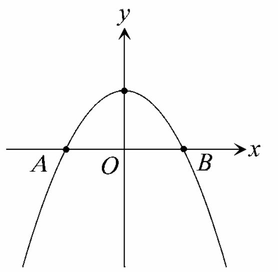
高雄市明誠中學 高二(下)平時測驗 日期：95.02.20					
範圍	1-1 拋物線	班級	普二　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

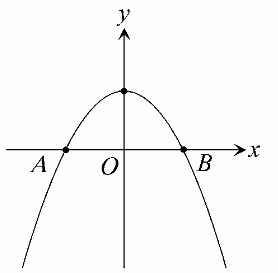
1. 右圖為$f(x)=ax^2+bx+c$之函數圖形，其中a，b，c為已知實數，若$\overline{AO}=\overline{OB}$，則下列何者正確？



(A) $b>0$，$ac<0$　(B) $b<0$，$ac<0$　(C) $b=0$，$ac>0$
(D) $b=0$，$ac<0$　(E) $b=0$，$ac=0$

【解答】(D)

【詳解】



(1)軸$x=-\dfrac{b}{2a}=0 \Rightarrow b=0$

(2)設$A(\alpha，0)$，$B(\beta，0)$，$\alpha\beta<0$，則$ax^2+bx+c=0$二根為α，β

由根與係數關係知$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$　$\because$ $\alpha\beta<0$　$\therefore$ $\dfrac{c}{a}<0 \Rightarrow ac<0$

2. (複選)拋物線$y^2-4x-2y-7=0$，下列何者正確？

(A)開口向上　(B)頂點$(-2，1)$　(C)正焦弦長 $=4$　(D)焦點$F(2，1)$　(E)準線$\rho：x+3=0$

【解答】(B)(C)(E)

【詳解】

$y^2-4x-2y-7=0 \Rightarrow (y-1)^2=4\times1\times(x+2)\Rightarrow$拋物線開口向右，

頂點$V(-2，1)$，$c=1$，焦點$F(-1，1)$，準線$\rho：x=-3$，正焦弦長 $=4c=4$

二、填充題(每題 10 分)

1. 拋物線Γ對稱於$x-1=0$且過二點$(2，3)$，$(-1，6)$，則Γ的方程式為__________。

【解答】$(x-1)^2=y-2$

【詳解】對稱軸$x-1=0$，設頂點$(1,k)$，$\Gamma：(x-1)^2=4c(y-k)$，

$(2，3)$，$(-1，6)$代入$\Rightarrow\begin{cases}1=4c(3-k)\\4=4c(6-k)\end{cases}$，二是相除$\Rightarrow 4c=1$，$k=2$，故$(x-1)^2=y-2$

2. 準線是直線$x=-5$，焦點在$F(3，0)$的拋物線方程式為__________。

【解答】$y^2=16(x+1)$

【詳解】

準線$x=-5$，焦點$F(3，0)$，則對稱軸$y=0$，頂點$(\dfrac{-5+3}{2}，0)=(-1，0)$

$c=4$，開口向右　$\therefore$　拋物線方程式為$y^2=16(x+1)$

3. 有一拋物線的方程式為$y^2+12x-4y+16=0$，則焦點坐標為__________。

【解答】$(-4，2)$

【詳解】

$\because$ $(y-2)^2=-12(x+1)$ $\therefore$ 爲開口向左的拋物線，頂點 $V(-1，2)$，$c=-3$

$\Rightarrow$ 焦點爲$(-1-3，2)=(-4，2)$

4. 頂點$A(1，1)$，焦點$F(2，3)$的拋物線其準線方程式爲＿＿＿＿＿，正焦弦長爲＿＿＿＿＿。

【解答】$x+2y=-2$，$4\sqrt{5}$

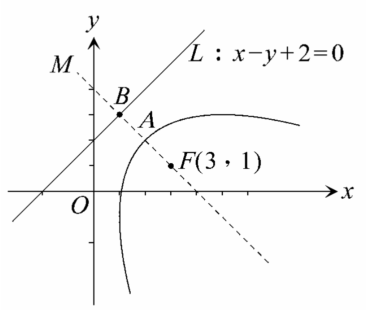
【詳解】

頂點 $A(1，1)$，焦點 $F(2，3)$，則對稱軸爲過 A，F 之直線：$\dfrac{y-1}{x-1}=\dfrac{3-1}{2-1}\Rightarrow 2x-y=1$

設準線方程式爲 $x+2y=k$，若對稱軸與準線交於 $B(a，b)$，則頂點 $A(1，1)$爲 $F(2，3)$與 $B(a，b)$之中點，$\therefore$ $(a，b)=(0，-1)$代入準線方程式 $x+2y=k\Rightarrow 0-2=k$ $\Rightarrow$ $k=-2$

$\therefore$ 準線方程式：$x+2y=-2$，正焦弦長 $=4|c|=4\overline{AF}=4\sqrt{1^2+2^2}=4\sqrt{5}$

5. 方程式$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=\dfrac{|x-y+2|}{\sqrt{2}}$所表示之圖形爲拋物線，其頂點爲＿＿＿＿＿，對稱軸的方程式爲＿＿＿＿＿。



【解答】$(2，2)$，$x+y-4=0$

【詳解】

$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$ 表動點$(x，y)$與定點$(3，1)$的距離

$\dfrac{|x-y+2|}{\sqrt{2}}$表動點$(x，y)$與定直線 $x-y+2=0$ 的距離

由拋物線定義知，焦點 $F(3，1)$，準線 $L：x-y+2=0$

設軸方程式 M 爲 $x+y+k=0$，將焦點 $F(3，1)$代入 $\Rightarrow$ $k=-4$

$\therefore$ $M：x+y-4=0$，B 點坐標爲$\begin{cases}x-y+2=0\\x+y-4=0\end{cases}$之解 $\Rightarrow$ $B(1，3)$

$\therefore$ 頂點 A 坐標爲 $\overline{BF}$ 之中點 $\Rightarrow$ $A(2，2)$

6. 根據下列條件，求出拋物線之方程式。

(1)焦點$(2，1)$，準線平行於y軸，正焦弦長爲 8：＿＿＿＿＿。

(2)頂點$(0，0)$，焦點在直線$x-y=2$ 上，對稱軸爲y軸：＿＿＿。

【解答】(1) $(y-1)^2=8x$或$(y-1)^2=-8(x-4)$ (2) $y=-8x^2$

【詳解】

(1)焦點$F(2，1)$，準線平行於y軸 $\Rightarrow$ 軸的方程式爲$y=1$（軸垂直y軸）

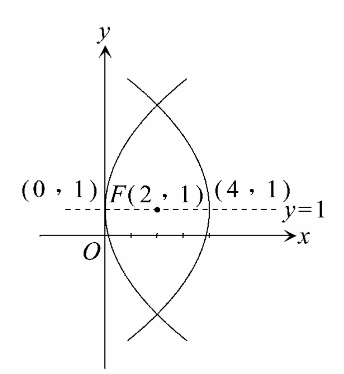
$4|c|=8$ $\Rightarrow$ $4c=\pm 8$ $\Rightarrow$ $c=\pm 2$

① $c=2$ 時，拋物線開口向右，頂點在焦點$F(2，1)$的左方

頂點坐標爲$(0，1)$，拋物線方程式爲$(y-1)^2=8x$

② $c=-2$ 時，拋物線開口向左，頂點在焦點$F(2，1)$的右方，

頂點坐標爲$(4，1)$， 拋物線方程式爲$(y-1)^2=-8(x-4)$



(2)焦點在直線$x-y=2$上，也在對稱軸$x=0$上，焦點坐標爲$F(0，-2)$

頂點$A(0，0)$　∴　$|c|=\overline{AF}=2$，又拋物線開口向下$\Rightarrow c=-2$，故線方程式爲$y=-8x^2$

7. 求拋物線$y^2=6x$的頂點坐標__________，焦點坐標__________，準線方程式________，正焦弦長__________。

【解答】$(0，0)$，$(0，\dfrac{3}{2})$，$y=-\dfrac{3}{2}$，6

【詳解】

拋物線$(y-0)^2=4\times\dfrac{6}{4}\times(x-0)\Rightarrow$頂點$(0，0)$，軸$y=0$，　$c=\dfrac{3}{2}$

∵　拋物線開口向上，焦點在頂點$(0，0)$的上方坐標爲$(0，\dfrac{3}{2})$，

準線在頂點$(0，0)$的下方，準線方程式爲$y=-\dfrac{3}{2}$且正焦弦長$=4c=6$

8. 焦點爲$(1，-1)$，準線垂直於y軸，正焦弦長爲8之拋物線方程式爲______________。

【解答】$(x-1)^2=-8(y-1)$或$(x-1)^2=8(y+3)$

【詳解】

正焦弦長$=4|c|=8$　$\Rightarrow$　$c=\pm 2$

∴　$c=-2$時，頂點$V(1，1)$，$c=2$時，頂點$V(1，-3)$

∴　$(x-1)^2=-8(y-1)$或$(x-1)^2=8(y+3)$即爲所求

9. 拋物線Γ過$(1，1)$，$(3，2)$，$(3，-1)$三點且對稱軸平行x軸，則

(1) Γ之方程式爲__________。　(2) Γ之焦點爲__________。

【解答】(1) $x=y^2-y+1$　(2) $(1，\dfrac{1}{2})$

【詳解】

設拋物線Γ：$x=ay^2+by+c$，將$(1，1)$，$(3，2)$，$(3，-1)$代入

$$\therefore\quad \begin{cases}1=a+b+c\\3=4a+2b+c\\3=a-b+c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+c=2\\b=-1\\4a+c=5\end{cases}\Rightarrow\quad a=1，b=-1，c=1$$

∴　$x=y^2-y+1$　$\Rightarrow$　$(y-\dfrac{1}{2})^2=x-\dfrac{3}{4}$　∴　頂點$V(\dfrac{3}{4}，\dfrac{1}{2})$，故焦點$F(1，\dfrac{1}{2})$

10.設拋物線Γ 的焦點為$F(1，1)$，準線為$L：x+y+2=0$，則Γ 的方程式為＿＿＿＿＿。

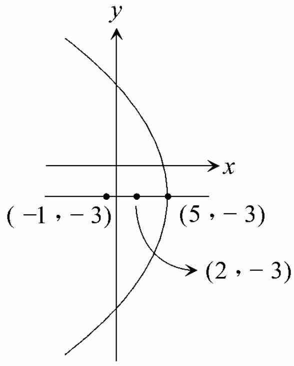
【解答】$x^2-2xy+y^2-8x-8y=0$

【詳解】焦點$F(1，1)$，準線$L：x+y+2=0$ 的拋物線上的點$P(x，y)$

則$\overline{PF}=d(P，L)$，即$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\dfrac{|x+y+2|}{\sqrt{2}}$

平方之，即 $2(x^2-2x+1+y^2-2y+1)=x^2+y^2+4+2xy+4x+4y$

得$x^2-2xy+y^2-8x-8y=0$



11.已知$A(5，-3)$，$B(-1，-3)$為平面上兩點，則以A為頂點，B為焦點的拋物線方程式為＿＿＿＿＿，而以$\overline{AB}$ 為正焦弦，開口朝下的拋物線方程式為＿＿＿＿＿。

【解答】$(y+3)^2=-24(x-5)$；$(x-2)^2=-6(y+\dfrac{3}{2})$

【詳解】

(1)拋物線Γ 以$A(5，-3)$為頂點，$B(-1，-3)$為焦點如上圖

則$c=-6$，Γ 的方程式為$(y+3)^2=4(-6)(x-5)$，即$(y+3)^2=-24(x-5)$

(2)以$\overline{AB}$ 為正焦弦的拋物線，焦點為$\overline{AB}$ 的中點$(2，-3)$，且開口朝下

$c=\dfrac{-3}{2}$，頂點$(2，-3+\dfrac{3}{2})=(2，\dfrac{-3}{2})$

拋物線方程式為$(x-2)^2=4(\dfrac{-3}{2})(y+\dfrac{3}{2})$，即$(x-2)^2=-6(y+\dfrac{3}{2})$

12.設$A(1，-4)$，$B(5，2)$，點C在曲線$y=x^2$上，欲使$\triangle ABC$的面積最小，則C點坐標為＿＿＿。

【解答】$(\dfrac{3}{4}，\dfrac{9}{16})$

【詳解】

點C在$y=x^2$上，設$C(a，a^2)$，又$A(1，-4)$，$B(5，2)$

則$\triangle ABC$的面積$=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 5 & a & 1 \\ -4 & 2 & a^2 & -4 \end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}|2+20+5a^2-2a-4a-a^2|$

$=\dfrac{1}{2}|4a^2-6a+22|=|2(a-\dfrac{3}{4})^2+\dfrac{79}{8}|$

$\therefore$ 當$a=\dfrac{3}{4}$時，面積最小值為$\dfrac{79}{8}$，此時$C(\dfrac{3}{4}，\dfrac{9}{16})$

13.一拋物線的頂點在y軸上，軸為$y=2$，而焦點在$x+2y=7$ 上，則此拋物線的方程式為＿＿。

【解答】$(y-2)^2=12x$

【詳解】拋物線的軸$y=2$，頂點在y軸上 $\Rightarrow$ 頂點$(0，2)$，設拋物線方程式$(y-2)^2=kx$

則焦點為$(\dfrac{k}{4}，2)$，又焦點在$x+2y=7$ 上 $\Rightarrow$ $k=12$，故$(y-2)^2=12x$為所求