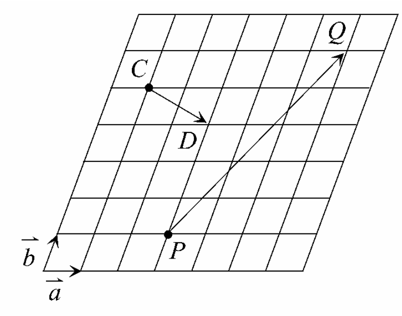
<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高二(上)平時測驗 日期：94.09.08</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">1-1 有向線段與向量</td><td>班級</td><td>普二 班</td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、選擇題(每題 5 分)

1. (複選)下圖是二組兩兩平行的直線組合，且相鄰兩線等距離。已知$\vec{a}$，$\vec{b}$長度均為 1，夾角為 60°，則下列何者正確？

(A) $\overrightarrow{PQ}=3\vec{a}+5\vec{b}$ (B) $\overrightarrow{CD}=2\vec{a}+\vec{b}$ (C) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$ (D) $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{7}$ (E) $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{9}{2}$



【解答】(A)(C)(E)

【詳解】

(A)對

(B)錯。$\overrightarrow{CD}=2\vec{a}-\vec{b}$

(C)對。$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60°=1\times 1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

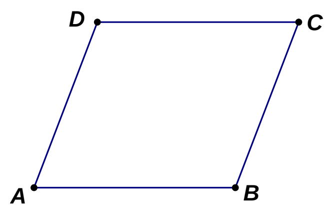
(D)錯。$|\overrightarrow{CD}|^2=|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=4+1-4\times\dfrac{1}{2}=3$，$\therefore\ |\overrightarrow{CD}|=\sqrt{3}$

(E)對。$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CD}=(3\vec{a}+5\vec{b})(2\vec{a}-\vec{b})=6|\vec{a}|^2+7\vec{a}\cdot\vec{b}-5|\vec{b}|^2=6+7\times\dfrac{1}{2}-5=\dfrac{9}{2}$

2. (複選)就平行四邊形 $ABCD$ 而言，下列敘述何者正確？

(A) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ (B) $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$ (C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=0$

(E) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$



【解答】(B)(C)(E)

【詳解】

(A)如上圖，應是$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

(B)$\because\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\quad\therefore\ |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{CD}|$

(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

(D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\vec{0}$（不得寫作 0）

(E) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

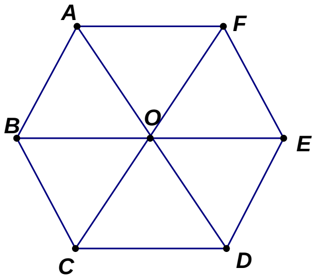
3. $ABCDEF$ 爲正六邊形，那麼下列向量內積中何者最小？

(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$ (B) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ (C) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ (D) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}$ (E) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EA}$

【解答】(D)

【詳解】

設邊長爲ℓ



(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\ell\cdot\ell\cdot\cos 0^\circ>0$

(B) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\ell\cdot\ell\cdot\cos 60^\circ>0$

(C) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\ell\cdot\ell\cdot\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}\ell^2<0$

(D) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}=\ell\cdot\ell\cdot\cos 180^\circ=-\ell^2<0$

(E) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EA}=\ell\cdot\ell\cdot\cos 90^\circ=0$，由上可知(D)最小

4. 設一平面上二向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，若 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$，則$\vec{a}$與$\vec{b}$的夾角爲

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 120° (E) 150°

【解答】(D)

【詳解】

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2 \Rightarrow (\sqrt{13})^2=3^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+4^2$

$\Rightarrow 2\vec{a}\cdot\vec{b}=-12 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=-6$

$\therefore |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha=\vec{a}\cdot\vec{b} \Rightarrow 3\cdot 4\cdot\cos\alpha=-6 \Rightarrow \cos\alpha=\frac{-1}{2}$，得$\alpha=120^\circ$

二、填充題(每題 10 分)

1. 正五邊形$ABCDE$中的 5 個頂點，可決定＿＿＿＿＿個不同的向量。

【解答】20

【詳解】

於正五邊形的五個頂點 A，B，C，D，E 中任取二點，可構成 10 個線段$\overline{AB}$，$\overline{AC}$，$\overline{AD}$，$\overline{AE}$，$\overline{BC}$，$\overline{BD}$，$\overline{BE}$，$\overline{CD}$，$\overline{CE}$，$\overline{DE}$，而每個線段可產生二個向量，如：$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{BA}$，故可產生 20 個不同的向量

2. 設 $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$，則 $|\vec{a}-\vec{b}|=$＿＿＿＿＿。

【解答】$\sqrt{37}$

【詳解】

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13} \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^2=13 \Rightarrow (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=13$

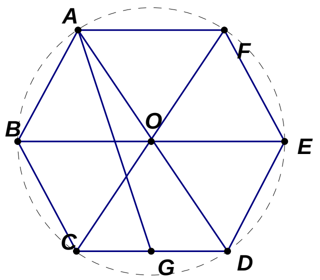
$\Rightarrow |\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=13 \Rightarrow 16+2\vec{a}\cdot\vec{b}+9=13 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=-6$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=16+12+9=37 \quad \therefore |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{37}$

3. 設G爲正六邊形$ABCDEF$之一邊$\overline{CD}$上之中點，若$\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AF}$，則
$(\alpha，\beta)=$__________。

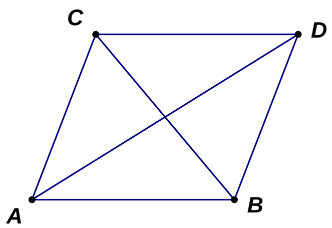
【解答】$(2，\dfrac{3}{2})$

【詳解】



$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CG}$$
$$=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{AO})+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$$
$$=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$$
$$=2\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AF}\quad，\therefore\quad(\alpha，\beta)=(2，\frac{3}{2})$$

4. $A，B，C$三點，$|\overrightarrow{AB}|=2，|\overrightarrow{AC}|=3$，若$ABDC$爲平行四邊形，
求$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$__________。



【解答】5

【詳解】

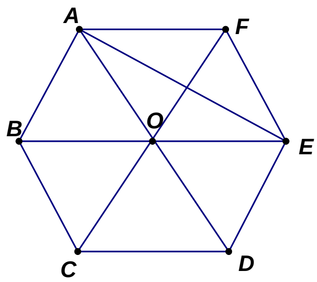
$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2=9-4=5$$

5. 設△ABC中，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AC}=7$，則$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$__________。

【解答】$\dfrac{15}{2}$

【詳解】$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-(|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos B)$

$$=-(|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\frac{|\overrightarrow{BA}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2}{2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|})=-\frac{1}{2}(|\overrightarrow{BA}|^2\cdot|\overrightarrow{BC}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2)$$
$$=-\frac{1}{2}(3^2+5^2-7^2)=\frac{15}{2}$$



6. 設$ABCDEF$爲一正六邊形，請將$\overrightarrow{AE}$表成$r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{BC}$的形式____。

【解答】$-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$

【詳解】$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$

7.設 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 夾角為 60°，求 $|\vec{a}+t\vec{b}|$ 的最小值。

【解答】$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

【詳解】

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}+t\vec{b}|^2 &= (\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b}) \\
&= |\vec{a}|^2+2t(\vec{a}\cdot\vec{b})+t^2|\vec{b}|^2 \\
&= |\vec{a}|^2+2t(|\vec{a}|\times|\vec{b}|\times\cos 60^\circ)+t^2|\vec{b}|^2 \\
&= 9+12t+16t^2 \\
&= 16[t^2+\frac{12}{16}t+(\frac{6}{16})^2]+9-16\times(\frac{6}{16})^2 \\
&= 16[t^2+\frac{6}{16}]+\frac{27}{4}
\end{aligned}
$$

當 $t=-\dfrac{6}{16}=\dfrac{-3}{8}$ 時，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ 有最小值為 $16\times(\dfrac{-3}{8})^2+12\times\dfrac{-3}{8}+9=\dfrac{27}{4}$

$\therefore$ $|\vec{a}+t\vec{b}|$ 的最小值為 $\sqrt{\dfrac{27}{4}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

8.正五邊形 $ABCDE$ 中，$\overline{AB}=2$，求(1) $\overline{AD}$。 (2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}$。(已知 $\cos 72^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$)

【解答】(1) $\sqrt{5}+1$ (2) $\sqrt{5}+1$

【詳解】

(1)由餘弦定理得 $\overline{AD}^2=\overline{EA}^2+\overline{ED}^2-2\,\overline{EA}\cdot\overline{ED}\cdot\cos 108^\circ$

$\Rightarrow \overline{AD}^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos 108^\circ$

$\Rightarrow \overline{AD}^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times(-\cos 72^\circ)$

$\Rightarrow \overline{AD}^2=6+2\sqrt{5}$

$\Rightarrow \overline{AD}=\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{(5+1)+2\sqrt{5\times1}}=\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}=\sqrt{5}+1$

(2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{BE}|\cdot\cos 72^\circ=(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)\times\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}=\sqrt{5}+1$