| 高雄市明誠中學 高二(下)平時測驗 日期：95.03.06 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 範圍 | 1-3 雙曲線 | 班級 | 普二　　班 | 姓名 | |
| | | 座號 | | | |

一、選擇題(每題 10 分)

1.已知雙曲線$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$上一點 $P$ 到其中一焦點 $F$ 的距離為 4，那麼 $P$ 到另一焦點 $F'$的距離是多少？(A) 2　(B) 4　(C) 6　(D) 10　(E) 12

【解答】(D)

【詳解】

雙曲線$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$　$\Rightarrow$　$a^2=9$　$\Rightarrow$　$a=3$，由雙曲線定義 $|\overline{PF}-\overline{PF'}|=2a$

$\Rightarrow$　$|4-\overline{PF'}|=2\times 3=6$　$\Rightarrow$　$4-\overline{PF'}=\pm 6$

$\Rightarrow$　$\overline{PF'}=10$ 或 $-2$（不合）　$\therefore$　$\overline{PF'}=10$

2. (複選)雙曲線$\Gamma$ 之二焦點$F'(-1，2)$，$F(5，2)$且過點$(-3，6)$，下列何者正確？

(A)中心為(2，2)　(B)貫軸長為 $2\sqrt{5}$　(C)共軛軸長為 4　(D)正焦弦長為$\dfrac{8}{5}$

(E) $\Gamma$ ：$\dfrac{(x-2)^2}{5}-\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$

【解答】(A)(B)(C)(E)

【詳解】

$F'(-1，2)$，$F(5，2)$　$\Rightarrow$　中心(2，2)，$c=3$

又$|\overline{PF}-\overline{PF'}|=|\sqrt{2^2+4^2}-\sqrt{8^2+4^2}|=2\sqrt{5}$

$\Rightarrow$　$a=\sqrt{5}$　$\therefore$　$b^2=4$　$\Rightarrow$　$b=2$　$\therefore$　$\Gamma$ ：$\dfrac{(x-2)^2}{5}-\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$

$\therefore$　貫軸長 $=2a=2\sqrt{5}$，共軛軸長 $=2b=4$，正焦弦長 $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\cdot 2^2}{\sqrt{5}}=\dfrac{8}{5}\sqrt{5}$

3. (複選)動點 $P(x，y)$滿足$|\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}-\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}|=k$，下列何者正確？

(A) $k=0$ 表一直線　(B) $k=2$ 時，正焦弦長 $=\dfrac{21}{2}$　(C) $k=3$ 表一拋物線

(D) $k=5$ 表一射線　(E) $k>5$ 表一雙曲線

【解答】(A)(B)

【詳解】

$|\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}-\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}|=k$

$\Rightarrow$　$F'(-2，2)$，$F(1，-2)$且$\overline{FF'}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

(A) $k=0$ 時，$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}$　$\Rightarrow$　$6x-8y+3=0$ 表一直線

(B) $k=2$ 時　$\because$　$\overline{FF'}=2c=5$　$\Rightarrow$　$c=\dfrac{5}{2}$　$\because$　$2a=2$　$\Rightarrow$　$a=1$

$\therefore\quad b=\sqrt{(\frac{5}{2})^2-1^2}=\frac{\sqrt{21}}{2}\quad\therefore\quad$ 正焦弦長 $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\cdot\frac{21}{4}}{1}=\frac{21}{2}$

(C)(D)(E) $0<k<5$ 表雙曲線，$k=5$ 表二射線，$k<5$ 沒有圖形

二、填充題( 每題 10 分)

1. 等軸雙曲線$\Gamma$ 有一條漸近線為$x-y=0$，中心坐標為(1，1)，且$\Gamma$通過點(3，0)，則$\Gamma$ 的方程式為____________________，另一漸近線方程式為____________________。

【解答】$(x-y)(x+y-2)=3$；$x+y=2$

【詳解】

等軸雙曲線$\Gamma$ 的二漸近線互相垂直

一漸近線為 $x-y=0$，中心(1，1)，則另一漸近線為 $x+y=d$，$d$ 為常數

且 $1+1=d$，即 $d=2$，$\Gamma$ 的方程式為$(x-y)(x+y-2)=k$，$k$ 為常數

點(3，0)在$\Gamma$ 上，所以$(3-0)(3+0-2)=k$，即 $k=3$，方程式為$(x-y)(x+y-2)=3$

2. 求雙曲線$\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y+3)^2}{9}=1$ 之兩漸近線交點坐標為________________。

【解答】(1，$-3$)

【詳解】

雙曲線$\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y+3)^2}{9}=1$ 之兩漸近線交點坐標為雙曲線之中心，即(1，$-3$)

3. 以 $2x+y+3=0$ 與 $2x-y-1=0$ 為二漸近線，且過(0，0)之雙曲線方程式__________。

【解答】$(2x+y+3)(2x-y-1)=-3$

【詳解】

設所求雙曲線方程式為$(2x+y+3)(2x-y-1)=k$（$k\neq 0$）

將(0，0)代入，則 $k=3\times(-1)=-3$，雙曲線方程式為$(2x+y+3)(2x-y-1)=-3$

4. 錐線$\frac{x^2}{12-k}+\frac{y^2}{3-k}=1$（$k$為實數）為一雙曲線時，$k$的範圍為______________，其焦點坐標為______________。

【解答】$3<k<12$；(3，0)，($-3$，0)

【詳解】

$\frac{x^2}{12-k}+\frac{y^2}{3-k}=1$ 為一雙曲線$\Rightarrow(12-k)(3-k)<0\Rightarrow(k-12)(k-3)<0\Rightarrow 3<k<12$

此時方程式為$\frac{x^2}{12-k}-\frac{y^2}{k-3}=1$，$a^2=12-k$，$b^2=k-3\quad\Rightarrow\quad c^2=a^2+b^2=9$

$\Rightarrow\quad c=3$，又貫軸在$x$軸上，中心(0，0)，故焦點為(3，0)，($-3$，0)

5. 求雙曲線$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$之兩焦點坐標爲__________，正焦弦長爲__________。

【解答】(1) $(0，4)，(0，-4)$ (2)$\frac{14}{3}$

【詳解】

雙曲線$-\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{9}=1$，中心$(0，0)$，$a^2=9 \Rightarrow a=3$，$b^2=7 \Rightarrow b=\sqrt{7}$

$c^2=a^2+b^2=9+7=16 \Rightarrow c=4$

∴ 兩焦點坐標爲$(0，4)，(0，-4)$，正焦弦長$=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 7}{3}=\frac{14}{3}$

6. 雙曲線$\Gamma$之中心爲$(2，1)$，共軛軸平行$y$軸，過$\Gamma$之一頂點之兩焦半徑爲 9 與 1，則 (1) $\Gamma$之標準式爲__________。 (2) $\Gamma$之焦點坐標爲__________。

【解答】(1)$\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$ (2) $(-3，1)，(7，1)$

【詳解】

$\begin{cases} c+a=9 \\ c-a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=5 \\ a=4 \end{cases} \Rightarrow b=3$

故雙曲線爲$\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$，二焦點$(-3，1)，(7，1)$

7. 已知一雙曲線方程式爲$|\sqrt{(x-4)^2+(y+2)^2}-\sqrt{(x+6)^2+(y+2)^2}|=8$，則此雙曲線的貫軸長$=$__________，貫軸上頂點坐標__________，漸近線方程式__________，共軛雙曲線方程式__________。

【解答】(1) 8 (2) $(3，-2)$與$(-5，-2)$ (3) $3x+4y+11=0$ 及 $3x-4y-5=0$

(4)$\frac{(y+2)^2}{9}-\frac{(x+1)^2}{16}=1$

【詳解】

雙曲線方程式：$|\sqrt{(x-4)^2+(y+2)^2}-\sqrt{(x+6)^2+(y+2)^2}|=8$

兩焦點$F(4，-2)$，$F'(-6，-2)$，中心$(\frac{4-6}{2}，-2)=(-1，-2)$

貫軸長$=2a=8 \Rightarrow a=4$，$c=-1-(-6)=5$ ∴ $b=\sqrt{c^2-a^2}=3$

貫軸頂點坐標爲$(-1+4，-2)$與$(-1-4，-2)$，即$(3，-2)$與$(-5，-2)$

雙曲線標準式爲$\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=1 \Rightarrow$ 漸近線$\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=0$

$\Rightarrow \frac{x+1}{4}\pm\frac{y+2}{3}=0 \Rightarrow 3x+4y+11=0$ 及 $3x-4y-5=0$

其共軛雙曲線方程式$-\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$

8. 等軸雙曲線$\Gamma$之中心爲$(2，1)$，正焦弦長$2\sqrt{2}$，一漸近線方程式爲$x-y-1=0$，

(1) $\Gamma$ 之標準式爲＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

(2)若$\Gamma$ 之貫軸平行$x$軸，則焦點坐標爲＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $\frac{(x-2)^2}{2}-\frac{(y-1)^2}{2}=\pm 1$　(2) (0，1)，(4，1)

【詳解】

另一漸近線爲$(y-1)=-(x-2)$　$\Rightarrow$　$x+y-3=0$　$\therefore$　設$\Gamma$ ：$(x-y-1)(x+y-3)=k$

$\Rightarrow$　$x^2-y^2-4x+2y+3=k$　$\Rightarrow$　$(x-2)^2-(y-1)^2=k$

$\Rightarrow$　$\frac{(x-2)^2}{k}-\frac{(y-1)^2}{k}=1$ 或 $-\frac{(x-2)^2}{-k}+\frac{(y-1)^2}{-k}=1$

$\therefore$　$a=\sqrt{k}$ ，$b=\sqrt{k}$ 或$a=\sqrt{-k}$ ，$b=\sqrt{-k}$ ，正焦弦長 $=\frac{2k}{\sqrt{k}}=2\sqrt{2}$ 或$\frac{-2k}{\sqrt{-k}}=-2\sqrt{2}$

$\Rightarrow$　$k=\pm 2$，故$\frac{(x-2)^2}{2}-\frac{(y-1)^2}{2}=\pm 1$，貫軸平行$x$軸時，$\frac{(x-2)^2}{2}-\frac{(y-1)^2}{2}=1$

$\Rightarrow$　$a^2=2$，$b^2=2$　$\therefore$　$c^2=2+2=4$　$\Rightarrow$　$c=2$，故焦點$F'(0，1)$，$F(4，1)$

9. 雙曲線 $4x^2-y^2-8x-4y+4=0$ 之

(1)頂點坐標爲＿＿＿＿＿。　(2)漸近線方程式爲＿＿＿＿＿。

(3)雙曲線上任一點到二漸近線之距離之積 ＝＿＿＿＿＿。

【解答】(1) (1，－4)，(1，0)　(2) $2x-y-4=0$，$2x+y=0$　(3) $\frac{4}{5}$

【詳解】

$4x^2-y^2-8x-4y+4=0$　$\Rightarrow$　$4(x-1)^2-(y+2)^2=-4$　$\Rightarrow$　$-\frac{(x-1)^2}{1}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$

$\therefore$　中心(1，－2)，$a=2$，$b=1$　$\Rightarrow$　$c^2=1+4=5$，頂點(1，－4)，(1，0)

漸近線 $y+2=\pm\frac{2}{1}(x-1)$　$\Rightarrow$　$2x-y-4=0$ 或 $2x+y=0$

任一點到二漸近線之距離之積 $=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{4}{5}$

10.以 $2x+y+1=0$ 與 $2x-y+3=0$ 爲兩漸近線，且經過原點的雙曲線方程式爲＿＿＿＿，它的正焦弦長 ＝＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(2x+y+1)(2x-y+3)=3$；$4\sqrt{3}$

【詳解】

設方程式爲$(2x+y+1)(2x-y+3)=k$

過原點必　$(2\times 0+0+1)(2\times 0-0+3)=k$，即$k=3$

雙曲線方程式爲$(2x+y+1)(2x-y+3)=3$ $\Rightarrow \frac{(x+2)^2}{3/4}-\frac{(y-2)^2}{3}=1$

正焦弦長 $=\frac{2b^2}{a}$ ，其中$a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，$b=\sqrt{3}$ ，所以正焦弦長 $=4\sqrt{3}$

11.求雙曲線$\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{4}=1$上任一焦點到二漸近線的距離乘積為＿＿＿＿＿。

【解答】4

【詳解】

雙曲線$\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{4}=1$ $\Rightarrow$ 中心$(0，0)$，$a^2=3$，$b^2=4$，$c^2=3+4=7$

$\Rightarrow$ 焦點為$F(\sqrt{7}，0)$，$F'(-\sqrt{7}，0)$

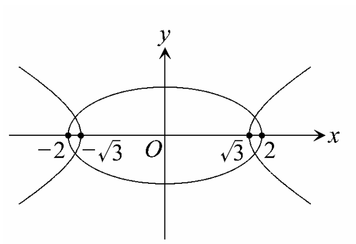
漸近線方程式為$L_1$：$2x+\sqrt{3}y=0$與$L_2$：$2x-\sqrt{3}y=0$

$\therefore$ $d(F，L_1)\times d(F，L_2)=\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7}}\times\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=4$

12.以橢圓$x^2+4y^2=4$的焦點為頂點，以其頂點為焦點的雙曲線方程式為＿＿＿＿＿。

【解答】$x^2-3y^2=3$

【詳解】




$x^2+4y^2=4$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$之頂點$(2，0)$，$(-2，0)$，焦點$(\sqrt{3}，0)$，$(-\sqrt{3}，0)$

雙曲線之頂點$(\sqrt{3}，0)$，$(-\sqrt{3}，0)$，而焦點$(2，0)$，$(-2，0)$

設雙曲線為$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，則$a=\sqrt{3}$，$c=2$，而$b^2=c^2-a^2=1$，故所求為$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$

13.直線$2x+y=3$與雙曲線$x^2-y^2=1$交於兩點$P$，$Q$，則$\overline{PQ}$中點坐標為＿＿＿＿＿，又$\overline{PQ}$之長 $=$＿＿＿＿＿。

【解答】$(2，-1)$，$\dfrac{2}{3}\sqrt{30}$

【詳解】

設$P(x_1，y_1)$，$Q(x_2，y_2)$，$\begin{cases}y=3-2x\\x^2-y^2=1\end{cases}$消去$y$ $\Rightarrow$ $x^2-(3-2x)^2=1$

$\Rightarrow$ $3x^2-12x+10=0$，二根為$x_1$，$x_2$ $\therefore$ $x_1+x_2=4$，$x_1x_2=\dfrac{10}{3}$

又$y_1=3-2x_1$，$y_2=3-2x_2$ $\Rightarrow$ $y_1+y_2=6-2(x_1+x_2)=-2$

$\overline{PQ}$中點為$(\dfrac{x_1+x_2}{2}，\dfrac{y_1+y_2}{2})=(2，-1)$

$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=16-\dfrac{40}{3}=\dfrac{8}{3}$，$y_1-y_2=-2(x_1-x_2)$ $\Rightarrow$ $(y_1-y_2)^2=4(x_1-x_2)^2$

$\therefore\quad \overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{5(x_1-x_2)^2}=\sqrt{\dfrac{40}{3}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{30}$

14.雙曲線$\Gamma$ 與雙曲線$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$共焦點且貫軸長為 4，則$\Gamma$ 的方程式為__________。

【解答】$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{21}=1$

【詳解】

$\Gamma$ 與$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$共焦點，則共中心 $(0,0)$，$c^2=a^2+b^2=9+16=25$

設$\Gamma$ 之方程式為$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，且$a^2+b^2=c^2=25$……①，

又$\Gamma$ 之貫軸長 $2a=4\quad\Rightarrow\quad a=2$ 代入①，$b^2=25-4=21$，故$\Gamma$ ：$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{21}=1$

15.已知一等軸雙曲線$Q$之中心為$(1,-2)$，一漸近線為 $2x+y=0$，且過點$(2,-3)$，若$Q$之方程式為$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey=11$，則$a+c+e=$__________。

【解答】$\dfrac{-55}{3}$

【詳解】

等軸雙曲線之兩漸近線互相垂直且交於中心點$(1,-2)$

設另一漸近線$L_2$：$x-2y+k=0$，$(1,-2)$代入$L_2$得$k=-5$

設$Q$：$(2x+y)(x-2y-5)=t$……①

$(2,-3)$代入①，得$t=3$，$Q$：$(2x+y)(x-2y-5)=3$

$\Rightarrow\quad Q$：$2x^2-3xy-2y^2-10x-5y-3=0$ 與$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey=11$ 同義

則$\dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{-3}=\dfrac{c}{-2}=\dfrac{d}{-10}=\dfrac{e}{-5}=\dfrac{-11}{-3}\quad\therefore\quad a+c+e=(\dfrac{22}{3})+(\dfrac{-22}{3})+(\dfrac{-55}{3})=\dfrac{-55}{3}$

16.已知一雙曲線之兩焦點為$(2,4)$及$(-6,4)$且共軛軸長為 4，則此雙曲線之
(1)共軛雙曲線方程式為__________。 (2)兩漸近線方程式為__________。

【解答】(1)$\dfrac{(y-4)^2}{4}-\dfrac{(x+2)^2}{12}=1$ (2) $(x+2)\pm\sqrt{3}(y-4)=0$

【詳解】

兩焦點$F_1(2,4)$，$F_2(-6,4)$，$\overline{F_1F_2}=8=2c$，$c=4$

共軛軸長 $2b=4$，$b=2$，$a^2=c^2-b^2=4^2-2^2=12$

$\overline{F_1F_2}$ 之中點為中心，中心$(h,k)=(-2,4)$，得雙曲線：$\dfrac{(x+2)^2}{12}-\dfrac{(y-4)^2}{4}=1$

故其共軛雙曲線：$\dfrac{(x+2)^2}{12}-\dfrac{(y-4)^2}{4}=-1$，即$\dfrac{(y-4)^2}{4}-\dfrac{(x+2)^2}{12}=1$

(2)漸近線為$\dfrac{(x+2)^2}{12}-\dfrac{(y-4)^2}{4}=0\Rightarrow 4(x+2)^2-12(y-4)^2=0\Rightarrow(x+2)\pm\sqrt{3}(y-4)=0$

17.設一雙曲線的二漸近線爲$x+2y-5=0$與$x-2y+3=0$，其一焦點爲$(1，2+\sqrt{5})$，則其方程式爲＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{(y-2)^2}{1}-\dfrac{(x-1)^2}{4}=1$

【詳解】

$\begin{cases} x-2y=-3 \\ x+2y=5 \end{cases}$ $\Rightarrow$ 中心$(1，2)$，又一焦點爲$(1，2+\sqrt{5})$ $\therefore$ 貫軸平行$y$軸且$c=\sqrt{5}$

由一漸近線斜率爲$\dfrac{1}{2}$，得$\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $b=2a$ $\because$ $a^2+b^2=c^2$ $\therefore$ $a^2+(2a)^2=5$

$\Rightarrow$ $a=1$，$b=2$，故方程式爲$\dfrac{(y-2)^2}{1}-\dfrac{(x-1)^2}{4}=1$

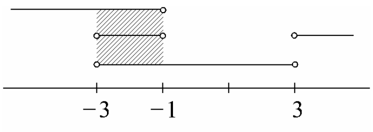
18.$\dfrac{(x+2)^2}{9-t^2}+\dfrac{(y-2)^2}{t+1}=1$圖形爲貫軸平行$x$軸的雙曲線，則$t$的範圍爲＿＿＿＿＿。

【解答】$-3<t<-1$

【詳解】

$\dfrac{(x+2)^2}{9-t^2}+\dfrac{(y-2)^2}{t+1}=1$圖形爲貫軸平行 $x$ 軸的雙曲線

$\therefore$ $\begin{cases} 9-t^2>0 \\ t+1<0 \\ (9-t^2)(t+1)<0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} -3<t<3 \\ t<-1 \\ (t-3)(3+t)(t+1)>0 \end{cases}$ $\therefore$ $-3<t<-1$




19.二焦點$(-7，-1)$，$(3，-1)$，一漸近線斜率爲$-\dfrac{3}{4}$之雙曲線方程式爲＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{(x+2)^2}{16}-\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$

【詳解】

$F'(-7，-1)$，$F(3，-1)$ $\therefore$ 中心$(-2，-1)$，$c=5$，

$\dfrac{3}{4}=\dfrac{b}{a}\Rightarrow a=4k, b=3k$；$(4k)^2+(3k)^2=5^2\Rightarrow k=1, a=4, b=3$，故得$\dfrac{(x+2)^2}{16}-\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$

20.一雙曲線的中心$(1，-2)$，貫軸平行$y$軸，漸近線與貫軸夾角$30°$，中心到焦點距離爲1，則此雙曲線方程式爲＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{4}{3}(y+2)^2-4(x-1)^2=1$

【詳解】

雙曲線之中心$(1，-2)$，貫軸平行$y$軸 $\Rightarrow$ 設雙曲線方程式爲$-\dfrac{(x-1)^2}{b^2}+\dfrac{(y+2)^2}{a^2}=1$

漸近線斜率 $\pm\dfrac{a}{b}$，漸近線與貫軸($y$軸)夾角$30°\Rightarrow$一漸近線斜角$60°\Rightarrow\dfrac{a}{b}=\tan60°=\sqrt{3}$

$\Rightarrow a=\sqrt{3}\,b\cdots\cdots$①

又中心到焦點距離 $=c=1 \quad\Rightarrow\quad a^2+b^2=1\cdots\cdots$②，①代入②得$b^2=\dfrac{1}{4}$，$a^2=\dfrac{3}{4}$

故所求爲$\dfrac{(y+2)^2}{\frac{3}{4}}-\dfrac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}}=1$，即$\dfrac{4(y+2)^2}{3}-4(x-1)^2=1$