $\therefore$

p	1
q	1
r	2

$\therefore$ $\frac{4!}{1!\,1!\,2!}2\cdot(-3)\cdot 4^2=-1152$

24.$(3x-\frac{2}{3}y)^5$展開式中，共有＿＿＿＿＿項，其中x^4y的係數爲＿＿＿＿＿。

【解答】6；-270

【詳解】

$(3x-\frac{2}{3}y)^5$展開式中 $x^p y^q \Rightarrow p+q=5$，共有$H_5^2=C_5^6=C_1^6=6$ 項

其中x^4y項爲$C_1^5(3x)^4(\frac{-2}{3}y)^1=5\times 3^4\times\frac{-2}{3}(x^4y)=-270$，$x^4y$係數爲 -270

25.$(x+y+z+u)^{10}$展開式中，

(1)所有不同類項共有＿＿＿＿＿項。　(2) $x^3y^3z^2u^2$項的係數爲＿＿＿＿＿。

(3) $x^4y^3z^3$的同型項共有＿＿＿＿＿項。

【解答】(1) 286　(2) 25200　(3) 12

【詳解】

(1)展開式中一般項爲$\frac{10!}{a!b!c!d!}x^ay^bz^cu^d$，其中$a+b+c+d=10$

a，b，c，d爲非負整數，故有$H_{10}^4=C_{10}^{13}=286$ 項

(2) $x^3y^3z^2u^2$項之係數 $=\frac{10!}{3!3!2!2!}=25200$

(3) $x^4y^3z^3$的同型項共有$C_3^4\times\frac{3!}{2!}=12$ 項

26.$\sum_{k=0}^{n}C_k^n\cdot 3^k=C_0^n+C_1^n\cdot 3+C_2^n\cdot 3^2+\cdots+C_n^n\cdot 3^n=$＿＿＿＿＿。

【解答】4^n

【詳解】

$\because$　$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_k^n\cdot x^k=C_0^n+C_1^n\cdot x+C_2^n\cdot x^2+\cdots+C_n^n\cdot x^n$

取$x=3$ 時，$(1+3)^n=C_0^n+C_1^n\cdot 3+C_2^n\cdot 3^2+\cdots+C_n^n\cdot 3^n$

27.若 $2000<C_1^n+C_2^n+C_3^n+\cdots+C_n^n<3000$，則正整數$n$之值 $=$＿＿＿＿＿。

【解答】11

【詳解】

$\because$　$C_0^n+C_1^n+C_2^n+C_3^n+\cdots+C_n^n=2^n$

$\Rightarrow$　$2000<2^n-1<3000$　$\Rightarrow$　$2001<2^n<3001$

$\because$　$2^{10}=1024$，$2^{11}=2048$，$2^{12}=4096$，故$n=11$

28.將 7^{20}乘開，

(1)爲＿＿＿＿＿位數（已知$\log 7=0.8451$）。　(2)最右邊之五位數爲＿＿＿＿＿。

【解答】(1) 17　(2) 12001

【詳解】

(1) $\log 7^{20} = 20\log 7 = 20 \times 0.8451 = 16.902 = 16 + 0.902$ $\therefore$ 爲 17 位數

(2) $7^{20} = (7^4)^5 = (2400 + 1)^5$

$= 2400^5 + 5 \times 2400^4 + 10 \times 2400^3 + 10 \times 2400^2 + \boxed{5 \times 2400 + 1} = \cdots 12001$

$\therefore$ 最右邊的五位數爲 12001

29.計算$(0.98)^4$，取到小數點後第 4 位（第 5 位四捨五入）得到__________。

【解答】0.9224

【詳解】

$(0.98)^4 = (1 - 0.02)^4 = \sum_{k=0}^{4} C_k^4 1^{4-k} (-0.02)^k$

$= 1 - 4\,(0.02) + 6\,(0.02)^2 - 4\,(0.02)^3 + (0.02)^4$

$= 1 - 0.08 + 0.0024 - 0.000032 + 0.00000016 = 0.92236816 \doteqdot 0.9224$