高雄市明誠中學 高二(上)平時測驗 日期：94.10.04					
範圍	1-3,4(2) 向量的內積及其用	班級	普二 班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

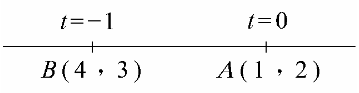
*1. 設點 $A(1，2)$，$B(4，3)$，則 $\overrightarrow{BA}$（BA 射線）的參數方程式，可為

(A) $\begin{cases} x=1-3t \\ y=2-t \end{cases}$，$-1\le t\le 0$ (B) $\begin{cases} x=1-3t \\ y=2-t \end{cases}$，$t\ge -1$ (C) $\begin{cases} x=1-3t \\ y=2-t \end{cases}$，$t\le 0$

(D) $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2-t \end{cases}$，$t\ge 0$ (E) $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+t \end{cases}$，$0\le t\le 1$

【解答】(B)

【詳解】



∴ $\overrightarrow{BA}$ 的參數方程式，可為 $\begin{cases} x=1-3t \\ y=2-t \end{cases}$，$t\ge -1$

2. 設點 $A(-2，5)$，$B(12，47)$，則 $\overline{AB}$ 的格子點（x，y 坐標都是整數的點）共有

(A) 15 (B) 12 (C) 8 (D) 5 (E) 2 個

【解答】(A)

【詳解】

∵ $\overrightarrow{AB}=(14，42)=14(1，3)$ ∴ $\overline{AB}$ ：$\begin{cases} x=-2+t \\ y=5+3t \end{cases}$，$0\le t\le 14$

∴ $\overline{AB}$ 的格子點，取 $t\in Z$ ∴ $t=0，1，2，\cdots，14$，共有 15 個

3. 直線 $L：3x-4y=7$ 有一個方向向量為$(1，t)$，$t\in R$，則 t 之值為

(A)$\dfrac{4}{3}$ (B)$\dfrac{3}{4}$ (C)$-\dfrac{4}{3}$ (D)$-\dfrac{3}{4}$ (E)不是唯一的實數

【解答】(B)

【詳解】

∵ 直線 $ax+by+c=0$ 的方向向量為 $t(b，-a)$，$t\in R$，$t\ne 0$

∴ $L：3x-4y=7$ 的方向向量為 $k(4，3)$，$k\ne 0$

令 $k(4，3)=(1，t)$ ∴ $k=\dfrac{1}{4}$，$t=3k=\dfrac{3}{4}$

4. (複選)下列五個直線參數式哪些代表同一條直線？ (A) $\begin{cases} x=-1+4t \\ y=2+2t \end{cases}$，$t\in R$

(B) $\begin{cases} x=4+3t \\ y=2+5t \end{cases}$，$t\in R$ (C) $\begin{cases} x=-5+2t \\ y=t \end{cases}$，$t\in R$ (D) $\begin{cases} x=1-6t \\ y=3+4t \end{cases}$，$t\in R$ (E) $\begin{cases} x=3-8t \\ y=4-4t \end{cases}$，$t\in R$

【解答】(A)(C)(E)

【詳解】將直線消去參數 t 即可化爲一般式

(A) $x-2y=-5$ (B) $5x-3y=14$ (C) $x-2y=-5$ (D) $2x+3y=11$ (E) $x-2y=-5$

$\Rightarrow$ 故選(A)(C)(E)

二、填充題每題 10 分)

*1.求二直線 L_1：$\begin{cases} x=2-t \\ y=1+3t \end{cases}$（$t\in R$），$L_2$：$3x-2y-1=0$ 之交點爲＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(\frac{5}{3}，2)$

【詳解】

將 L_1：$\begin{cases} x=2-t \\ y=1+3t \end{cases}$（$t\in R$）代入 L_2，得 $3(2-t)-2(1+3t)-1=0 \Rightarrow t=\frac{1}{3}$

故交點 $(x，y)=(\frac{5}{3}，2)$

2. 設 L 爲通過 $A(1，2)$ 與 $B(3，3)$ 兩點的直線，$P(x，y)$ 爲 L 上一點，則 $2x^2-3y^2$ 的最小値爲＿＿。

【解答】$\frac{-54}{5}$

【詳解】

L：$\begin{cases} x=1+(3-1)t \\ y=2+(3-2)t \end{cases}$ $\because$ $P(x，y)\in L$ $\therefore$ 設 P：$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \end{cases}$

則 $2x^2-3y^2=2(1+2t)^2-3(2+t)^2=5t^2-4t-10=5(t-\frac{2}{5})^2-\frac{54}{5}$

$\therefore$ 當 $t=\frac{2}{5}$ 時，有最小値爲 $-\frac{54}{5}$

3. 通過(1，2)且斜率爲 $\frac{1}{3}$ 的直線參數式爲＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+t \end{cases}$，$t\in R$

【詳解】方向向量 $\vec{d}=(a，b)$，斜率 $m=\frac{1}{3}=\frac{b}{a}$，取 $a=3$，$b=1$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+t \end{cases}$，$t\in R$

4. 設有一直線 L，其參數方程式爲 $\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-4t \end{cases}$，$t\in R$，則 L 之一般方程式爲＿＿＿＿＿＿。

【解答】$4x+3y-11=0$

【詳解】

$\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-4t \end{cases}$，$t\in R$，消去 t，$4x+3y=8+3=11$ $\Rightarrow$ $4x+3y-11=0$

*5. 平面上三向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，長度分別爲 1，2，3，方向角分別爲 60°，120°，240°，則

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|=$______________。 (2) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 之方向角爲______________。

【解答】(1) $\sqrt{7}$ (2) 180°

【詳解】

(1) $\vec{a}=(1\times\cos 60°，1\times\sin 60°)=(\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{3}}{2})$，

$\vec{b}=(2\cos 120°，2\sin 120°)=(-1，\sqrt{3})$

$\vec{c}=(3\cos 240°，3\sin 240°)=(\frac{-3}{2}，\frac{-3\sqrt{3}}{2})$

$\vec{a}+\vec{b}=(\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{3}}{2})+(-1，\sqrt{3})=(\frac{-1}{2}，\frac{3\sqrt{3}}{2})$

$\therefore\ |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\frac{-1}{2})^2+(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{7}$

(2) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\frac{1}{2}，\frac{\sqrt{3}}{2})+(-1，\sqrt{3})+(\frac{-3}{2}，\frac{-3\sqrt{3}}{2})=(-2，0)$

$\therefore\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 之方向角爲 180°

6. 設直線 L，M 的方程式分別爲 L：$\begin{cases}x=3+2t\\y=2-t\end{cases}$，$t\in R$，$M$：$\begin{cases}x=-1+t\\y=5-t\end{cases}$，$t\in R$，求 L 與 M 的交點坐標______________。

【解答】(1，3)

【詳解】

M：$\begin{cases}x=-1+s\\y=5-s\end{cases}$，$s\in R\Rightarrow\begin{cases}3+2t=-1+s\\2-t=5-s\end{cases}$，得 $t=1$，$s=2$， $x=1$，$y=3$，交點爲(1，3)

*7. 平面上二直線L_1：$\begin{cases}x=-1+t\\y=1+2t\end{cases}$，$t\in R$，$L_2$：$\begin{cases}x=2-s\\y=0+3s\end{cases}$，$s\in R$，

(1) L_1的斜率爲______________。(2) L_1和L_2的夾角爲______________。

(3)原點到L_1，L_2的距離分別爲d_1，d_2，則$d_1^2+d_2^2=$______________。

【解答】(1) 2 (2) 45°或 135° (3) $\frac{27}{5}$

【詳解】

(1) L_1上找兩點$A(-1，1)$及$B(0，3)$，則斜率$m=\frac{3-1}{0-(-1)}=2$

(2) L_1和L_2之方向向量分別爲$\overrightarrow{d_1}=(1，2)$，$\overrightarrow{d_2}=(-1，3)$

$\cos\theta=\pm\frac{\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}}{|\overrightarrow{d_1}||\overrightarrow{d_2}|}=\pm\frac{-1+6}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，則夾角$\theta$爲 45°或 135°

(3) L_1：$\begin{cases}x=-1+t\\y=1+2t\end{cases}$消去$t$ $\Rightarrow$ L_1：$2x-y+3=0$

L_2：$\begin{cases} x = 2 - s \\ y = 0 + 3s \end{cases}$ 消去s $\Rightarrow$ L_2：$3x + y - 6 = 0$

$d_1{}^2 + d_2{}^2 = (\dfrac{|0-0+3|}{\sqrt{4+1}})^2 + (\dfrac{|0+0-6|}{\sqrt{9+1}})^2 = \dfrac{9}{5} + \dfrac{18}{5} = \dfrac{27}{5}$

8. 坐標平面上點(5，$-$ 2)到直線L：$x = 2 + 3t$，$y = 1 + 4t$，$t \in R$的距離爲__________。

【解答】$\dfrac{21}{5}$

【詳解】

L：$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$，消去 t，得 L：$4x - 3y - 5 = 0$

點 $P(5，-2)$到 L 之距離爲 $d(P；L) = \dfrac{|20+6-5|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \dfrac{21}{5}$

9. 過點$A(1，5)$而與向量$\vec{n} = (3，-2)$垂直的直線方程式爲__________。

【解答】$3x - 2y + 7 = 0$

【詳解】

直線 L 與$\vec{n} = (3，-2)$垂直，故$\vec{n}$爲 L 之法向量，設 L：$3x - 2y + k = 0$

$A(1，5)$代入 L，得 $k = 7$ $\therefore$ L：$3x - 2y + 7 = 0$

10. $\vec{a} = (3，2)$，$\vec{b} = (1，-2)$，若$\vec{c} = \vec{a} + t\vec{b}$，則 $|\vec{c}|$ 的最小值爲__________。

【解答】$\dfrac{8}{5}\sqrt{5}$

【詳解】

$\vec{c} = \vec{a} + t\vec{b} = (3，2) + t(1，-2) = (3 + t，2 - 2t)$

$|\vec{c}| = \sqrt{(3+t)^2 + (2-2t)^2} = \sqrt{5t^2 - 2t + 13} = \sqrt{5(t - \dfrac{1}{5})^2 + \dfrac{64}{5}}$

當 $t = \dfrac{1}{5}$時，$|\vec{c}|$ 有最小值爲$\sqrt{\dfrac{64}{5}} = \dfrac{8}{5}\sqrt{5}$

11. L：$4x - 3y + 2 = 0$，求與L平行且距離爲 2 的直線方程式__________。（有二解）

【解答】$4x - 3y + 12 = 0$，$4x - 3y - 8 = 0$

【詳解】

設所求直線 L'：$4x - 3y + k = 0$ $\Rightarrow$ $d(L'；L) = \dfrac{|k-2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 2$

$\Rightarrow$ $|k - 2| = 10$ $\Rightarrow$ $k - 2 = \pm 10$ $\Rightarrow$ $k = 12$ 或-8

$\therefore$ L'：$4x - 3y + 12 = 0$ 或 $4x - 3y - 8 = 0$

12. 設$A(4，0)$，$B(0，-3)$，動點P爲直線$x + y = 0$ 上之一點，則 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 之最小值 $=$ _____。

【解答】$-\dfrac{49}{8}$

【詳解】

$A(4，0)，B(0，-3)，P\in x+y=0 \quad \Rightarrow \quad$ 令$P(t，-t)，t\in R$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(4-t，t)\cdot(-t，-3+t)=-t(4-t)+t(-3+t)$

$=2t^2-7t=2(t-\dfrac{7}{4})^2-\dfrac{49}{8}$

$\therefore$ 當$t=\dfrac{7}{4}$時，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$有最小值 $-\dfrac{49}{8}$

13.設 $A(-2，4)，B(8，9)，C(1，8)$，試求

(1) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上之投影量＿＿＿＿＿＿＿。　(2) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上之投影＿＿＿＿＿＿。

(3) B 在 $\overleftrightarrow{AC}$ 上之投影坐標＿＿＿＿＿＿＿。　(4)$\triangle ABC$ 的面積＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) 10　(2) (6，8)　(3) (4，12)　(4) $\dfrac{25}{2}$

【詳解】

$A(-2，4)，B(8，9)，C(1，8) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}=(10，5)，\overrightarrow{AC}=(3，4)$

(2) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上之投影 $=\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2}\right)\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{10\times3+5\times4}{3^2+4^2}\right)(3, 4)\ =(6，8)$

(1) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上之投影量 $=\sqrt{6^2+8^2}\ =10$

(3)設 B 在 $\overleftrightarrow{AC}$ 之投影坐標爲 $D(x，y)$

由$\overrightarrow{AD}=(6，8) \quad \Rightarrow \quad (x+2，y-4)=(6，8) \quad \Rightarrow \quad (x，y)=(4，12)$

(4)$\triangle ABC$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}10 & 5\\ 3 & 4\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}|10\times4-3\times5|=\dfrac{25}{2}$

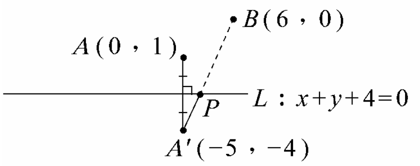
*14.xy平面上，點$A(0，1)$，$B(6，0)$，點P在直線$L：x+y+4=0$ 上移動，則$\overline{PA}+\overline{PB}$的最小值爲＿＿＿＿＿，$|\overline{PA}-\overline{PB}|$ 之最大值爲＿＿＿＿＿。

【解答】$\sqrt{137}$ ，$\sqrt{37}$

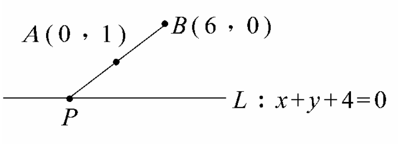
【詳解】

(1)點 A，B 都在直線 L 的同側，$A(0，1)$對於 L 的對稱點爲 $A'(-5，-4)$，

設 $\overline{A'B}$ 與直線 L 交於點 P，則 $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA'}+\overline{PB}=\overline{A'B}=\sqrt{137}$ 爲最小



(2)點 A，B 在直線 L 的同側，設 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 L 相交於點 P，則 $|\overline{PA}-\overline{PB}|=\overline{AB}=\sqrt{37}$ 爲最大



15.二直線L_1：$3x+4y-4=0$，L_2：$5x+12y-12=0$ 之 銳角平分線爲__________。

【解答】$4x+7y-7=0$

【詳解】$\dfrac{3x+4y-4}{\sqrt{3^2+4^2}}=-\dfrac{5x+12y-12}{\sqrt{5^2+12^2}}$（經異號區） $\Rightarrow$ $4x+7y-7=0$

16.x，$y\in R$，已知$x-2y=5$，求 $4x^2+9y^2$之最小值__________，並求當 $4x^2+9y^2$最小時，數對$(x，y)=$__________。

【解答】36，$(\dfrac{9}{5}，\dfrac{-8}{5})$

【詳解】

由柯西不等式知$(x-2y)^2\le[(2x)^2+(3y)^2][(\dfrac{1}{2})^2+(\dfrac{-2}{3})^2]$

$\Rightarrow$ $25\le(4x^2+9y^2)\cdot\dfrac{25}{36}$ $\Rightarrow$ $4x^2+9y^2\ge 36$

即最小值爲 36，此時$\dfrac{2x}{\frac{1}{2}}=\dfrac{3y}{\frac{-2}{3}}=k$ $\Rightarrow$ $x=\dfrac{k}{4}, y=-\dfrac{2k}{9}$，代入$x-2y=5$

，$\dfrac{k}{4}-2(-\dfrac{2k}{9})=5\Rightarrow k=\dfrac{36}{5}$，得$x=\dfrac{9}{5}$，則$y=\dfrac{-8}{5}$

17.坐標平面上三點$A(2，-1)$，$B(-1，3)$，$C(3，2)$，若直線 $2x-3y=1$ 交 $\overline{AB}$ 於Q點，求 $\overline{AQ}$ ： $\overline{BQ}=$__________。

【解答】1：2

【詳解】

$\overline{AQ}$ ： $\overline{BQ}=d(A；L)：d(B；L)=\dfrac{|4+3-1|}{\sqrt{4+9}}：\dfrac{|-2-9-1|}{\sqrt{4+9}}=6：12=1：2$

18.(1)已知$a>0$，$b>0$，則$(a+\dfrac{8}{b})(b+\dfrac{18}{a})$有最小值爲____________。

(2)已知 $2x^2+3y^2=20$，則 $2x+3y$有最大值爲_________________。

【解答】(1) 50 (2) 10

【詳解】

(1)柯西不等式：$(\sqrt{18}+\sqrt{8})^2\le[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{\dfrac{8}{b}})^2][(\sqrt{\dfrac{18}{a}})^2+(\sqrt{b})^2]$

$\Rightarrow$ $50\le(a+\dfrac{8}{b})(b+\dfrac{18}{a})$ $\therefore$ 最小值爲 50

(2)柯西不等式：$(\sqrt{2}x\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}y\cdot\dfrac{3}{\sqrt{3}})^2\le[(\sqrt{2}x)^2+(\sqrt{3}y)^2][(\dfrac{2}{\sqrt{2}})^2+(\dfrac{3}{\sqrt{3}})^2]$

$\Rightarrow \quad (2x+3y)^2 \le (2x^2+3y^2)\times(2+3) \quad \Rightarrow \quad (2x+3y)^2 \le 20\times 5$

$\Rightarrow \quad -10 \le 2x+3y \le 10 \quad \therefore$ 最大值爲 10

19.設$A(3，2)$，$L：2x-y+1=0$，則A在L上之投影坐標爲__________，A關於L之對稱點爲_。

【解答】(1，3)，(− 1，4)，

【詳解】

$A(3，2)$，$L：2x-y+1=0 \quad \Rightarrow k=2\times3-2+1=5$

$\Rightarrow$ A 在 L 上之投影點 H： $x=3-\dfrac{2\times5}{5}=1$；$y=2+\dfrac{1\times5}{5}=3$

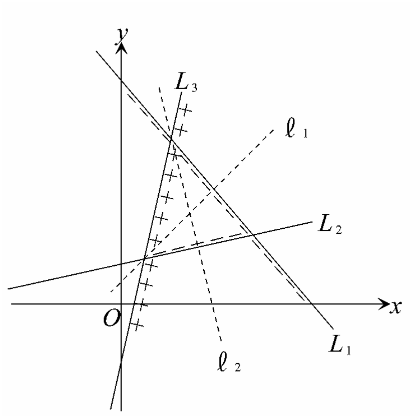
$\Rightarrow$ A 關於 L 之對稱點 A'： $x=3-\dfrac{2\times2\times5}{5}=-1$；$y=2+\dfrac{2\times1\times5}{5}=4$

20.求三直線$L_1：7x+6y-59=0$，$L_2：2x-9y+16=0$，$L_3：9x-2y-5=0$ 所圍成三角形的內心坐標______________。

【解答】(3，4)

【詳解】

L_1，L_2，L_3的圖形如下圖（各 +，− 號利用原點代入方程式以同號區、異號區判定）



$\therefore$ L_2，L_3的交角平分線，取ℓ_1：$\dfrac{2x-9y+16}{\sqrt{4+81}}=-\dfrac{9x-2y-5}{\sqrt{81+4}}$，即$\ell_1：x-y+1=0$

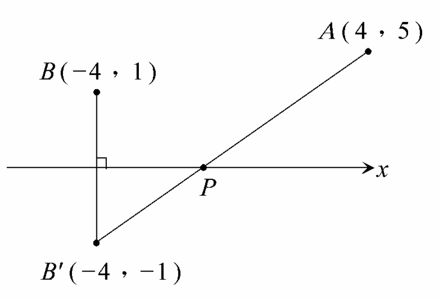
L_1，L_3的交角平分線，取ℓ_2：$\dfrac{7x+6y-59}{\sqrt{49+36}}=-\dfrac{9x-2y-5}{\sqrt{81+4}}$，即$\ell_2：4x+y-16=0$

$\therefore$ 所求內心乃是ℓ_1，ℓ_2之交點，其坐標爲(3，4)

*21.x是實數，則$\sqrt{(x-4)^2+25}+\sqrt{(x+4)^2+1}$ 的最小值爲__________。

【解答】10

【詳解】



即求 $y=\sqrt{(t-4)^2+25}+\sqrt{(t+4)^2+1}=\sqrt{(t-4)^2+(0-5)^2}+\sqrt{(t+4)^2+(0-1)^2}$ 之最小值

令 $P(t，0)$，$A(4，5)$，$B(-4，1)$　∴　$y=\overline{PA}+\overline{PB}$ 之最小值

∵　點 P 的軌跡爲 x 軸，取 B 對 x 軸的對稱點 $B'(-4，-1)$

∴　$y=\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{PB'}=\overline{AB'}=10$ 爲最小值

*22.設點 $A(\cos\theta，\sin\theta)$，點 $B(1+\sin\theta，1-\cos\theta)$，此處 $0\le\theta\le 2\pi$，求 $|\overrightarrow{AB}|$ 的最大值及此時之 θ 值＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$2\sqrt{2}$，π

【詳解】

$\overrightarrow{AB}=(1+\sin\theta-\cos\theta，1-\cos\theta-\sin\theta)$

∴　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(1+\sin\theta-\cos\theta)^2+(1-\cos\theta-\sin\theta)^2}=\sqrt{4-4\cos\theta}$

∵　$0\le\theta\le 2\pi$　⇒　$-1\le\cos\theta\le 1$　⇒　$-4\le -4\cos\theta\le 4$

⇒　$0\le 4-4\cos\theta\le 8$　⇒　$0\le\sqrt{4-4\cos\theta}\le 2\sqrt{2}$

∴　$|\overrightarrow{AB}|$ 的最大值爲 $2\sqrt{2}$，此時 $\cos\theta=-1$　⇒　$\theta=\pi$

*23.設 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\vec{a}=(\frac{1}{\sqrt{2}}，\frac{1}{\sqrt{2}})$，$\vec{b}=(\cos\theta-\sin\theta，1)$且 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，則 $\theta=$＿＿＿＿＿。

【解答】$\frac{\pi}{4}$

【詳解】

$|\vec{b}|=|(\cos\theta-\sin\theta，1)|=\sqrt{(\cos\theta-\sin\theta)^2+1}=\sqrt{2-\sin 2\theta}$，而 $|\vec{a}|=1$

∵　$|\vec{a}|=|\vec{b}|$　⇒　$\sqrt{2-\sin 2\theta}=1$　⇒　$\sin 2\theta=1$

但 $0<2\theta<\pi$　∴　$2\theta=\frac{\pi}{2}$　⇒　$\theta=\frac{\pi}{4}$

*24.$A(1，-4)$，$B(4，0)$，$C(\cos\theta，\sin\theta)$，則△ABC面積之最小值爲＿＿＿＿＿。

【解答】$\frac{11}{2}$

【詳解】

$\overrightarrow{AB}=(3，4)$，$\overrightarrow{AC}=(\cos\theta-1，\sin\theta+4)$

△ABC 面積 $=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ \cos\theta-1 & \sin\theta+4 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|3(\sin\theta+4)-4(\cos\theta-1)|$

$$=\frac{1}{2}|\,3\sin\theta-4\cos\theta+16|$$

$$=\frac{1}{2}|\,5\sin(\,\theta-\phi\,)+16| \qquad (\text{其中 } \sin\phi=\frac{4}{5}\text{，}\cos\phi=\frac{3}{5})$$

當 $\sin(\theta-\phi)=-1$ 時，$\triangle ABC$ 面積有最小值 $\frac{1}{2}|-5+16|=\frac{11}{2}$