高雄市明誠中學 高二(下)平時測驗 日期：95.02.27					
範圍	1-2 橢圓	班級	普二 班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. 平面上有一個橢圓，已知其長軸平行於 y 軸，短軸的一端點爲 $(-4，0)$，且其中一焦點爲$(0，4)$，則此橢圓長軸的長度爲何？

(A) 2 (B) $2\sqrt{2}$ (C) 6 (D) $6\sqrt{2}$ (E) $8\sqrt{2}$

【解答】(E)

【詳解】

短軸的一端點爲$(-4，0)$ $\Rightarrow$ 短軸：$y=0$，焦點$(0，4)$在長軸上 $\Rightarrow$ 長軸：$x=0$

$\therefore$ 中心$(0，0)$ $\Rightarrow$ $b=4$，$c=4$ $\Rightarrow$ $a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

$\therefore$ 長軸長 $=2a=2\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

2. (複選)橢圓 $4x^2+9y^2-8x+36y+4=0$，下列何者正確？

(A)中心$(-1，2)$ (B)長軸長 $=3$ (C)短軸長 $=2$ (D)正焦弦長 $=\dfrac{8}{3}$

(E)長軸方程式爲$x-1=0$

【解答】(D)

【詳解】

$4x^2+9y^2-8x+36y+4=0$ $\Rightarrow$ $4(x-1)^2+9(y+2)^2=36$ $\Rightarrow$ $\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$

$\therefore$ $a=3$，$b=2$，故此橢圓的中心$(1，-2)$，長軸長 $2a=6$，短軸長 $2b=4$

正焦弦長 $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\cdot2^2}{3}=\dfrac{8}{3}$，長軸方程式爲$y+2=0$

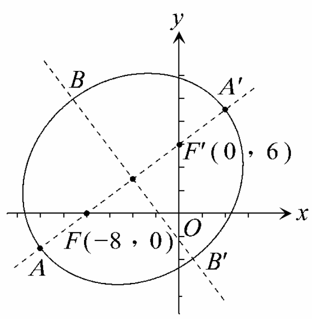
3. (複選)有關方程式$\sqrt{(x+8)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-6)^2}=20$ 之圖形，下列敘述何者爲真？

(A)圖形是中心在$(-4，3)$之橢圓 (B)短軸所在之直線斜率爲$\dfrac{3}{4}$

(C)圖形不與坐標軸成對稱 (D)短軸之長爲$5\sqrt{3}$ (E)原點在圖形的內部

【解答】(A)(C)(E)

【詳解】



方程式$\sqrt{(x+8)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-6)^2}=20$ 之圖形爲一橢圓

焦點爲 $F(-8，0)$，$F'(0，6)$，長軸長 $2a = 20 \quad \Rightarrow \quad a = 10$，中心爲 $\overline{FF'}$ 之中點$(-4，3)$

$2c = \overline{FF'} = \sqrt{64+36} = 10 \quad \Rightarrow \quad c = 5$，$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{100-25} = 5\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ 短軸長 $2b = 10\sqrt{3}$，長軸在直線 FF'：$3x - 4y + 24 = 0$ 上

短軸所在之直線斜率爲 $-\dfrac{4}{3}$，且圖形不與坐標軸成對稱，又原點(0，0)代入方程式中

$\sqrt{(0+8)^2 + 0^2} + \sqrt{0^2 + (0-6)^2} = 14 < 20 \quad \therefore$ 原點在圖形的內部

應選(A)(C)(E)

4. (複選)橢圓的中心爲$(-1，2)$，長軸垂直 x 軸，若此橢圓通過點(2，3)，則下列哪些點必在此橢圓上？

(A)$(-4，3)$　(B)$(-4，1)$　(C)(0，0)　(D)(2，1)　(E)$(-1，4)$

【解答】(A)(B)(D)

【詳解】

橢圓Γ 中心$(-1，2)$且過點(2，3)　$\therefore$　Γ 必過$(-4，3)$，(2，1)兩點

$\therefore$　Γ 必過$(-4，1)$　$\therefore$　設橢圓Γ：$\dfrac{(x+1)^2}{a^2} + \dfrac{(y-2)^2}{b^2} = 1$，$b^2 > a^2$……①

Γ 過(2，3)　$\therefore$　$\dfrac{(2+1)^2}{a^2} + \dfrac{(3-2)^2}{b^2} = \dfrac{9}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1$……②

(0，0)代入①得 $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{b^2} = 1$，②代入得$a^2 = \dfrac{35}{3} > \dfrac{35}{8} = b^2$，不合

$(-1，4)$代入①得 $\dfrac{0}{a^2} + \dfrac{4}{b^2} = 1$，②代入得$b^2 = 4 < 12 = a^2$，不合

故應選(A)(B)(D)

二、填充題(每題 10 分)

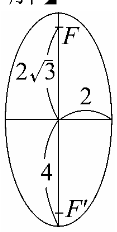
1. 橢圓 $4x^2 + y^2 + 8x - 4y - 8 = 0$ 的

(1)中心坐標爲__________。　　(2)焦點坐標爲__________。

(3)正焦弦長 = __________。　　(4)橢圓上任一點到兩焦點的距離和 = __________。

【解答】(1)$(-1，2)$　(2)$(-1，2 \pm 2\sqrt{3})$　(3) 2　(4) 8　(5) 16

【詳解】



$4x^2 + y^2 + 8x - 4y - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{(x+1)^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$

$b^2 = 4$，$a^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad a = 4$，$b = 2$，$c = 2\sqrt{3}$

(1)中心$(-1，2)$

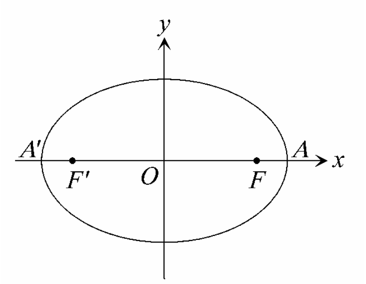
(2)焦點$(h，k \pm c) = (-1，2 \pm 2\sqrt{3})$

(3)正焦弦長 $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\times 4}{4}=2$

(4) $\overline{PF}+\overline{PF'}=2a=8$

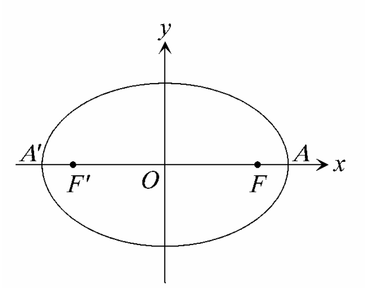
(5)內接矩形面積最大値 $=2ab=2\times 4\times 2=16$

2. 如圖，橢圓的兩焦點為F，F'，若$\overline{AF}=2$，$\overline{AF'}=14$，則兩焦點F，F'的坐標為__________，橢圓的方程式為________________。



【解答】(1) $F(6，0)$，$F'(-6，0)$　(2) $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{28}=1$

【詳解】



$\overline{AF}=2$，$\overline{AF'}=14$ $\Rightarrow$ $\overline{FF'}=12$ $\therefore$ $c=6$，$a=2+6=8$ $\Rightarrow$ $b^2=8^2-6^2=28$

$\therefore$ 焦點坐標$F(6，0)$，$F'(-6，0)$，橢圓方程式$=\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{28}=1$

3. 若一橢圓的兩焦點坐標分別為$(-2，5)$，$(-2，-3)$；且經過點$(-5，1)$，則此橢圓之方程式為____________________；其正焦弦長為__________。

【解答】$\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$，$\dfrac{18}{5}$

【詳解】

橢圓Γ 兩焦點 $F(-2，5)$，$F'(-2，-3)$

$\therefore$ 中心$(-2，1)$，$2c=\overline{FF'}=8$，其長軸垂直x軸

設Γ：$\dfrac{(x+2)^2}{b^2}+\dfrac{(y-1)^2}{a^2}=1$，$a^2=b^2+c^2=b^2+16$

Γ 過$(-5，1)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{9}{b^2}+\dfrac{0}{a^2}=1$ $\therefore$ $b^2=9$，$a^2=25$

$\therefore$ Γ：$\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$，正焦弦長$=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\cdot 9}{5}=\dfrac{18}{5}$

4. 若有一動點$P(x，y)$到$A(3，4)$，$B(3，12)$兩點距離的和恆為 10，則$P(x，y)$點的圖形軌跡為__________（拋物線、雙曲線…），此圖形方程式為__________________，正焦弦長_____________。

【解答】(1)橢圓　(2)$\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y-8)^2}{25}=1$　(3)$\dfrac{18}{5}$

【詳解】

動點 $P(x，y)$ 到 $A(3，4)$，$B(3，12)$兩點距離的和恆爲 10

由橢圓的定義知：此動點的圖形軌跡爲橢圓

中心$(3，\dfrac{4+12}{2})=(3，8)$，得 $c=4$，$2a=10$，$a=5$　$\Rightarrow$　$b=3$

$\therefore$　橢圓方程式爲 $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y-8)^2}{25}=1$，正焦弦長 $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{18}{5}$

5. 橢圓短軸兩端點坐標爲$(-1，1)$，$(3，1)$，正焦弦長 $\dfrac{8}{3}$，則橢圓方程式爲__________。

【解答】$\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$

【詳解】

短軸端點$(-1，1)$，$(3，1)$　$\Rightarrow$　短軸在直線 $y=1$ 上，而中心$(1，1)$　$\therefore$　長軸在 $x=1$ 上

又 $2b=3-(-1)=4$　$\Rightarrow$　$b=2$，正焦弦長 $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{8}{3}$　$\Rightarrow$　$\dfrac{8}{a}=\dfrac{8}{3}$　$\Rightarrow$　$a=3$

故橢圓方程式爲 $\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$

6. 設 $x^2+2y^2-2x+8y+k=0$，

(1)表一點時，此點坐標爲__________。(2)表一橢圓時，k 值之範圍爲__________。

【解答】(1) $(1，-2)$　(2) $k<9$

【詳解】

$x^2+2y^2-2x+8y+k=0$　$\Rightarrow$　$(x^2-2x+1)+2(y^2+4y+4)=-k+9$

$\Rightarrow$　$(x-1)^2+2(y+2)^2=-k+9$　$\therefore$　$k=9$ 時，表點$(1，-2)$；$k<9$ 時，表一橢圓

7. 已知一橢圓之一焦點爲$(-2，3)$，一長軸頂點爲$(7，3)$，且短軸長爲 6，則此橢圓方程式爲____________________。

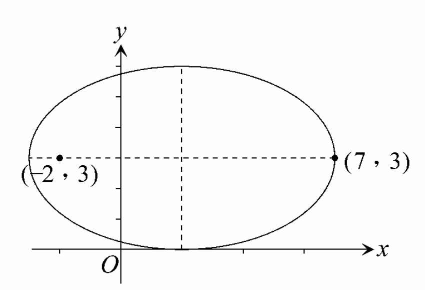
【解答】$\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$

【詳解】

$2b=6$，$b=3$，$b^2=a^2-c^2$　$\Rightarrow$　$9=(a+c)(a-c)$，若 $a-c=9$ 得 $a+c=1$（不合）

所以 $a-c=1$，$a+c=9$　$\Rightarrow$　$a=5$，$c=4$，設所求爲 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

$(h，k)=(7-a，3)=(7-5，3)=(2，3)$，所求：$\dfrac{(x-2)^2}{5^2}+\dfrac{(y-3)^2}{3^2}=1$



8. 若橢圓之兩焦點$F(-4，-4)$，$F'(0，0)$且$P(\sqrt{2}，-\sqrt{2})$爲其上一點，則橢圓之長軸長度爲__________，正焦弦長__________。

【解答】8；$8\sqrt{2}$

【詳解】

已知橢圓二焦點 $F(-4，-4)$，$F'(0，0)$ $\therefore$ $2c=\overline{FF'}=4\sqrt{2}$

故正焦弦長 $4c=8\sqrt{2}$，又 $\because$ $P(\sqrt{2}，-\sqrt{2})$

則 $2a=\overline{PF}+\overline{PF'}=\sqrt{(\sqrt{2}+4)^2+(-\sqrt{2}+4)^2}+\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2}=8$，即長軸長度爲 8

9. 橢圓$\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}=10$，求

(1)正焦弦長 =__________。(2)在y軸上之投影長 =__________。

【解答】(1)$\dfrac{18}{5}$ (2) 6

【詳解】

$F'(-4，1)$，$F(4，1)$ $\Rightarrow$ 中心$(0，1)$ $\therefore$ $c=4$，$a=5$ $\Rightarrow$ $b=\sqrt{5^2-4^2}=3$

故正焦弦長 $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{18}{5}$，在 y 軸上之投影長 $=2b=6$

10.與橢圓$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$共焦點且過點$(3，3)$之橢圓方程式爲__________。

【解答】$\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{(y-1)^2}{10}=1$

【詳解】

設橢圓爲$\dfrac{x^2}{9+k}+\dfrac{(y-1)^2}{4+k}=1$，則將$(3，3)$代入 $\therefore$ $\dfrac{9}{9+k}+\dfrac{4}{4+k}=1$

$\Rightarrow$ $36+9k+36+4k=36+9k+4k+k^2$ $\Rightarrow$ $k^2=36$ $\Rightarrow$ $k=6$ 或 -6（不合）

故$\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{(y-1)^2}{10}=1$

11.圓$C：x^2+y^2=100$，$A(8，0)$，動圓C'恆過$A(8，0)$且與圓C相切，若圓C'之圓心P，試求P之軌跡Γ之方程式__________。

【解答】$\dfrac{(x-4)^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

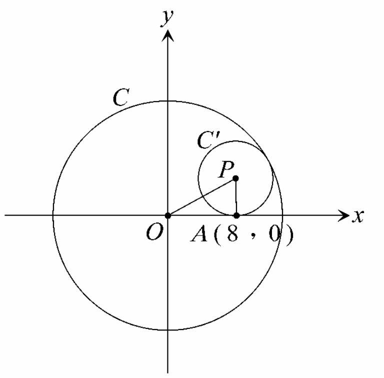
【詳解】

$C：x^2+y^2=10^2$，圓心爲$O(0，0)$，半徑$=10$，圓C'之圓心爲P，半徑爲r

又與圓C相內切 $\therefore$ 連心距$\overline{PO}=10-r$，則$\overline{PA}+\overline{PO}=r+(10-r)=10>\overline{AO}=8$

所以P之軌跡爲以$A(8，0)$，$O(0，0)$爲兩焦點，長軸長爲 10 之橢圓

即P之軌跡為$\dfrac{(x-4)^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$



12.設點$P(x_0，y_0)$在橢圓$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$上移動，$F$，$F'$為橢圓的兩焦點，則△$PFF'$的重心軌跡方程式為__________。

【解答】$9x^2+25y^2=25$

【詳解】

橢圓$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$，$c^2=25-9=16 \quad \Rightarrow \quad c=4$，焦點$F(4，0)$，$F'(-4，0)$

設$P(x_0，y_0)=(5\cos\theta，3\sin\theta)$（$\theta\neq 0$ 或π）

則△PFF'的重心$G(x，y)=(\dfrac{5}{3}\cos\theta，\sin\theta)$（$\theta\neq 0$ 或π），即$\cos\theta=\dfrac{3}{5}x$，$\sin\theta=y$

由$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 得$(\dfrac{3}{5}x)^2+y^2=1$，即 $9x^2+25y^2=25$（$y\neq 0$）

13.若方程式$\dfrac{x^2}{t+2}+\dfrac{y^2}{2t-1}=1$的圖形是一橢圓，且長軸在$x$軸上，則實數$t$的範圍為__________。又長軸在$y$軸上時，$t$的範圍為__________。

【解答】$\dfrac{1}{2}<t<3$；$t>3$

【詳解】

$\dfrac{x^2}{t+2}+\dfrac{y^2}{2t-1}=1$的圖形是一橢圓

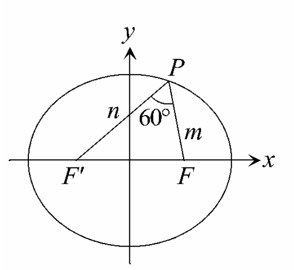
(1)長軸在x軸上時，$t+2>2t-1>0 \quad \Rightarrow \quad 3>t$ 且 $t>\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}<t<3$

(2)長軸在y軸上時，$2t-1>t+2>0 \quad \Rightarrow \quad t>3$ 且 $t>-2 \quad \Rightarrow \quad t>3$

14.求$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{18}=1$一點$P$與兩焦點$F$、$F'$ 夾角為 60 度，求△PFF' 之面積__________。

【解答】$6\sqrt{3}$

【詳解】



橢圓$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{18}=1$，$a^2=25$，$b^2=18$　∴　$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-18}=\sqrt{7}$　∴　$\overline{FF'}=2\sqrt{7}$

設$\overline{PF}=m$，$\overline{PF'}=n$，又$\angle FPF'=60°$，$m+n=2a=10$

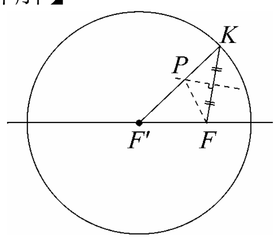
∴　$(2\sqrt{7})^2=m^2+n^2-2mn\cdot\cos 60°$　⇒　$28=m^2+n^2-mn=(m+n)^2-3mn$

⇒　$28=10^2-3mn$　⇒　$mn=24$　∴　$\triangle PFF'$ 面積$=\dfrac{1}{2}mn\sin 60°=\dfrac{1}{2}\cdot 24\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

15.設二定點$F(5，2)$，$F'(-1，2)$，以F'為中心，10 單位長為半徑畫圓，令K為此圓上的動點，P為$\overline{KF}$中垂線與直線$\overleftrightarrow{KF'}$的交點，則K在圓上轉一周時，P點的軌跡方程式為_____。

【解答】$\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$

【詳解】



∵　$\overline{FF'}=6<10$　∴　F 在圓內，又　∵　P 為$\overline{KF}$中垂線與$\overleftrightarrow{KF'}$之交點

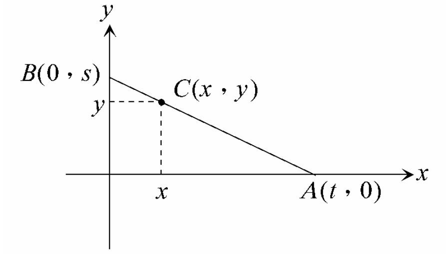
∴　$\overline{PF}=\overline{PK}$　⇒　$\overline{PF}+\overline{PF'}=\overline{PK}+\overline{PF'}=\overline{F'K}=10$

軌跡為以 F，F'為二焦點，長軸長 $=10$ 的橢圓，中心$\left(\dfrac{-1+5}{2}，\dfrac{2+2}{2}\right)=(2，2)$

16.若線段$\overline{AB}$之長為 5，其上一點C使$\overline{AC}:\overline{CB}=3:2$，當$A$在$x$軸上移動，$B$在$y$軸上移動，則動點$C$所形成的圖形方程式為__________，此圖形上相異兩點距離的最大值 $=$ ______。

【解答】$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$；6

【詳解】



如上圖，設$A(t，0)$，$B(0，s)$，$C(x，y)$，因為$\overline{AC}：\overline{CB}=3：2$，所以$x=\frac{2}{5}t$，$y=\frac{3}{5}s$

即$t=\frac{5}{2}x$，$s=\frac{5}{3}y$，又$\overline{AB}=5=\sqrt{t^2+s^2}$，所以$t^2+s^2=25$，亦即$\frac{25}{4}x^2+\frac{25}{9}y^2=25$

所以點C的圖形為方程式$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$的圖形

此圖形為橢圓，橢圓上相異兩點的最大距離為長軸頂點長 $=6$