

高雄市明誠中學 高二(下)平時測驗					日期：95.04.24
範圍	2-3, 4 排列、組合	班級	普二 班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1. 由 1 至 10 的十個數字中，任選出三個數字，

(1)若選出的三個數字均相連，則其選法有_____種。

(2)若選出的三個數字兩兩均不相連，則其選法有_____種。

【解答】(1)8 (2)56

【詳解】

(1)在 1 至 10 個數字中，選 3 個相連號碼的方法

有(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), ………, (8, 9, 10)共 8 種選法

(2) 10 個號碼選 3 個兩兩均不相連，可視為 7 個×，3 個○的排列且○○○不相鄰

7 個×先排，前後共 8 個間隔任取 3 個來擺○，故有 $\frac{7!}{7!} \times \frac{P_3^8}{3!} = 56$ 種

2. 甲、乙、丙、丁、戊、己、庚等 7 人排成一列，

(1)甲一定在乙、丙左，但位置不一定相鄰，則排法有_____種。

(2)丙不排首或丁不排尾，則排法有_____種。

【解答】(1) 1680 (2) 3720

【詳解】

(1)先排丁、戊、己、庚 4 人及 3 個空位，有 $\frac{7!}{3!}$ 種排法，在 3 個空位，最左排甲、剩下 2

個空位排乙、丙 $\frac{7!}{3!} \times 1 \times 2! = 2520$ 種排法

(2) 3 人受限制，共有 $7! - 2 \times 6! + 5! = 3720$ 種排法

3. 以汽笛鳴放長短聲作信號，長音一次需時 2 秒，短音一次需時 1 秒，每次鳴放 1 次後間隔 1 秒再鳴放 1 次，若發射一信號需時 14 秒，則可作成_____種信號。

【解答】28

【詳解】

設在 14 秒內鳴放長音 x 次，短音 y 次，則間隔數為 $(x + y - 1)$ 次

$$\therefore 2x + y + (x + y - 1) = 14 \Rightarrow 3x + 2y = 15, x, y \text{ 爲非負整數} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, 3, 5 \\ y = 6, 3, 0 \end{cases}$$

故在 15 秒內所作信號有 $\frac{7!}{6!1!} + \frac{6!}{3!3!} + \frac{5!}{5!0!} = 28$ 種

4. 14 個人圍一長方形桌而坐，長邊每邊坐 4 人，短邊每邊坐 3 人，試問共有_____種坐法。

【解答】 $7 \times 13!$

【詳解】 $\frac{14!}{14} \times (4+3) = 7 \times 13!$

5. 五對夫婦圍圓桌聊天，不計方位，

- (1) 試求男女相間的坐法有_____種。(2) 試求男女相間且夫婦相鄰的坐法有_____種。
 (3) 每對夫婦均相對而坐，有_____種方法。

【解答】(1) 2880 (2) 48 (3) 384

【詳解】(1) 5 位先生先環狀排列，5 位太太再插 6 個空隙 $\frac{5!}{5} \times 5! = 2880$

(2) 設五對夫婦為 Aa, Bb, Cc, Dd, Ee ，夫妻一體先入座，

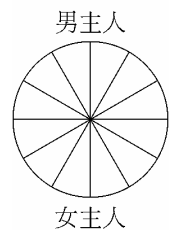
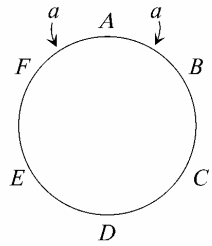
其坐法有 $\frac{5!}{5} = 4!$ 種，而 a 入座時，只能於 A 之左右之一，當 a 坐定後，

其餘 b, c, d, e ，只有一種坐法，故坐法有 $4! \times 2 \times 1^4 = 48$ 種

(3) 主人夫婦先則一直徑相對入座，坐法有 $\frac{2!}{2}$ ，再讓四對夫婦選另外 4

條直徑入座有 $4!$ 種坐法，而五對夫婦可對調有 $(2!)^4$ 種坐法，

故所求為 $\frac{2!}{2} \times 4! \times 2^4 = 384$



6. 有 10 種顏色，塗下列多面體，每面一色且每面顏色不同，多面體可任意翻轉，

- (1) 塗一正方體，有_____種方法。
 (2) 塗一長，寬，高均不相等之長方體，有_____種方法。

【解答】(1) 6300 (2) 37800

【詳解】(1) $10 \times 9 \times \frac{P_4^8}{4} \times \frac{1}{6} = 6300$ (2) $10 \times 9 \times (\frac{P_4^8}{4} \times 2) \times \frac{1}{2} = 37800$

7. 有 6 件不同的玩具，分給甲、乙、丙三位兒童，則

- (1) 任意分，每人可兼得的分法有_____種。
 (2) 甲分得 4 件，乙、丙各分得 1 件的分法有_____種。
 (3) 乙、丙二人至少各分得 1 件的分法有_____種。

【解答】(1) 729 (2) 30 (3) 602

【詳解】(1) 任意分，每人可兼得，所有分法有 $3^6 = 729$ 種

(2) 6 件玩具分成 4、1、1 件共 3 堆，4 件的給甲，其餘給乙、丙各得 1 件的

\therefore 分法有 $\frac{C_4^6 C_1^2 C_1^1}{2!} \times 1 \times 2! = 30$ 種

(3) 乙、丙至少各得 1 件的分法 = 所有分法 - (乙沒有或丙沒有)

$$= 3^6 - 2 \cdot 2^6 + 1^6 = 729 - 128 + 1 = 602$$

8. 有 6 個球投入 4 個箱子中，求下列投入法各多少種？

- (1) 球相同，箱子相同，每箱投入球數不限。_____。
 (2) 球不同，箱子不同，每箱投入球數不限。_____。
 (3) 球相同，箱子不同，每箱投入球數不限。_____。
 (4) 球相同，箱子不同，每箱至少投入一球。_____。
 (5) 球不同，箱子不同，每箱至少投入一球。_____。

【解答】(1)9 (2)4096 (3)84 (4)10 (5)1560

【詳解】

(1)球相同，箱子相同，則箱中投入球數決定其投入法有 $(6, 0, 0, 0), (5, 1, 0, 0), (4, 2, 0, 0), (4, 1, 1, 0), (3, 3, 0, 0), (3, 2, 1, 0), (3, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 0), (2, 2, 1, 1)$ 等，共有 9 種投入法

(2)球不同，箱子不同，則每一球均有 4 種不同投入法 \therefore 投入法有 $4^6 = 4096$ 種

(3)球相同，箱子不同，則 $H_6^4 = C_6^{4+6-1} = C_3^9 = 84$ 種

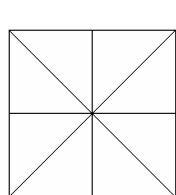
(4)球相同，箱子不同，每箱至少一球的投入法由 $x + y + z + u = 6$ ，

正整數解 $H_{6-1-1-1-1}^4 = C_2^{4+2-1} = 10$

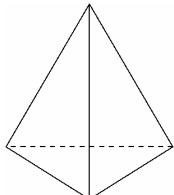
(5)球不同，箱子不同，每箱至少一球的投入法 = (全部) - (有箱子沒有球)

$$= 4^6 - 4 \times 3^6 + 6 \times 2^6 - 4 \times 1^6 + 1 \times 0^6 = 4096 - 2916 + 384 - 4 = 1560$$

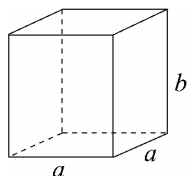
9. 將 10 種不同顏料塗下列圖形，各有幾種塗法？ _____ ； _____ ； _____



正方形



正四面體



四角柱

$(a \neq b)$

【解答】(1) 453600 (2) 420 (3) 18900

【詳解】(1) $\frac{P_8^{10}}{8} \times 2 = 453600$ (2) $10 \times \frac{P_3^9}{3} \times \frac{1}{4} = 420$ (3) $10 \times 9 \times \frac{P_4^8}{4} \times \frac{1}{2} = 18900$

10.7 本書分給 10 個人，每人至多一本，

(1) 書本相同有幾種分法？ _____ ； (2) 書本不同有幾種分法？ _____ 。

【解答】(1) 120 (2) 604800

【詳解】(1) $\frac{10!}{7!3!} = 120$ (不盡相異物的排列) ； (2) $P_7^{10} = 604800$ (種)

11. 有渡船 3 艘，每艘限載 6 人，試求下列之安全渡法？

(1) 6 人同時渡河。 _____ (2) 7 人同時渡河。 _____

(3) 8 人同時渡河。 _____ (4) 9 人同時渡河。 _____

【解答】(1)729 (2)2184 (3)6510 (4)19194

【詳解】(1) 6 人同時渡河的搭乘方法有 $3^6 = 729$ 種

(2) 7 人不得同乘一船，渡河搭乘方法有 $3^7 - C_7^7 \times P_1^3 = 3 = 2184$ 種

(3) 8 人渡河，超載的情形有二類：① 8 人同搭乘一船；② 8 人分成 7 人、1 人兩組

\therefore 8 人安全渡河方法有 $3^8 - C_8^8 \times P_1^3 - C_7^8 C_1^1 \times P_2^3 = 6510$ 種

(4) 9 人渡河，超載的情形有四類

① 9 人同搭乘一船

② 9 人中，8 人一船，另一人另一船

③ 9 人中，7 人一船，另二人另一船

④ 9 人中，7 人一船，另二人各一船

故 9 人安全渡河方法有 $3^9 - C_9^9 \times P_1^3 - C_8^9 C_1^1 \times P_2^3 - C_7^9 C_2^2 \times P_2^3 - \frac{C_7^9 C_1^2 C_1^1}{2!} \times P_3^3 = 19194$ 種

11. 有相同的足球 3 個，籃球 2 個，手球 1 個，

(1)分給 8 位小朋友，每人最多一個，則分法有多少種？_____

(2)將 6 個球分給排成一列的 6 位小朋友且相鄰兩人不可得同一類球，則分法有多少種？

【解答】(1)1680 (2)10

【詳解】(1)視為 3 個足球，2 個籃球，1 個手球，2 個「0」的排列，排法 $\frac{8!}{3!2!2!} = 1680$ 種

(2)將 6 個球排成一列的分給小朋友，同類球不相鄰，如同 *FFFBH* 排列但同字不相鄰

$$\text{即}(F,F,F \text{ 不相鄰}) - (F,F,F \text{ 不相鄰且 } B,B \text{ 相鄰}) : \frac{3!}{2!} \times \frac{P_3^4}{3!} - 2 \times \frac{P_3^3}{3!} = 10$$

12.有 5 件相異物，分給 *A, B, C, D* 四人，

(1)若 *A* 得 2 件，*B, C, D* 各 1 件，則分法有_____種。

(2)若 5 件全分出，每人至少一件，則分法有_____種。

【解答】(1) 60 (2) 240

【詳解】(1) 5 件玩具分成 2、1、1、1 件共 4 堆，4 件的給 *A*，其餘給 *B, C, D* 各得 1 件的

$$\therefore \text{分法有 } \frac{C_2^5 C_1^3 C_1^2 C_1^1}{3!} \times 1 \times 3! = 60 \text{ 種}$$

(2) 5 件分給 4 人，每人至少一件，則 4 人挑 1 人恰得 2 件，其餘各 1 件

$$\therefore \text{分法有 } C_1^4 \times \frac{C_2^5 C_1^3 C_1^2 C_1^1}{3!} \times 1 \times 3! = 60 = 240 \text{ 種}$$

13.「attention」一字中的字母，每次取出 5 個字母，則

(1)組合數共_____種。(2)排列數共_____種。

【解答】(1) 41 (2) 2250

【詳解】

「attention」一字的字母中，有 3 個 *t*，2 個 *n*，1 個 *a*，1 個 *e*，1 個 *i*，1 個 *o*，取出 5 個字母分成五類

	取法	排法
①三同二同	$C_1^1 \times C_1^1 = 1$	$1 \times \frac{5!}{3!2!}$
②三同二異	$C_1^1 \times C_2^5 = 10$	$10 \times \frac{5!}{3!}$
③二同二同一異	$C_2^2 \times C_1^4 = 4$	$4 \times \frac{5!}{2!2!}$
④二同三異	$C_1^2 \times C_3^5 = 20$	$20 \times \frac{5!}{2!}$
⑤五異	$C_5^6 = 6$	$6 \times 5!$

故(1)組合數 = $1 + 10 + 4 + 20 + 6 = 41$

(2)排列數 = $1 \times \frac{5!}{3!2!} + 10 \times \frac{5!}{3!} + 4 \times \frac{5!}{2!2!} + 20 \times \frac{5!}{2!} + 6 \times 5!$
 = $10 + 200 + 120 + 1200 + 720 = 2250$

14.某拳擊比賽，規定每位選手必須和所有其他選手各比賽一場，賽程總計為 78 場，則選手人數為_____人。

【解答】13

【詳解】

設選手 n 人，賽程方法有 C_2^n 種 $\Rightarrow C_2^n = 78 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 78 \Rightarrow n(n-1) = 156 \Rightarrow n = 13$

15.設 $n \in N$ ，若 $P_3^n = 4 C_2^{n+1}$ ，則 $n =$ _____。

【解答】5

【詳解】 $P_3^n = 4 C_2^{n+1} \Rightarrow n(n-1)(n-2) = 4 \times \frac{(n+1)n}{2} \therefore n^2 - 3n + 2 = 2n + 2$

$\Rightarrow n(n-5) = 0 \Rightarrow n = 0$ (不合) 或 $n = 5 \therefore n = 5$

16.有 6 件不同的物品：

(1)等分成三堆，每堆各有 2 個，則分法有_____種。

(2)分給 A, B, C 三人，其中 A 3 件， B 2 件， C 1 件，則分法有_____種。

【解答】(1) 15 (2) 60

【詳解】

(1) 6 件玩具分成 2、2、2 件共 3 堆，共 $\frac{C_2^6 C_2^4 C_2^2}{3!} = 15$ 種挑法

(2) 6 件玩具分成 3、2、1 件共 3 堆，依序給 A, B, C 3 人，共 $C_3^6 C_2^3 C_1^1 = 60$ 種分法

17.求以下組合數之和，

(1) $C_3^3 + C_3^4 + C_3^5 + \dots + C_3^{19} + C_3^{20} =$ _____。(2) $C_1^{10} + C_2^{10} + C_3^{10} + \dots + C_9^{10} + C_{10}^{10} =$ _____。

【解答】(1) 5985 (2) 1023

【詳解】

(1) $C_3^3 + C_3^4 + C_3^5 + \dots + C_3^{20} = (C_4^4 + C_3^4) + C_3^5 + \dots + C_3^{20}$ ($C_3^3 = 1 = C_4^4$)

$= (C_4^5 + C_3^5) + \dots + C_3^{20}$ (利用巴斯卡公式 $C_m^{n-1} + C_{m-1}^{n-1} = C_m^n$)

$= C_4^6 + \dots + C_3^{20} = \dots = C_4^{21} = 5985$

(2) $C_0^{10} + C_1^{10} + C_2^{10} + C_3^{10} + \dots + C_9^{10} + C_{10}^{10} = 2^{10}$

$\Rightarrow C_1^{10} + C_2^{10} + C_3^{10} + \dots + C_9^{10} + C_{10}^{10} = 2^{10} - C_0^{10} = 2^{10} - 1 = 1023$

18.設 $x + y + z + u = 12$ ，則此方程式有_____組非負整數解，_____組正整數解。

【解答】455；165

【詳解】

$$(1) H_{12}^4 = C_{12}^{12+4-1} = C_{12}^{15} = C_3^{15} = 455 \text{ (組)}$$

(2) 令 $x = a + 1, y = b + 1, z = c + 1, w = d + 1$, 則 $a, b, c, d \geq 0$ 且為整數

$$a + 1 + b + 1 + c + 1 + d + 1 = 12 \Rightarrow a + b + c + d = 8$$

$$\therefore \text{有 } H_8^4 = C_8^{4+8-1} = C_8^{11} = C_3^{11} = 165 \text{ 組}$$

19. $x + y + z \leq 12$ 之非負整數解，有_____組。

【解答】455

【詳解】

$$x + y + z \leq 12 \Rightarrow x + y + z + u = 12, \text{ 非負整數解有 } H_{12}^4 = C_{12}^{15} = 455 \text{ 組}$$

20. 四對夫婦中，選四個人圍成一圈打橋牌，則有_____種方法；如果四個人中，至少有一人是夫婦，則有_____種方法。

【解答】420；342

【詳解】

$$(1) \text{ 八人選四人圍成一圈打橋牌的方法有 } C_4^8 \times \frac{4!}{4} = 420 \text{ 種方法}$$

(2) 4 個人中，至少有一人是夫婦：

$$\text{四對夫婦先選一對，剩餘 6 人選二人，再環狀排列：} C_1^4 \times C_2^6 \times \frac{4!}{4} = 360 \text{ 種}$$

$$\text{但四人為二對夫婦此情形 } (C_2^4 \times \frac{4!}{4} = 36) \text{ 重複算了兩次，則方法有：} 360 - 36 = 342$$

21. 相同的鉛筆 3 支，原子筆 2 支，鋼筆 3 支，分給兒童，每人最多一支，分給 10 人時，有_____種分法_____。

【解答】25200

【詳解】如同 $aaabbcccoo$ 之排列， $\frac{10!}{3!2!3!2!} = 25200$ (種)

22. 五十元硬幣五枚，十元硬幣三枚，

(1) 分給 2 人，每人至少得一枚之分法有_____種。

(2) 分給 10 人，每人至多得一枚之分法有_____種。

【解答】(1)22 (2)2520

【詳解】(1) $H_5^2 \cdot H_3^2 - 2 \times H_5^1 \cdot H_3^1 = 22$ (2) $\frac{10!}{5!3!2!} = 2520$

23. 有 12 個人，A, B, C 是其中 3 人，自此 12 人中，選出 5 人，

(1) A 必選，有_____種選法。 (2) A, B 恰一人入選，有_____種選法。

(3) A, B, C 中，至少有一人入選，有_____種選法。

【解答】(1) 330 (2) 420 (3) 666

【詳解】

(1) $C_{5-1}^{12-1} = C_4^{11} = 330$ (種)

(2) A, B 中選 1 人, 再由其餘 10 人選 4 人 $\Rightarrow C_1^2 \cdot C_4^{10} = 2 \times 210 = 420$

(3) $(A, B, C \text{ 至少一人入選}) = (\text{全}) - (A, B, C \text{ 均不選}) \Rightarrow C_5^{12} - C_5^{12-3} = 792 - 126 = 666$

24. 平面上有 P_1, P_2, \dots, P_{16} 排成如圖的正方形, 則

(1) 16 點中, 其中三點共線有_____組, 四點共線有_____組。

(2) 此 16 點可決定_____條直線, (3) 且決定_____個三角形。

【解答】(1) 4; 10 (2) 62; (3) 516

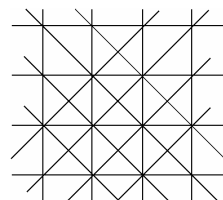
【詳解】(1) 16 點中, 其中三點共線有 4 組, 四點共線有 10 組。

(2) 任三點不共線時, 有 $C_2^{16} = 120$ 條,

但其中四點共線有 10 條, 3 點共線有 4 條; 故實際上之直線

有 $C_2^{16} - 10 \cdot C_2^4 + 10 - 4 \cdot C_2^3 + 4 = 120 - 60 + 10 - 12 + 4 = 62$ 條

(3) $C_3^{16} - 10 \cdot C_3^4 - 4 \cdot C_3^3 = 560 - 40 - 4 = 516$ (個)



25. 六個不同玩具全部分給甲、乙、丙 3 人, 每人至少 1 個之分法有_____種。

【解答】540

【詳解】

(1) 按(4, 1, 1)分 3 人 $\Rightarrow \frac{C_4^6 \cdot C_1^2 \cdot C_1^1}{2!} \times 3! = 90$

(2) 按(3, 2, 1)分 3 人 $\Rightarrow C_3^6 \cdot C_2^3 \cdot C_1^1 \times 3! = 360$

(3) 按(2, 2, 2)分 3 人 $\Rightarrow \frac{C_2^6 \cdot C_2^4 \cdot C_2^2}{3!} \times 3! = 90$

\therefore 所求 = $90 + 360 + 90 = 540$

26. 5 件不同物品, 分給甲、乙、丙、丁 4 人,

(1) 甲恰得 1 件, 有_____種分法。 (2) 每人至少一件, 有_____種分法。

【解答】(1) 405 (2) 240

【詳解】

(1) 先選 1 件給甲, 餘下三人分另外 4 件, $C_1^5 \cdot (3^4) = 5 \times 81 = 405$ (種)

(2) $4^5 - 4 \cdot 3^5 + 6 \cdot 2^5 - 4 \cdot 1^5 + 1 \cdot 0^5 = 240$ (種)

27. 九個相同的球分給甲、乙、丙三人, 每人至少一球,

(1) 九個球全部分完, 分法有_____種。(2) 九個球可不全部分完, 分法共有_____種。

【解答】(1) 28 (2) 84

【詳解】

(1) 設甲分 x_1 個球, 乙分 x_2 個球, 丙分 x_3 個球

$x_1 + x_2 + x_3 = 9, 1 \leq x_i \leq 9, i = 1, 2, 3$, 正整數解, 共 $H_6^3 = C_6^{3+6-1} = C_6^8 = 28$ 種分法

(2) 承上, 設剩 x_4 個球(可為 0) $\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$, 共 $H_{9-1-1-1}^4 = C_6^{4+6-1} = C_3^9 = 84$ 種取法

28.紅球、黃球、白球、黑球各有三個，同色相同，

- (1)取三球排一列的排列數為_____。(2)取四個排一列，相同不相鄰的排列數為_____。
 (3)取三球之組合數為_____。(4)取六球之組合數為_____。
 (5)取六球，各色球各至少一個，組合數為_____。
 (6)12個球全部分給甲、乙二人，每人至少分得一個，分法有_____種。

【解答】(1) 64 (2) 168 (3) 20 (4) 44 (5) 10 (6) 254

【詳解】

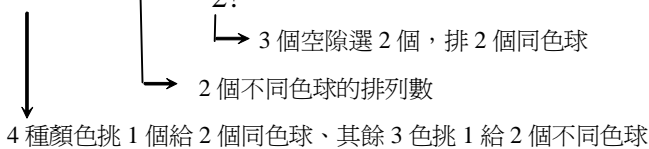
(1)排列情形如下

$$\text{三同：} C_1^4 \cdot \frac{3!}{3!} = 4, \text{二同一異：} C_1^4 C_1^3 \cdot \frac{3!}{2!} = 36, \text{三異：} C_3^4 \cdot 3! = 24$$

$$\therefore \text{共 } 4 + 36 + 24 = 64 \text{ 種排列}$$

(2)排列情形如下：四同、三同一異不會發生

$$\text{二同二異：} C_1^4 \cdot C_2^3 \cdot 2! \cdot \frac{P_2^3}{2!} = 144$$



$$\text{四異：} C_4^4 \times 4! = 24$$

$$\therefore \text{共 } 144 + 24 = 168 \text{ 種排列}$$

(3)組合情形如下

$$\text{三同：} C_1^4 = 4, \text{二同一異：} C_1^4 C_1^3 = 12, \text{三異：} C_3^4 = 4, \text{共 } 4 + 12 + 4 = 20 \text{ 種組合}$$

(4)組合情形如下

$$\text{三同三同}(3, 3) : C_2^4 = 6, \text{三同二同一異}(3, 2, 1) : C_1^4 C_1^3 C_1^2 = 24$$

$$\text{三同三異}(3, 1, 1, 1) : C_1^4 C_3^3 = 4, \text{二同二同二同}(2, 2, 2) : C_3^4 = 4$$

$$\text{二同二同二異}(2, 2, 1, 1) : C_2^4 C_2^2 = 6 \quad \therefore \text{共 } 6 + 24 + 4 + 4 + 6 = 44 \text{ 種組合}$$

(5)組合情形如題(4)之(3, 1, 1, 1)及(2, 2, 1, 1) \therefore 共有 $4 + 6 = 10$ 種組合

(6)先分紅球給甲 x_1 個，乙 x_2 個， $x_1 + x_2 = 3, 0 \leq x_1, x_2 \leq 3$

$$\text{共 } H_3^2 = C_3^{2+3-1} = C_3^4 = 4 \text{ 種分法，同理，黃、白、黑球也有 } H_3^2 = 4 \text{ 種分法}$$

$$\therefore \text{全部有 } H_3^2 \times H_3^2 \times H_3^2 = 4 \times 4 \times 4 = 256 \text{ 種分法，但全部給甲或乙等 2 種分法不合}$$

$$\therefore \text{共 } 256 - 2 = 254 \text{ 種分法}$$