高雄市明誠中學　高二(下)平時測驗　　　日期：95.03.13					
範圍	1-4 直線與錐線	班級	普二　　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. (複選)已知雙曲線 Γ：$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$，過下列哪些點作 Γ 之切線恰有一條？

(A)(0，0)　(B)(4，1)　(C)(3，$\frac{4}{\sqrt{5}}$)　(D)($\sqrt{5}$，-2)　(E)(1，2)

【解答】(C)(D)

【詳解】

(A)(0，0)為中心，過中心沒有切線

(B)$\frac{4^2}{5}-\frac{1}{4}>1$，點(4，1)與焦點在同一區域內，過(4，1)沒有切線

(C)(3，$\frac{4}{\sqrt{5}}$)在 Γ 上，過此點恰有一條切線

(D)($\sqrt{5}$，-2)在漸近線 $2x+\sqrt{5}y=0$ 上，過此點恰有一條切線

(E)$\frac{1^2}{5}-\frac{2^2}{4}=\frac{1}{5}-1<1$，點(1，2)與中心(0，0)在同一區域內且不在漸近線上

過點(1，2)有兩條切線

二、填充題(每題 10 分)

1. 已知直線 $y=2x+k$ 與雙曲線 $x^2-4y^2=4$ 相切，則實數 k 之值為____________。

【解答】$\pm\sqrt{15}$

【詳解】$\begin{cases} y=2x+k & \cdots\cdots① \\ x^2-4y^2=4 & \cdots\cdots② \end{cases}$

①代入②　$\Rightarrow$　$15x^2+16kx+4(k^2+1)=0$

$\because$　相切　$\therefore$　判別式 $=(16k)^2-4\times15\times4(k^2+1)=0$，得 $k=\pm\sqrt{15}$

2. 一直線通過點(0，2)，而與雙曲線 $x^2-y^2=4$ 恰有一個交點，則此直線之斜率為________。

【解答】$\pm\sqrt{2}$

【詳解】一直線通過點(0，2)，設直線方程式 L：$y=mx+2$，入 Γ：$x^2-y^2=4$ 中

則 $x^2-(mx+2)^2=4$，得 $(1-m^2)x^2-4mx-8=0$　$\because$　L 與 Γ 恰有一個交點

$\therefore$　令 $D=(-4m)^2-4(1-m^2)(-8)=0$　$\Rightarrow$　$m^2=2$　$\Rightarrow$　$m=\pm\sqrt{2}$

3. 已知 P 為橢圓 $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$ 上之一點，則 P 到直線 $2x-y+6=0$ 的最長距離為__

，此時 P 點的坐標為____________。

【解答】$3\sqrt{5}$，($\frac{13}{2}$，$\frac{-19}{5}$)

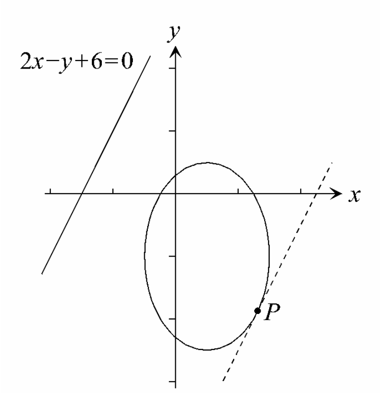
【詳解】橢圓 Γ：$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$，其中心(1，$-2$)，設 $y=2x+k$ 為 Γ 之切線

$y=2x+k$代入Γ 得$\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(2x+k+2)^2}{9}=1 \Rightarrow 25x^2+(16k+14)x+4k^2+16k-11=0$

$D=(8k+7)^2-25(4k^2+16k-11)=0 \Rightarrow k^2+8k-9=0 \Rightarrow k=-9$ 或 1

求最長距離 $\therefore\ k=-9$，$\dfrac{|6-(-9)|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{15}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$

$y=2x-9$ 代入Γ，得$(5x-13)^2=0 \Rightarrow x=\dfrac{13}{5}$，$y=\dfrac{-19}{5}$ $\therefore$ $P(\dfrac{13}{5}$，$\dfrac{-19}{5})$



4. 試求與橢圓Γ_1：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 共焦點，且通過點(2，3)之雙曲線Γ_2方程式爲__________；並求過點($\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，1)且與橢圓Γ_1相切的直線方程式爲__________。

【解答】$\dfrac{y^2}{3}-\dfrac{x^2}{2}=1$，$3\sqrt{2}x+y=9$

【詳解】

Γ_1焦點(0，$\sqrt{5}$)，(0，$-\sqrt{5}$) $\therefore$ Γ_2：$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$，$a^2+b^2=5$……①

Γ_2過點(2，3) $\therefore$ $\dfrac{9}{a^2}-\dfrac{4}{b^2}=1$……②，①代入②得$a^4-18a^2+45=0$

$\Rightarrow$ $a^2=3$ 或 15（不合），代入①得$b^2=2$ $\therefore$ Γ_2：$\dfrac{y^2}{3}-\dfrac{x^2}{2}=1$，($\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，1)在$\Gamma_1$上

$\therefore$ 其切線方程式爲$\dfrac{\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot x}{4}+\dfrac{1\cdot y}{9}=1$，即$3\sqrt{2}x+y=9$

5. 直線L：$x-y+1=0$ 被雙曲線 $3x^2-y^2=3$ 截出一弦（線段），此弦的長度爲__________。

【解答】$3\sqrt{2}$

【詳解】

$\begin{cases} x-y+1=0 \cdots\cdots ① \\ 3x^2-y^2=3 \cdots\cdots ② \end{cases}$，由① $y=x+1$ 代入②，$3x^2-(x+1)^2=3 \Rightarrow 3x^2-x^2-2x-1=3$

$\Rightarrow 2x^2-2x-4=0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow (x-2)(x+1)=0$

$\therefore$ $x=2$ 或-1，代入①得$y=3$ 或 0 二交點$\Rightarrow(2,3),(-1,0)$

$\therefore$ 此弦長度$=\sqrt{(2+1)^2+(3-0)^2}=3\sqrt{2}$

6. 若直線過(3，6)與橢圓 $4x^2+9y^2=36$ 相切，則直線方程式爲__________。

【解答】$8x-9y+30=0$ 及 $x=3$

【詳解】

Sol一：

點(3，6)不在橢圓 $4x^2+9y^2=36$ 上，設切線方程式為 $y-6=m(x-3)$

$\Rightarrow$ $y=mx+6-3m$ 代入橢圓方程式 $\Rightarrow$ $4x^2+9(mx+6-3m)^2=36$

$\Rightarrow$ $4x^2+9m^2x^2+18m(6-3m)x+9(6-3m)^2=36$

$\Rightarrow$ $(4+9m^2)x^2+18m(6-3m)x+(288-324m+81m^2)=0$

$\because$ 相切 $\therefore$ $D=[18m(6-3m)]^2-4(4+9m^2)(288-324m+81m^2)=0$

$\Rightarrow$ $D=9m^2(36-36m+9m^2)-(4+9m^2)(32-36m+9m^2)$

$=324m^2-324m^3+81m^4-128+144m-36m^2-288m^2+324m^3-81m^4$

$=-128+144m=0 \Rightarrow m=\dfrac{8}{9}$

$\therefore$ 切線方程式為 $y-6=\dfrac{8}{9}(x-3)$，即 $8x-9y+30=0$，另一切線為鉛直線 $x=3$

Sol二：

橢圓 $9x^2+4y^2=36 \Rightarrow \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$，設切線方程式為 $y-0=m(x-0)\pm\sqrt{4m^2+9}$，

切線過點(3，6)代入 $\Rightarrow 6=3m\pm\sqrt{9m^2+4} \Rightarrow (6-3m)^2=(\pm\sqrt{9m^2+4})^2$

$36-36m+9m^2=9m^2+4 \Rightarrow 36m=32$，所以 $m=\dfrac{8}{9}$……

7. 雙曲線 Γ：$x^2-y^2-4x+8y-16=0$，

(1) Γ 之共軛雙曲線方程式為________________。

(2)一弦 $\overline{AB}$ 之中點為(4，3)，則含此弦 $\overline{AB}$ 之直線方程式為________________。

【解答】(1) $-\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{(y-4)^2}{4}=1$ (2) $2x+y-11=0$

【詳解】(1) Γ：$x^2-y^2-4x+8y-16=0 \Rightarrow (x-2)^2-(y-4)^2=4 \Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{4}-\dfrac{(y-4)^2}{4}=1$

故 Γ 之共軛雙曲線為 $-\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{(y-4)^2}{4}=1$

(2)設 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$

$\overleftrightarrow{AB}$ 之方程式 $y-3=m(x-4) \Rightarrow y=mx-4m+3$

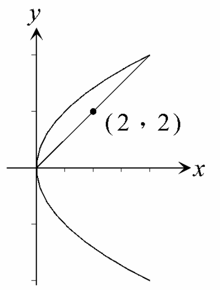
$\therefore \begin{cases} y=mx-4m+3 \\ x^2-y^2-4x+8y-16=0 \end{cases} \Rightarrow x^2-(mx-4m+3)^2-4x+8(mx-4m+3)-16=0$

$\Rightarrow (1-m^2)x^2+(8m^2+2m-4)x+(-16m^2-8m-1)=0$

二根 x_1，x_2 $\Rightarrow x_1+x_2=\dfrac{8m^2+2m-4}{m^2-1}$ $\because$ $\overline{AB}$ 之中點(4，3)

$\Rightarrow \dfrac{x_1+x_2}{2}=4 \Rightarrow \dfrac{4m^2+m-2}{m^2-1}=4 \Rightarrow m=-2$

故 $\overleftrightarrow{AB}$ 之方程式為 $y=-2x+11 \Rightarrow 2x+y-11=0$



8. 設拋物線 $y^2=4x$ 上一弦以(2，2)為中點，則此弦所在的直線方程式為______________，又弦長 =__________。

【解答】$x-y=0$；$4\sqrt{2}$

【詳解】

設拋物線$y^2=4x$，以(2，2)為弦中點的弦所在的直線為 $y-2=m(x-2)$

$\begin{cases} y^2=4x \\ y-2=m(x-2) \Rightarrow x=\dfrac{y+2m-2}{m} \end{cases}$，得$my^2=4y+8m-8$

二交點以(2，2)為中點，即$my^2-4y+(8-8m)=0$……(※)，兩根和$\dfrac{4}{m}=4$，可得$m=1$

所求的弦所在的直線方程式為$y-2=1\cdot(x-2)$，即$x-y=0$

當$m=1$時，(※)式為$y^2-4y=0$，即$y=0$或4，

當$y=0$時，$x=0$，$y=4$時，$x=4$，兩交點(0，0)，(4，4)，所以弦長 $=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

9. 若點$P(2，-3)$為拋物線$y^2=8x$之一弦$\overline{AB}$的中點，則直線$\overleftrightarrow{AB}$方程式為______________，弦$\overline{AB}$的長為__________。

【解答】$4x+3y+1=0$，$\dfrac{5\sqrt{7}}{2}$

【詳解】

(1)設$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$ ∵ $P(2，-3)$為$\overline{AB}$中點 ∴ $x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=-6$

又$\begin{cases} {y_1}^2=8x_1 & \cdots\cdots① \\ {y_2}^2=8x_2 & \cdots\cdots② \end{cases}$，①－②得$(y_1+y_2)(y_1-y_2)=8(x_1-x_2)$

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{AB}$斜率 $=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{8}{y_1+y_2}=\dfrac{8}{-6}=-\dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{AB}$：$y+3=-\dfrac{4}{3}(x-2)$ $\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{AB}$：$4x+3y+1=0$

(2)由(1)，$x_1-x_2=-\dfrac{3}{4}(y_1-y_2)$

$\begin{cases} 4x+3y+1=0 \\ y^2=8x \end{cases}$ $\Rightarrow$ $y^2+6y+2=0$，二根為y_1，y_2 ∴ $y_1y_2=2$

$\overline{AB}^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=\dfrac{9}{16}(y_1-y_2)^2+(y_1-y_2)^2$

$=\dfrac{25}{16}(y_1-y_2)^2=\dfrac{25}{16}[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]=\dfrac{25}{16}[(-6)^2-4\cdot 2]=\dfrac{25\cdot 7}{4}$ $\Rightarrow$ $\overline{AB}=\dfrac{5\sqrt{7}}{2}$

10.雙曲線Γ：$x^2-y^2=8$，$A(1，1)$，由A向Γ作切線，則切線方程式為_______________。

【解答】$9x+7y-16=0$

【詳解】

Sol一：

設切線L：$y-1=m(x-1)$，$\begin{cases} L：y=mx+(1-m) & \cdots\cdots① \\ \Gamma：x^2-y^2=8 & \cdots\cdots② \end{cases}$

①代入② $\Rightarrow$ $(1-m^2)x^2+2m(m-1)x+(2m-m^2-1-8)=0$

∵ 相切 ∴ $D=4m^2(m-1)^2-4(1-m^2)(2m-m^2-9)=0$ $\Rightarrow$ $4(m-1)(7m+9)=0$

$\Rightarrow$ $m=\dfrac{-9}{7}$或$m=1$（不合 ∵ $m=1$時，切線L與其中一條漸近線重合）

$\therefore\quad L：y-1=\dfrac{-9}{7}(x-1)\quad\Rightarrow\quad 9x+7y-16=0$

Sol二：

雙曲線Γ：$x^2-y^2=8\Rightarrow\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$

設切線L：$y-0=m(x-0)\pm\sqrt{8m^2-8}$，$A(1，1)$代入$\Rightarrow 1=m\pm\sqrt{8m^2-8}$

$(1-m)^2=(\pm\sqrt{8m^2-8})^2\Rightarrow 1-2m+m^2=8m^2-8\Rightarrow(7m+9)(m-1)=0$

$\Rightarrow\quad m=\dfrac{-9}{7}$或$m=1$（不合　$\because\quad m=1$時，切線L與其中一條漸近線重合）……

11.若拋物線$y^2=4x$與直線$y=2x+k$交於相異兩點，則k的範圍爲＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$k<\dfrac{1}{2}$

【詳解】

$y=2x+k$代入$y^2=4x$中，$(2x+k)^2=4x$，得 $4x^2+4(x-1)x+k^2=0$

$\because$　交於相異兩點　$\therefore$　判別式$D=[4(k-1)]^2-4\cdot4\cdot k^2>0$

$\Rightarrow\quad k^2-2k+1-k^2>0\quad\Rightarrow\quad 2k<1\quad\Rightarrow\quad k<\dfrac{1}{2}$

12.設ℓ爲通過橢圓Γ_1：$\dfrac{(x-1)^2}{3}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=\dfrac{1}{4}$與橢圓$\Gamma_2$：$4x^2+3y^2-18y+25=0$兩交點之直線，則直線$\ell$之方程式爲＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$4x-3y+6=0$

【詳解】

Γ_1：$4(x-1)^2+3(y-2)^2=3\quad\Rightarrow\quad 4x^2+3y^2-8x-12y+13=0$

$\begin{cases}4x^2+3y^2-8x-12y+13=0\\4x^2+3y^2-18y+25=0\end{cases}$　兩式相減$\Rightarrow\quad -8x+6y-12=0\quad\Rightarrow\quad 4x-3y+6=0$

13.橢圓$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$在直線$x+2y-12=0$上正射影長爲＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{12}{5}\sqrt{5}$

【詳解】

橢圓在直線$x+2y-12=0$上正射影長即爲垂直於$x+2y-12=0$且與橢圓相切之兩平行線間的距離，設$\begin{cases}切線\ L：2x-y+k=0\cdots\cdots①\\橢圓\Gamma：\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1\quad\cdots\cdots②\end{cases}$

由①　$\Rightarrow\quad y=2x+k$代入②　$\Rightarrow\quad 9x^2+8kx+2(k^2-4)=0$

$\because$　相切　$\therefore\quad D：64k^2-4\times9\times2(k^2-4)=0$得$k=\pm6$代入①

$\Rightarrow$　兩切線分別爲L_1：$2x-y+6=0$及L_2：$2x-y-6=0$

所求$=d(L_1，L_2)=\dfrac{|6-(-6)|}{\sqrt{4+1}}=\dfrac{12}{5}\sqrt{5}$

14.求橢圓$x^2+2y^2-2x=4$與直線$y=x-1$之交弦長爲＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{2\sqrt{30}}{3}$

【詳解】

$\begin{cases}橢圓：x^2+2y^2-2x-4=0 \cdots\cdots ① \\ 直線：y=x-1 \qquad\qquad\quad \cdots\cdots ②\end{cases}$

②代入① $\Rightarrow$ $3x^2-6x-2=0$ 之二根爲x_1，x_2

則交點分別爲$A(x_1$，$x_1-1)$，$B(x_2$，$x_2-1)$，又$x_1+x_2=2$，$x_1 x_2=\dfrac{-2}{3}$

$\overline{AB}^2=(x_1-x_2)^2+[(x_1-1)-(x_2-1)]^2=2(x_1-x_2)^2=2[(x_1-x_2)^2-4x_1x_2]$

$=2[2^2-4\times(\dfrac{-2}{3})]=\dfrac{40}{3}$，弦長$=\overline{AB}=\sqrt{\dfrac{40}{3}}=\dfrac{2\sqrt{30}}{3}$

15.拋物線$y=4x-x^2$在點(1，3)之切線與坐標軸圍成一個三角形，此三角形的面積 ＝____。

【解答】$\dfrac{1}{4}$

【詳解】

點(1，3)在$y=4x-x^2$之圖形上，切線方程式爲$\dfrac{y+3}{2}=4\cdot\dfrac{x+1}{2}-1\cdot x \Rightarrow$ $y=2x+1$，

此切線與x，y軸交點分別爲$A(-\dfrac{1}{2}$，0)，B(0，1)，故△OAB之面積 $=\dfrac{1}{2}|(-\dfrac{1}{2})\times 1|=\dfrac{1}{4}$

16.求與$x+2y=0$ 垂直，且與拋物線$y^2=16x$相切之直線方程式爲__________。

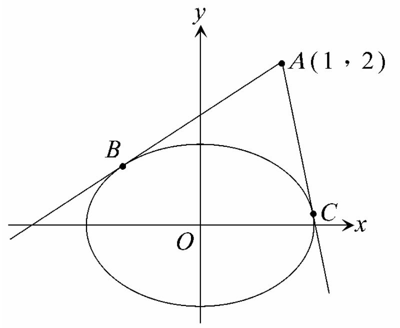
【解答】$y=2x+2$

【詳解】

∵ 所求直線L與$x+2y=0$ 垂直 ∴ 斜率爲 2，又與拋物線$(y-0)^2=4\times 4(x-0)$相切

故此直線方程式爲$y-0=2(x-0)+\dfrac{4}{2}$，即$y=2x+2$

17.Γ：$x^2+2y^2=2$，由A(1，2)向Γ 作切線得二切點B，C，則$\overline{BC}$長爲______________。



【解答】$\dfrac{2}{9}\sqrt{119}$

【詳解】

切點弦$\overleftrightarrow{BC}$：$1\cdot x+2\cdot(2\cdot y)=2$ $\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{BC}$：$x+4y=2$

$\begin{cases}\overleftrightarrow{BC}：x=2-4y \quad \cdots\cdots ① \\ \Gamma：x^2+2y^2=2 \cdots\cdots ②\end{cases}$

①代入② $\Rightarrow(2-4y)^2+2y^2=2$ $\Rightarrow 9y^2-8y+1=0$ 之二根爲y_1，y_2

則$\begin{cases}y_1+y_2=\dfrac{8}{9} \\ y_1y_2=\dfrac{1}{9}\end{cases}$ 且$\begin{cases}x_1=2-4y_1 \\ x_2=2-4y_2\end{cases}$，$\overline{BC}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{[-4(y_1-y_2)]^2+(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{17(y_1-y_2)^2}=\sqrt{17[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}=\sqrt{17[(\dfrac{8}{9})^2-4\times\dfrac{1}{9}]}=\dfrac{2}{9}\sqrt{119}$

18.直線 $y=-2x+4$ 上一點 P 與拋物線 $y=1-x^2$ 上的點 Q 之距離最小，則 P 之坐標爲____，

Q 之坐標爲＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(\frac{9}{5}，\frac{2}{5})$；$(1，0)$

【詳解】

設 $Q\,(t,1-t^2)$，Q 到直線 $2x+y-4=0$ 的距離爲

$$\frac{|2t+1-t^2-4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|-(t^2-2t+1)-2|}{\sqrt{5}}=\frac{|(t-1)^2+2|}{\sqrt{5}}$$

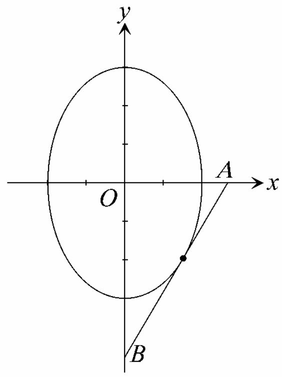
當 $t=1$ 時，最小值 $\frac{2}{\sqrt{5}}$，此時 $Q\,(1，0)$，又過 Q 作 $2x+y-4=0$ 之垂直線 $x-2y=1$

二直線交點 $P(x，y)$，$x=\frac{9}{5}$，$y=\frac{2}{5}$，即 $P\,(\frac{9}{5}，\frac{2}{5})$

19.橢圓 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 之任一切線分別與 x 軸，y 軸交點於 A，B，則線段 $\overline{AB}$ 之最小值爲＿＿＿＿，又△OAB 面積最小值爲＿＿＿＿＿＿

【解答】5；6

【詳解】



橢圓 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 上一點 $P(\,2\cos\theta，3\sin\theta)$ 且 P 不是頂點

過 P 之切線 $\frac{(2\cos\theta)x}{4}+\frac{(3\sin\theta)y}{9}=1$，即 $(\,3\cos\theta)x+(\,2\sin\theta)y=6$

與 x 軸交點 $A(\;\frac{2}{\cos\theta}\;，0\,)$，與 y 軸交點 $B(\,0，\frac{3}{\sin\theta}\;)$

(1)線段 $\overline{AB}$ 之長

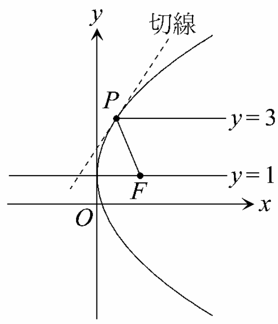
$=\sqrt{\frac{4}{\cos^2\theta}+\frac{9}{\sin^2\theta}}=\sqrt{[(\frac{2}{\sin\theta})^2+(\frac{3}{\sin\theta})^2](\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\geq\sqrt{(2+3)^2}=5$（柯西不等式）

∴　最小值爲 5

(2)△OAB 的面積 $=\frac{1}{2}\left|\frac{2}{\cos\theta}\times\frac{3}{\sin\theta}\right|=\frac{6}{|\sin 2\theta|}\geq 6$

∵　$|\sin 2\theta\,|\leq 1$　∴　最小值 $=6$

20.拋物線 Γ：$(y-1)^2=6x$，一入射光沿直線 $y=3$ 射到 Γ 上一點 P，經拋物線反射後，反射光與對稱軸交於一點 Q，則 P 之坐標爲＿＿＿＿，Q 之坐標爲＿＿＿＿＿＿。



【解答】$P(\frac{2}{3}，3)$；$Q(\frac{3}{2}，1)$

【詳解】

Γ：$(y-1)^2=6x$ 對稱軸 $y-1=0$，頂點 $(0，1)$，$y=3$ 代入得 $x=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，知 P 點爲 $(\frac{2}{3}，3)$

又反射光與對稱軸的交點即爲焦點 F，故 $Q=F$ 的坐標爲 $(\frac{6}{4}，1)=(\frac{3}{2}，1)$

21.設 E，F 爲橢圓 $4x^2+y^2=8$ 的兩焦點，點 $A(1，2)$，求∠EAF 的角平分線方程式爲＿＿＿＿＿。

【解答】$x-2y+3=0$

【詳解】

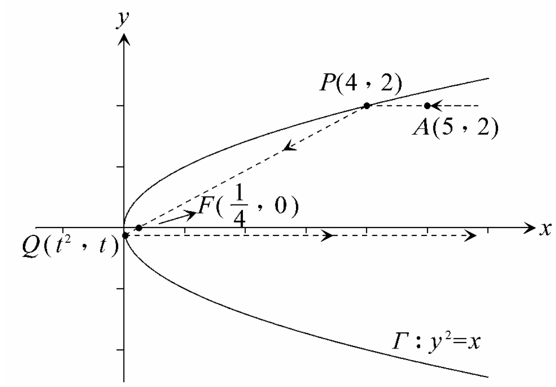
橢圓 $4x^2+y^2=8$，點$A(1，2)$在橢圓上，E，F為焦點，則$\angle EAF$的角平分線方程式為過A之法線⇒切線為 $4\cdot1\cdot x+2\cdot y=8\ \Rightarrow\ 2x+y=4$，$m=-2$

故過A之法線 $y-2=\dfrac{1}{2}(x-1)$，即角平分線方程式為 $x-2y+3=0$

22.設拋物線Γ：$y^2=x$，一光線從點$(5，2)$射出，平行Γ 的對稱軸，射在Γ 上的P點，經反射後，又射到Γ 上的Q點，則P點的坐標為__________，Q點的坐標為__________。

【解答】$(4，2)$，$(\dfrac{1}{64}，-\dfrac{1}{8})$

【詳解】



Γ：$y^2=x$，焦點為$F(\dfrac{1}{4}，0)$，以$y=2$ 代入，得$x=4$ ∴ $P(4，2)$

令$Q(t^2，t)\in\Gamma$，$t<0$，由P，F，Q共線得$\dfrac{t-2}{t^2-4}=\dfrac{0-2}{\frac{1}{4}-4}\Rightarrow\ t=-\dfrac{1}{8}$ ∴ $Q(\dfrac{1}{64}，-\dfrac{1}{8})$

23.已知橢圓方程式為$\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$，則此橢圓焦點坐標為________________，若自左邊焦點F上發射一直線光，打在橢圓某一點P，再自P反射，最後需落在F'上，則此光線最少需走多少距離？_____________。

【解答】$(1，1\pm2\sqrt{3})$，8，

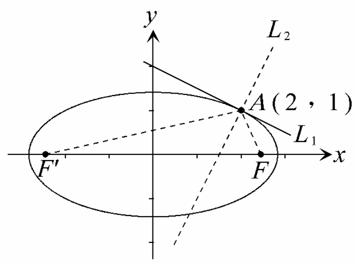
【詳解】

橢圓方程式：$\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$，中心$(1，1)$，$a^2=16$，$a=4$，$b^2=4$，$b=2$

$\Rightarrow\ c^2=a^2-b^2=16-14=12$ ∴ $c=\pm2\sqrt{3}$ ∴ 焦點坐標為$(1，1\pm2\sqrt{3})$

設$P(x，y)$，由定義：$|\overline{PF}+\overline{PF'}|=2a=2\cdot4=8$

24. 設F與F'為橢圓$x^2+4y^2=8$ 的兩焦點，若A的坐標為$(2，1)$，求$\angle FAF'$的角平分線方程式_____________。

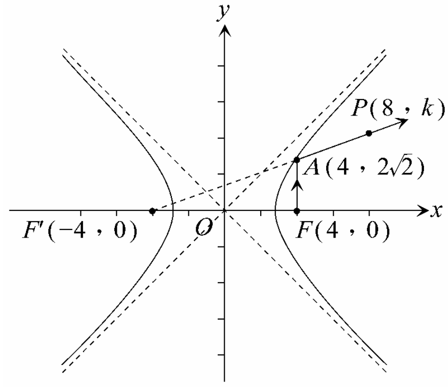


【解答】$2x-y=3$

【詳解】

過$A(2，1)$之切線L_1：$2x+4y=8$，由光學性質可知$\angle FAF'$的角平分線為過A之法線L_2，∵$L_2\perp L_1$ ∴設L_2：$y-1=2(x-2)\ \Rightarrow\ L_2$：$2x-y=3$

25.雙曲線Γ：$\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$，又$A\in\Gamma$，已知$A(4，2\sqrt{2})$，$F(4，0)$，若由$F$射至$A$之光線被雙曲線$\Gamma$ 反射，反射光通過$P(8，k)$，則$k=$________。



【解答】$3\sqrt{2}$

【詳解】

由光學性質可知反射光線必通過直線$\overleftrightarrow{F'A}$，

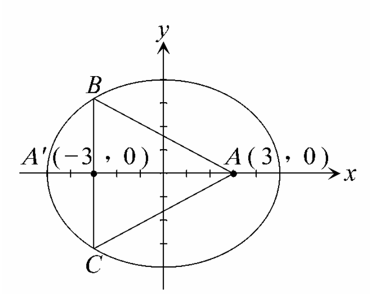
$m_{F'A}=\dfrac{2\sqrt{2}-0}{4-(-4)}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\overleftrightarrow{F'A}:y-0=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(x+4)$，$P(8，k)$代入$\overleftrightarrow{F'A}$ $\Rightarrow$ $k=3\sqrt{2}$

26.已知橢圓方程式$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$，若有光束自焦點$A(3，0)$射出，經二次反射回到$A$點，設二次反射點為$B$，$C$，如圖所示，求$\triangle ABC$之周長________。

【解答】20

【詳解】



Γ：$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ $\Rightarrow$ $a=5$，$b=4$，由橢圓的光學性質知

若光束自焦點$A(3，0)$射出，經一次反射後，必通過另一焦點$A'(-3，0)$

$\therefore$ $\triangle ABC$之周長 $=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=(\overline{AB}+\overline{BA'})+(\overline{A'C}+\overline{CA})=2a+2a=4a=4\times5=20$