

| | | | | | |
|-------------------|-------------|----|------|---|-------------|
| 高雄市明誠中學 高二(下)平時測驗 | | | | | 日期：95.04.03 |
| 範圍 | 2-1 集合的元素個數 | 班級 | 普二 班 | 姓 | 名 |
| | | 座號 | | | |

一、選擇題(每題 10 分)

1. (複選)某班學生有 52 人參加數學測驗，試題 A, B, C 三大題，答對 A 有 37 人，答對 B 有 30 人，答對 C 有 25 人，答對 A, B 有 20 人，答對 A, C 有 16 人，答對 B, C 有 13 人，三題均答對者有 5 人，則(A)三題均答錯者有 4 人 (B)恰對一題者有 10 人 (C)至少對一題者有 48 人 (D)至少對兩題者有 38 人 (E)恰對 A 一題者有 6 人

【解答】(A)(C)(E)

【詳解】

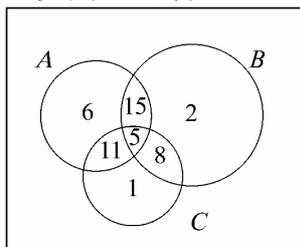
設答對 A, B, C 題者所成集合分別為 A, B, C ，則

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \\ = 37 + 30 + 25 - 20 - 13 - 16 + 5 = 48 \quad (\text{至少對一題})$$

$$\Rightarrow n(A' \cap B' \cap C') = 52 - n(A \cup B \cup C) = 52 - 48 = 4 \quad (\text{三題均答錯})$$

$$\text{由圖知 } n(A \cap B' \cap C') + n(A' \cap B \cap C') + n(A' \cap B' \cap C) = 6 + 2 + 1 = 9 \quad (\text{恰對一題})$$

$$\text{至少對二題者} = 15 + 11 + 8 + 5 = 39; \text{恰對 } A \text{ 一題者} = 6$$



2. (複選)設 $A \in N$ 且 $1 \leq A \leq 500$ ，則下列何者正確？

- (A)不為 5 的倍數之 A 值有 400 個 (B)為 2 或 3 的倍數之 A 值有 333 個
 (C)為完全平方數或完全立方數之 A 值有 27 個
 (D)不為 2，不為 3 且不為 5 的倍數之 A 值有 134 個 (E)與 28 互質之 A 值有 214 個

【解答】(A)(B)(C)(D)(E)

【詳解】

(A)對。 $500 - \left\lfloor \frac{500}{5} \right\rfloor = 500 - 100 = 400$

(B)對。 $\left\lfloor \frac{500}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{500}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{500}{6} \right\rfloor = 250 + 166 - 83 = 333$

(C)對。 S ：平方數， $S = \{1^2, 2^2, \dots, 22^2\}$ ， $n(S) = 22$

C ：立方數， $C = \{1^3, 2^3, \dots, 7^3\}$ ， $n(C) = 7$

$S \cap C = \{1^6, 2^6\}$ ， $n(S \cap C) = 2$

$n(S \cup C) = n(S) + n(C) - n(S \cap C) = 22 + 7 - 2 = 27$

(D)對。 $n(A_2 \cup A_3 \cup A_5) = n(A_2) + n(A_3) + n(A_5) - n(A_6) - n(A_{15}) - n(A_{10}) + n(A_{30})$

$$= \left\lfloor \frac{500}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{500}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{500}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{500}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{500}{15} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{500}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{500}{30} \right\rfloor$$

$$= 250 + 166 + 100 - 83 - 33 - 50 + 16 = 366$$

$$\text{所求} = 500 - 366 = 134$$

$$(E) \text{對} \circ 28 = 2^2 \times 7$$

$$n(A_2 \cup A_7) = n(A_2) + n(A_7) - n(A_{14}) = \left[\frac{500}{2} \right] + \left[\frac{500}{7} \right] - \left[\frac{500}{14} \right] = 250 + 71 - 35 = 286$$

$$\text{所求} = 500 - 286 = 214$$

二、填充題(每題 10 分)

1. 小於 1000 的自然數中，

(1) 不是 3 且不是 5 的倍數有 _____ 個。

(2) 是 3 或 5 或 7 的倍數者有 _____ 個。

(3) 是 3 或 5 但不為 7 的倍數者有 _____ 個。

【解答】(1) 533 (2) 542 (3) 400

【詳解】

$$\begin{aligned} (1) \quad n(A_3' \cap A_5') &= 999 - n(A_3 \cup A_5) \\ &= 999 - \left(\left[\frac{999}{3} \right] + \left[\frac{999}{5} \right] - \left[\frac{999}{15} \right] \right) = 999 - 333 - 199 + 66 = 533 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad n(A_3 \cup A_5 \cup A_7) &= n(A_3) + n(A_5) + n(A_7) - n(A_{15}) - n(A_{35}) - n(A_{21}) + n(A_{105}) \\ &= \left[\frac{999}{3} \right] + \left[\frac{999}{5} \right] + \left[\frac{999}{7} \right] - \left[\frac{999}{15} \right] - \left[\frac{999}{35} \right] - \left[\frac{999}{21} \right] + \left[\frac{999}{105} \right] = 542 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad n((A_3 \cup A_5) - A_7) &= n(A_3 \cup A_5) - n(A_7 \cap A_5) - n(A_7 \cap A_3) + n(A_3 \cap A_5 \cap A_7) \\ &= \left[\frac{999}{3} \right] + \left[\frac{999}{5} \right] - \left[\frac{999}{15} \right] - \left[\frac{999}{35} \right] - \left[\frac{999}{21} \right] + \left[\frac{999}{105} \right] = 400 \end{aligned}$$

2. 設 $A = \{x \in N \mid 1 \leq x \leq 540 \text{ 且 } x \text{ 與 } 360 \text{ 互質}\}$ ， $n(A) =$ _____。

【解答】144

【詳解】

$$\because 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5, 1 \leq x \leq 540 \text{ 且 } (x, 360) = 1$$

在 1 到 540 的正整數中去掉 2 或 3 或 5 的倍數

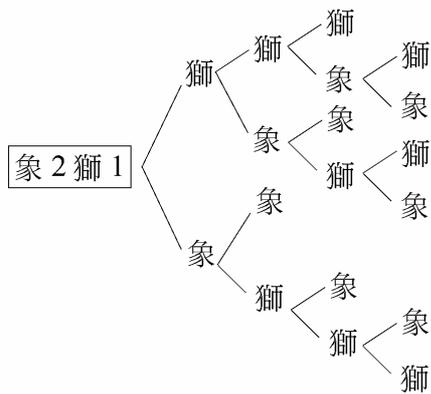
$$n(A_2 \cup A_3 \cup A_5) = n(A_2) + n(A_3) + n(A_5) - n(A_6) - n(A_{15}) - n(A_{10}) + n(A_{30})$$

$$\Rightarrow n(A) = 540 - (270 + 180 + 108 - 90 - 54 - 36 + 18) = 144$$

3. 職棒四年季後冠軍爭霸戰，是由季內賽前兩名，作七戰四勝的比賽，爭年度總冠軍，現已賽畢三場，兄弟象以 2:1 勝統一獅，則往後的比賽結果有 _____ 種以決定冠軍。

【解答】10

【詳解】利用樹狀圖



從象 2 獅 1 開始，往後比賽的情形共有 10 種

4. 7200 之正因數中為 5 的倍數但不為 9 的倍數者有 _____ 個。

【解答】24

【詳解】

$$7200 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2, d | 7200 \text{ 且 } 5 | d, \text{ 但 } 9 \nmid d$$

$$\text{設 } d = 2^p \times 3^q \times 5^r, \text{ 其中 } p = 0, 1, 2, 3, 4, 5; \quad q = 0, 1; \quad r = 1, 2$$

$$\text{則 } d \text{ 共有 } 6 \times 2 \times 2 = 24 \text{ 個}$$

5. 某班學生上次期中考成績：國、英、數不及格人數依序為 7、16、17，國英、國數、英數兩科不及格人數依序為 5、3、8，三科皆不及格有 2 位，三科皆及格有 15 位。

(1) 至少有一科不及格的人數為 _____。(2) 全班共有 _____ 位學生。

【解答】(1) 26 (2) 41

【詳解】

(1) 設 A, B, C 三集合分別表示國、英、數不及格的人所成集合

設 U 表全班人所成集合

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\ &= 7 + 16 + 17 - 5 - 3 - 8 + 2 = 26 \end{aligned}$$

$$(2) n(U) = n(A \cup B \cup C) + n(A' \cap B' \cap C') = 26 + 15 = 41$$

6. 由 1, 2, 3, 4, 5, ... 到 1357, 共 1357 個正整數中，共出現 _____ 個 0。

【解答】365

【詳解】

(1) 個位數 0 \Rightarrow 10, 20, ..., 1350, 共 135 個

(2) 十位數 0 \Rightarrow 三位數 $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & & 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 9 \times 10 = 90$

$\begin{array}{c} \uparrow \quad \quad \uparrow \\ 1 \sim 9 \quad 0 \sim 9 \end{array}$

\Rightarrow 四位數 $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & 0 & \\ \hline \end{array} \Rightarrow 4 \times 10 = 40$

$\begin{array}{c} \uparrow \quad \quad \uparrow \\ 0 \sim 3 \quad 0 \sim 9 \end{array}$

\therefore 共 $90 + 40 = 130$ 個

(3)百位數 0 \Rightarrow 四位數 $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & & \\ \hline \end{array}$ $\Rightarrow 10 \times 10 = 100$
 $\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ 0 \sim 9 \quad 0 \sim 9 \end{array}$

\therefore 共有 $135 + 130 + 100 = 365$ 個 0

7. 1 到 1000 中，3 或 5 的倍數有_____個，不是 6 也不是 4 的倍數有_____個。

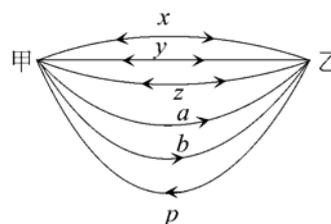
【解答】(1) 467 (2) 667

【詳解】

$$(1) \left[\frac{1000}{3} \right] + \left[\frac{1000}{5} \right] - \left[\frac{1000}{15} \right] = 333 + 200 - 66 = 467 \text{ (個)}$$

$$(2) 1000 - \left[\frac{1000}{4} \right] - \left[\frac{1000}{6} \right] + \left[\frac{1000}{12} \right] = 1000 - 250 - 166 + 83 = 667 \text{ (個)}$$

8. 甲地與乙地之間共有六條道路，其中三條是雙向道，兩條是甲地到乙地的單向道，一條是乙地到甲地的單向道。今有一人從甲地騎車到乙地，請問有多少路徑供他選擇；如果他從甲地騎車到乙地，再騎回甲地，那麼他有多少方法？_____。



【解答】5；20

【詳解】

(1) 甲到乙的路徑有 5 條

(2) 甲到乙再回到甲的路徑

先由甲到乙有 5 條走法，再由乙到甲有 4 條走法，共 $5 \times 4 = 20$ 條路徑

9. 3600 有多少個正因數？_____，這些正因數中，又有多少個是 30 的倍數？_____。

【解答】45；16

【詳解】

$3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$, $d | 3600$ 且 $30 | d$, 設 $d = 2^p \times 3^q \times 5^r$, 其中 $p = 1, 2, 3, 4$; $q = 1, 2$; $r = 1, 2$
 則 d 共有 $4 \times 2 \times 2 = 16$ 個

10. 將 10 個相同的球分給甲，乙，丙三人，每人至少 2 個，至多 4 個，有_____種分法，其中甲分得的球比乙多的方法有_____種。

【解答】6；2

【詳解】

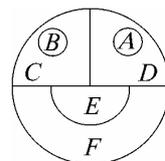
10 個相同的球，分給甲，乙，丙各 x, y, z 個且 $2 \leq x, y, z \leq 4$

則 x, y, z 之解，有下列情況

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| x | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 |
| y | 4 | 3 | 2 | 4 | 3 | 4 |
| z | 2 | 3 | 4 | 3 | 4 | 4 |

共有 6 種分法，其中甲比乙多的分法有 2 種

11.以紅、藍、黃、綠、橙、紫、黑七色塗下圖之A, B, C, D, E, F六部分，每一部分僅以一色塗之，顏色可重複使用，相鄰部分必須不同色，則有_____種塗法。

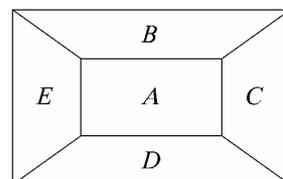


【解答】30240

【詳解】

$$\begin{array}{cccccc}
 C & D & E & F & A & B \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 & = & 30240
 \end{array}$$

12.如圖，用4種顏色著色，4色都用，塗在下圖區域中，相鄰區域顏色須相異，則有_____種塗法。



【解答】72

【詳解】

依A, B, C, D, E的順序，分成兩類

①B, D同色、塗法有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 = 48$ 種

②B, D異色、塗法有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 24$ 種

共有 $48 + 24 = 72$ 種塗法

13.用一元硬幣8個，五元硬幣1個，十元硬幣1個，

(1)可付_____種款項。(2)有_____種付款方式。

【解答】(1) 23 (2) 35

【詳解】

(1) 大鈔換小鈔 $\Rightarrow 8 + 5 \times 1 + 10 \times 1 = 23$ ，有1元至23元，共23種款項

(2) $(8+1)(1+1)(1+1) - 1 = 35$

14.某自助餐廳備有肉4種，魚3種，蔬菜5種，一位客人預計各點一種肉、魚和蔬菜，問他有_____種點菜的方式。

【解答】60

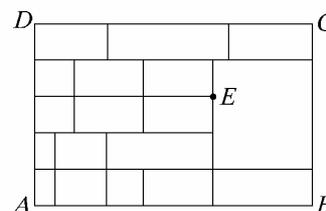
【詳解】 $4 \times 3 \times 5 = 60$ (種)

15.在一場宴會中，與會的30人彼此兩兩握手寒暄，如果大家都與自己除外的每一個人握到一次手，則此次宴會中所有人共計握手了_____次。

【解答】435

【詳解】

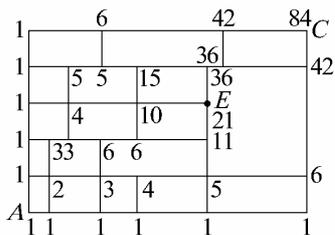
每個人與其他29人每人握手1次，共30人，但每次握手被重複算了兩次(張三與李四，李四與張三為同一次)， $\frac{(30-1) \times 30}{2} = 435$ (次)



16.某地街道圖如右，則由A \rightarrow E走捷徑有_____種走法，A \rightarrow C走捷徑有_____種走法。

【解答】21種；84種

【詳解】



17. 如下圖，以紅、黃、綠、藍、黑五色塗A, B, C, D四區，顏色可重複使用，每區塗一色或不塗色，相鄰二區不同色，且最多一區不塗色。共有_____種不同的塗法。



【解答】 680

【詳解】

| | A | B | C | D | 方法 |
|-------|---|---|---|---|-----|
| 全塗 | 5 | 4 | 4 | 4 | 320 |
| A 不塗色 | 1 | 5 | 4 | 4 | 80 |
| B 不塗色 | 5 | 1 | 5 | 4 | 100 |
| C 不塗色 | 5 | 4 | 1 | 5 | 100 |
| D 不塗色 | 5 | 4 | 4 | 1 | 80 |

共 $320 + 80 + 100 + 100 + 80 = 680$

18. 以 1000 元換成 500 元，100 元，50 元三種鈔票，其換法有_____種，若其中 100 元券至少一張，其換法有_____種。

【解答】 18；15

【詳解】

設 1000 元券換成 500 元 x 張，100 元 y 張，50 元 z 張

則 $500x + 100y + 50z = 1000$ ， x, y, z 為非負整數 $\Rightarrow 10x + 2y + z = 20$

(1) ①當 $x = 0 \Rightarrow 2y + z = 20$ ，其解為 $\begin{array}{l|l} y & 0, 1, 2, \dots, 10 \\ z & 20, 18, 16, \dots, 0 \end{array}$ 共有 11 組解

②當 $x = 1 \Rightarrow 2y + z = 10$ ，其解為 $\begin{array}{l|l} y & 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ z & 10, 8, 6, 4, 2, 0 \end{array}$ 共有 6 組解

③當 $x = 2 \Rightarrow 2y + z = 0$ ，有 1 組解(2, 0, 0)

\therefore 換法有 $11 + 6 + 1 = 18$ 種

(2) 限制 100 元至少一張時 (即 $y \geq 1$)

①當 $x = 0$ 時 $\Rightarrow 2y + z = 20$ ，其解有 10 組

②當 $x = 1$ 時 $\Rightarrow 2y + z = 10$ ，其解有 5 組

\therefore 換法有 $10 + 5 = 15$ 種

19. 設一室有 5 個門，兄弟二人由不同門進入，不同門出來，則

(1) 自己可以由相同門進出時，其方法有_____種。

(2)自己不可以由相同門進出時，其方法有_____種。

【解答】(1)400 (2)260

【詳解】

(1)兄先進入方法有 5 種，弟再進入方法有 4 種 \Rightarrow 進入方法共有 (5×4) 種
 兄出來時方法有 5 種，弟出來時方法有 4 種 \Rightarrow 出來方法共有 (5×4) 種
 進出方法共有 $(5 \times 4) \times (5 \times 4) = 400$ 種

(2)進入： 兄先進入方法有 5 種，弟再進入方法有 4 種 \Rightarrow 進入方法共有 (5×4) 種
 出來：
 兄由弟進入時的門出來，其出來方法有 $1 \times 4 = 4$ 種
 兄不經由弟進入時的門出來，其出來方法有 $3 \times 3 = 9$ 種
 故進出方法有 $20 \times (4 + 9) = 260$ 種

21.在一園遊會上，共有 60 人參與猜謎，謎題兩題，答對第一題的有 28 人，答對第二題的有 35 人，兩題都答錯的有 5 人，則兩題都答對的有幾人？_____；只答對第一題的有幾人？_____

【解答】8；20

【詳解】

設 A 表答對第一題的人所成的集合，設 B 表答對第二題的人所成的集合，則

$$\because n(A' \cap B') = 5 \Rightarrow n(U) - n(A \cup B) = 5$$

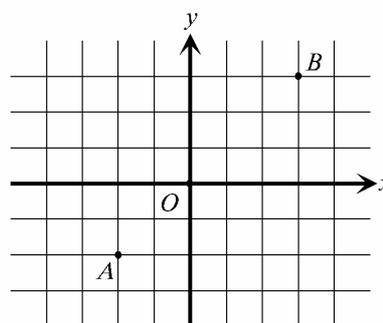
$$\therefore 60 - [28 + 35 - n(A \cap B)] = 5 \Rightarrow n(A \cap B) = 8 \text{ (人)}$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 28 - 8 = 20 \text{ (人)}$$

22.下圖中，在坐標平面上，由 A 沿著方格線走到 B ，試問：

(1)不經過原點的捷徑有多少條？_____

(2)不經過第二象限的捷徑有多少條？_____



【解答】(1) 132 (2) 186

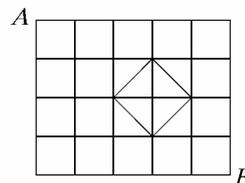
【詳解】

| | | | | | |
|-----|---|----|----|----|------------|
| 1 | 6 | 15 | 32 | 66 | B 132 |
| 1 | 5 | 9 | 17 | 34 | 66 |
| 1 | 4 | 4 | 8 | 17 | 32 |
| 1 | 3 | | 4 | 9 | 15 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| A | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| | | | | | |
|-----|---|----|----|----|------------|
| | | | | | B 186 |
| | 6 | 28 | 81 | | 186 |
| | 6 | 22 | 53 | | 105 |
| | 6 | 16 | 31 | | 52 |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| A | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

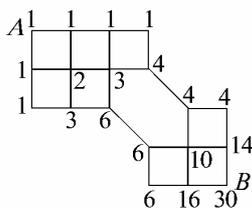
23.如圖， A 走到 B ，走捷徑的方法有幾種？_____

【解答】30



【詳解】

捷徑如圖



共有 30 種走法

24.湖中有 A, B, C 三條船, A 船可乘坐 3 人, B 船 2 人, C 船 1 人, 有 3 男 2 女乘船遊湖, 但女生需有男生陪伴, 則乘坐這些船的方法有多少種? _____

【解答】 27

【詳解】

依性別及人數的乘坐法可分成 4 類:

| A | B | C | 乘坐法 |
|---------|---------|-----|--|
| 1 男 1 女 | 1 男 1 女 | 1 男 | $(3 \times 2 \times 1) \times (2 \times 1) = 12$ |
| 1 男 2 女 | 2 男 | 0 | $(3 \times 1) \times 1 = 3$ |
| 1 男 2 女 | 1 男 | 1 男 | $(3 \times 2 \times 1) \times 1 = 6$ |
| 2 男 1 女 | 1 男 1 女 | 0 | $(3 \times 1) \times (2 \times 1) = 6$ |

乘坐法為(男生坐法×女生坐法) \Rightarrow 乘坐法有 $12 + 3 + 6 + 6 = 27$

25.有甲、乙兩人參加同一考試, 甲做錯全部試題的 $\frac{1}{4}$, 乙做錯 9 題, 而兩人同時做錯的題數為全部試題的 $\frac{1}{6}$, 試問兩人同時做對的題數是多少? _____

【解答】 2 或 13 或 24 或 35

【詳解】

設全部題數為 x , 則兩人做錯的總題數為 $\frac{x}{4} + 9 - \frac{x}{6} = \frac{x}{12} + 9$

\therefore 兩人均做對的題數為 $x - (\frac{x}{12} + 9) = \frac{11}{12}x - 9$

\therefore (兩人同時做錯的題數) \leq (乙做錯的題數) $\frac{x}{6} \leq 9 \Rightarrow x \leq 54$,

又 $\frac{11}{12}x - 9$ 為一正整數 $\Rightarrow x$ 為 12 的倍數

$\therefore x = 12, 24, 36, 48 \Rightarrow \frac{11}{12}x - 9 = 2, 13, 24, 35$