高雄市明誠中學 高二(上)平時測驗 日期：95.01.09					
範圍	4-3,4 球面與平面、直線	班級	普二 班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1. 若過空間中四點(0，0，0)，(1，0，0)，(0，2，0)，(0，0，3)的球面方程式為$x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$，則$d+e+f+g=$__________。

【解答】-6

【詳解】球面S：$x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$

$$\begin{cases}(0,0,0)\\(1,0,0)\\(0,2,0)\\(0,0,3)\end{cases}\text{代入}S \Rightarrow \begin{cases}g=0\\1+d+g=0\\4+2e+g=0\\9+3f+g=0\end{cases}\text{，得}\begin{cases}d=-1\\e=-2\\f=-3\\g=0\end{cases}$$

故$d+e+f+g=(-1)+(-2)+(-3)=-6$

2. 平面E：$x-2y+2z+k=0$，球面S：$x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z+5=0$，若E與S相交成一圓，則k值範圍為____________________。

【解答】$4<k<10$

【詳解】

球面S：$(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=1 \Rightarrow$ 球心$A(-1，1，-2)$，半徑$r=1$

若E與S相交成一圓 $\Rightarrow 0<d(A；E)<1 \Rightarrow 0<\dfrac{|-1-2-4+k|}{\sqrt{1+4+4}}<1$，即$4<k<10$

3. 過(−1，6，0)，(3，2，2)之球面有無限多個，則半徑最小的球面方程式為__________。

【解答】$(x-1)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=9$

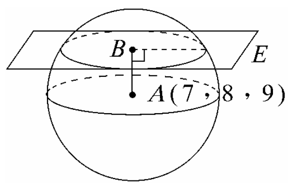
【詳解】

過$A(-1，6，0)$，$B(3，2，2)$兩點且半徑最小之球面即以A，B為直徑之球面

$\Rightarrow (x+1)(x-3)+(y-6)(y-2)+(z-0)(z-2)=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=9$

4. 球$x^2+y^2+z^2-14x-16y-18z+94=0$與平面$x+y+z=15$交出一圓，則圓心坐標為___。

【解答】(4，5，6)



【詳解】如上圖，$\overleftrightarrow{AB}$：$\begin{cases}x=7+t\\y=8+t\\z=9+t\end{cases}$，$t\in R$

（其中平面E之法向量$\vec{n}=(1，1，1)$為直線$\overleftrightarrow{AB}$之方向向量）

則$B(7+t，8+t，9+t)$代入$E\Rightarrow(7+t)+(8+t)+(9+t)=15\Rightarrow t=-3$，圓心$B(4，5，6)$

5. 若$x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-55=0$，則

(1) $x+2y+2z$的最大值為__________。(2) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2$之最小值為______。

【解答】(1) 25　(2) 25

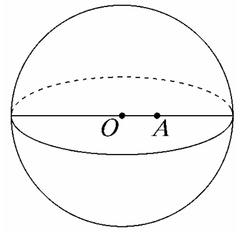
【詳解】$x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-55=0$

$\Rightarrow\ (x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=64$，球心$O(1，-2，2)$，半徑$r=8$

(1)柯西不等式得$(1^2+2^2+2^2)[(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2]\ge[(x-1)+2(y+2)+2(z-2)]^2$

$\Rightarrow\ 9\times 64\ge(x+2y+2z-1)^2\ \Rightarrow\ -24\le x+2y+2z-1\le 24$

$\Rightarrow\ -23\le x+2y+2z\le 25\ \therefore\ x+2y+2z$的最大值為 25



(2)設$A(3，-1，4)$，則$\overline{OA}=\sqrt{(3-1)^2+(-1+2)^2+(4-2)^2}=3$

$\therefore\ (x-3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2$的最小值$=(r-\overline{OA})^2=(8-3)^2=25$

6. 設球面方程式為$x^2+y^2+z^2=27$，若有一直線L：$\begin{cases}x+2y=3\\ z=3\end{cases}$交球面於$P$，$Q$兩點，則線段$\overline{PQ}$之中點坐標為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(\frac{3}{5}，\frac{6}{5}，3)$

【詳解】L：$\begin{cases}x=3-2t\\ y=t\\ z=3\end{cases}$　代入球面S：$x^2+y^2+z^2=27$

得 $5t^2-12t-9=0$，$(5t+3)(t-3)=0$，$t=\frac{-3}{5}$，3 代入L

得$P(\frac{21}{5}，\frac{-3}{5}，3)$，$Q(-3，3，3)$　$\therefore$　中點為$(\frac{3}{5}，\frac{6}{5}，3)$

7. 以$A(10，2，5)$，$B(-6，10，11)$為直徑兩端點的球面S方程式為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$x^2+y^2+z^2-4x-12y-16z+15=0$

【詳解】

$(x-10)(x+6)+(y-2)(y-10)+(z-5)(z-11)=0\Rightarrow x^2+y^2+z^2-4x-12y-16z+15=0$

8. 通過下列四點$A(-3，2，-2)$，$B(5，2，-2)$，$C(-2，3，-2)$，$D(4，3，-2)$之球面S的球心$(a，b，c)$，則序組$(a，b，c)=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(1，-1，2)$

【詳解】

設所求球面方程式為S：$x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$

將$A(-3，2，-2)$，$B(5，2，-2)$，$C(-2，3，-2)$，$D(4，3，-2)$代入S

得$\begin{cases}-3d+2e-2f+g=-17\\ 5d+2e-2f+g=-33\\ -2d+3e-2f+g=-17\\ 4d+3e-2f+g=-29\end{cases}$，解之得$d=-2$，$e=2$，$f=-4$，$g=-35$

故S：$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-35=0$，即$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=41$

9. 球面S與平面$x-2y-2z=7$ 相切於點$A(3，-1，-1)$且半徑 3，則S之方程式為

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿或＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(x-4)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=9$ 或$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$

【詳解】

球面S切平面E：$x-2y-2z=7$ 於點$A(3，-1，-1)$，球心P_0在垂直E於A點的直線上

$\therefore$ $\overleftrightarrow{P_0A}$的方程式爲$\begin{cases} x=3+t \\ y=-1-2t \\ z=-1-2t \end{cases}$。設$P_0(3+t，-1-2t，-1-2t)$，則$\overline{P_0A}=3$

$\therefore$ $\sqrt{t^2+4t^2+4t^2}=3 \Rightarrow 9t^2=9 \quad \Rightarrow \quad t=\pm 1 \quad \therefore$ 球心$P_0(4，-3，-3)$或$P_0(2，1，1)$

故S的方程式爲$(x-4)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=9$ 或$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$

10.已知球面$x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-8=0$ 與x軸交於A，B兩點，則$\overline{AB}$ 的長爲＿＿＿＿＿。

【解答】6

【詳解】

設球面$x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-8=0$ 與x軸交點爲$(t，0，0)$代入

得$t^2-2t-8=0 \quad \Rightarrow \quad (t+2)(t-4)=0 \quad \Rightarrow \quad t=-2，4$

故交點A，B的坐標分別爲$(-2，0，0)$，$(4，0，0)$，$\overline{AB}=|4-(-2)|=6$

11.求過點$A(3，5，3)$且與球面S：$x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z=35$ 相切的平面方程式＿＿＿＿＿。

【解答】$2x+3y+6z-39=0$

【詳解】

$A(3，5，3)$代入 S 得 $9+25+9-6-20+18=35$，故 A 在球面 S 上，即 A 爲切點，

$\Rightarrow \quad 3x+5y+3z-2(\frac{x+3}{2})+4(\frac{y+5}{2})+6(\frac{z+3}{2})=35$ ，平面方程式爲 $2x+3y+6z-39=0$

12.若直線L：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{2}$ 與球面S：$x^2+y^2+z^2=r^2$相切，則半徑r的長 ＝＿＿＿＿，

切點坐標爲＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\sqrt{5}$ ，$(\frac{2}{3}，-\frac{5}{3}，\frac{4}{3})$

【詳解】直線L：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=-1+2t \\ z=2+2t \end{cases}$ 代入球面S：$x^2+y^2+z^2=r^2$

$(1+t)^2+(-1+2t)^2+(2+2t)^2=r^2 \Rightarrow 9t^2+6t+(6-r^2)=0$

$\because$ 相切$\Rightarrow D=0, 36-4\times 9\times(6-r^2)=0$ ；$r^2=5 \Rightarrow r=\sqrt{5}$

$\therefore 9t^2+6t+1=0 \Rightarrow (3t+1)^2=0 \Rightarrow t=-\frac{1}{3}$ ，切點$P(\frac{2}{3}，-\frac{5}{3}，\frac{4}{3})$

13.通過點$A(2，1，0)$與$B(\frac{1}{2}，0，1)$的平面E，若與球面S：$x^2+y^2+z^2=1$ 相切，則平面E的

方程式爲＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$2x - y + 2z = 3$ 或 $2x + 3y + 6z = 7$

【詳解】

$\overleftrightarrow{AB}$：$\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-2}$ $\Leftrightarrow$ $\overleftrightarrow{AB}$：$\begin{cases} 2x-3y-1=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$

設E：$(2x - 3y - 1) + t(y + z - 1) = 0$，即$E$：$2x + (t - 3)y + tz - (1 + t) = 0$

$\because$ E與S：$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 相切 $\therefore$ 球心$O(0，0，0)$到E的距離 $=$ 半徑

$\Rightarrow$ $\dfrac{|t+1|}{\sqrt{4+(t-3)^2+t^2}} = 1$ $\Rightarrow$ $t = 2$ 或$t = 6$ $\therefore$ E：$2x - y + 2z = 3$ 或 $2x + 3y + 6z = 7$

14.求直線L：$\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{4}$與球面$S$：$x^2 + y^2 + z^2 - 12z + 27 = 0$ 的交點坐標__________。

【解答】$(2，1，4)$及$(1，2，8)$

【詳解】

設交點坐標參數式爲$(-t + 3，t，4t)$，代入S方程式得$(-t + 3)^2 + t^2 + (4t)^2 - 12(4t) + 27 = 0$

$\Rightarrow$ $t^2 - 3t + 2 = 0$ $\Rightarrow$ $t = 1$ 或 2 $\therefore$ 二交點爲$(2，1，4)$及$(1，2，8)$

15.已知一球面S：$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 3 = 0$，若平面$x + y + z + k = 0$ 與S相切，則實數k之值 $=$_____________。

【解答】$\pm 3\sqrt{3}$

【詳解】

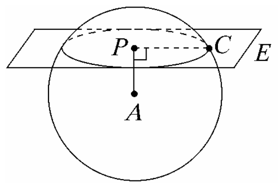
S：$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 3^2$，球心$P(1，-2，1)$，半徑 3

平面E：$x + y + z + k = 0$ 與球面S相切 $\Rightarrow$ 球心P到E的距離 $= S$的半徑

$\Rightarrow$ $\dfrac{|1-2+1+k|}{\sqrt{1+1+1}} = 3$ $\Rightarrow$ $k = \pm 3\sqrt{3}$

16.已知平面$x + 2y + 2z = 4$ 與球面S：$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z - 3 = 0$ 相交於圓C，求(1)此圓半徑長 $=$__________。

(2)若圓心坐標爲$P(a，b，c)$，則 $2a + b + c =$__________。



【解答】(1) $\sqrt{5}$ (2) 0

【詳解】

(1)球面S：$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 9$ ， 球心$A(-2，1，-1)$，半徑$r = 3$

$\overline{AP} = d(A；E) = \dfrac{|-2+2-2-4|}{\sqrt{1+4+4}} = 2$，圓半徑 $= \overline{PC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AP}^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

(2) $\overleftrightarrow{AP}$ ：$\begin{cases} x = -2+t \\ y = 1+2t \\ z = -1+2t \end{cases}$ ，$t \in R$

（平面E：$x + 2y + 2z = 4$ 之法向量$\vec{n} = (1，2，2)$爲直線$\overleftrightarrow{AP}$之方向向量）

設圓心$P(-2 + t，1 + 2t，-1 + 2t)$代入平面E：$x + 2y + 2z - 4 = 0$，得$t = \dfrac{2}{3}$

則圓心$P(a，b，c)=(\frac{-4}{3}，\frac{7}{3}，\frac{1}{3})$，故 $2a+b+c=\frac{-8}{3}+\frac{7}{3}+\frac{1}{3}=0$

17.空間中，球面S：$(x-3)^2+y^2+(z+4)^2=25$ 被平面$x=2$ 切割的截面圓方程式爲＿＿＿＿＿

【解答】$\begin{cases}(x-3)^2+y^2+(z+4)^2=24\\x=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y^2+(z+4)^2=24\\x=2\end{cases}$

【詳解】

$\begin{cases}S：(x-3)^2+y^2+(z+4)^2=25\cdots\cdots①\\E：x=2\cdots\cdots②\end{cases}$，②代入①　$\Rightarrow$　$y^2+(z+4)^2=24$

$\therefore$　截圓方程式爲$\begin{cases}y^2+(z+4)^2=24\\x=2\end{cases}$

18.二球面S_1，S_2相交於一圓C，其中S_1：$x^2+y^2+z^2-4x-4y-2z+1=0$，S_2：$x^2+y^2+z^2-3x-2y-4z+6=0$，則圓C之圓心爲＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$O(1，0，3)$

【詳解】

此二球之根平面E：$S_2-S_1=0$　$\Rightarrow$　E：$x+2y-2z+5=0$

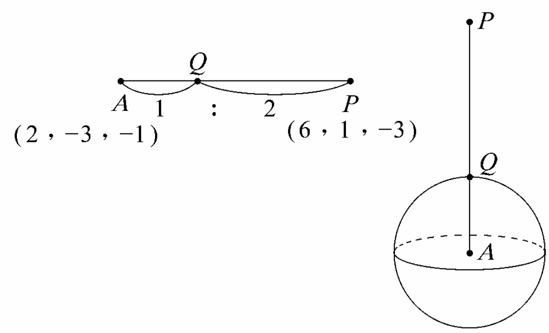
設圓C之圓心$C(2+t,2+2t,1-2t)$代入E

$\Rightarrow(2+t)+2(2+2t)-2(1-2t)+5=0\Rightarrow t=-1$　　$\Rightarrow$圓心$C(1，0，3)$

19.點$P(6，1，-3)$，球面S：$x^2+y^2+z^2-4x+6y+2z+10=0$，點$Q$在$S$上，當$Q$坐標爲＿＿＿＿＿＿＿時，$\overline{PQ}$有最小値＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(\frac{10}{3}，\frac{-5}{3}，\frac{-5}{3})$，4

【詳解】



球面S：$(x-2)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=4$，球心$A(2，-3，-1)$，半徑$r=2$

(1)最短距離 $=|\overline{AP}-R|=|6-2|=4$

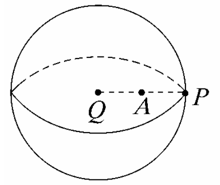
(2)$\overline{AQ}$：$\overline{PQ}=2：4=1：2$，由分點公式$Q\begin{cases}x=\frac{2\times2+6\times1}{1+2}=\frac{10}{3}\\y=\frac{(-3)\times2+1\times1}{1+2}=\frac{-5}{3}\\z=\frac{(-1)\times2+(-3)\times1}{1+2}=\frac{-5}{3}\end{cases}$

20.球面$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$ 上任一點P，一定點$A(0，1，2)$，求

(1) $\overline{PA}$ 的最小值為________________。(2) $\overline{PA}$ 最小時，P點的坐標為____________________。

【解答】(1) $3-\sqrt{3}$　(2) $(1-\sqrt{3}，2-\sqrt{3}，1+\sqrt{3})$

【詳解】



球面$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$，球心$Q(1，2，1)$，半徑$r=3$，

$\overline{AQ}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}<r$　$\Rightarrow$　A點在球面內部

(1) $\overline{PA}$ 的最小值 $=r-\overline{AQ}$ $=3-\sqrt{3}$

(2)由(1)知 $\overline{AQ}:\overline{AP}=\sqrt{3}:(3-\sqrt{3})$ $\Rightarrow$ 設 $P(a,b,c)$

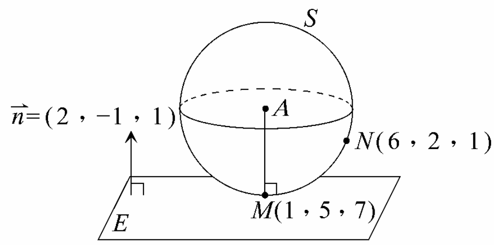
$$\Rightarrow A(0,1,2)=(\frac{\sqrt{3}\times a+(3-\sqrt{3})\times 1}{\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})},\frac{\sqrt{3}\times b+(3-\sqrt{3})\times 2}{\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})},\frac{\sqrt{3}\times c+(3-\sqrt{3})\times 1}{\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})})$$

$P(a,b,c)=(1-\sqrt{3}，2-\sqrt{3}，1+\sqrt{3})$

21.有一球面S與平面E：$2x-y+z-4=0$ 相切於$M(1，5，7)$且過另一點$N(6，2，1)$，求S之方程式為__________________________。

【解答】$(x-11)^2+y^2+(z-12)^2=150$，

$x^2+y^2+z^2-22x-24z+115=0$



【詳解】

$\overleftrightarrow{AM}\perp E$，故 $\overleftrightarrow{AM}\,//\,\vec{n}=(2，-1，1)$，

設球心$A(1+2t，5-t，7+t)$，而$r^2=\overline{AM}^2=\overline{AN}^2$

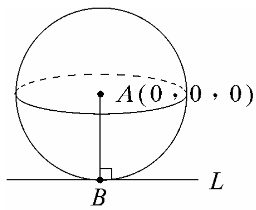
$\Rightarrow$　$4t^2+t^2+t^2=(2t-5)^2+(3-t)^2+(t+6)^2$　$\Rightarrow$　$t=5$，得球心$A(11，0，12)$，$r^2=150$

故S：$(x-11)^2+y^2+(z-12)^2=150$，即$S$：$x^2+y^2+z^2-22x-24z+115=0$

22.球面S：$x^2+y^2+z^2=a$與直線L：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ 相切，則實數$a=$____________。

【解答】$\dfrac{35}{6}$

【詳解】



(法一)參閱No12 題

(法二)

$B\in$ 直線L，設$B(1+t，-1+2t，2+t)$

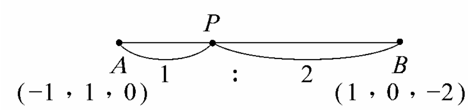
$\overline{AB}=\sqrt{(1+t)^2+(-1+2t)^2+(2+t)^2}=\sqrt{6(t+\dfrac{1}{6})^2+\dfrac{35}{6}}$

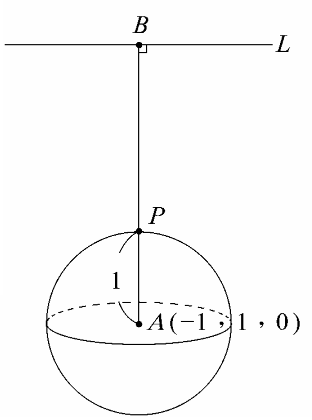
當$t=\dfrac{-1}{6}$時，$\overline{AB}$ 有最小值$\sqrt{\dfrac{35}{6}}$，即半徑$r=d(A；L)=\sqrt{\dfrac{35}{6}}$，故$a=r^2=\dfrac{35}{6}$

23.設點$P(a，b，c)$為球面S：$(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=1$ 上距離直線L：$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$最近的一點，求(1) $(a，b，c)=$________________。　(2)此點P與L的距離為__________。

【解答】(1) $(\dfrac{-1}{3}，\dfrac{2}{3}，\dfrac{-2}{3})$　(2) 2

【詳解】





設球心 $A(-1，1，0)$到直線 L 之垂足爲 B，則 $B(3+2t，2+2t，-1+t)$

$\overrightarrow{AB}=(4+2t，1+2t，-1+t)\perp L$ 之方向向量 $\overrightarrow{d}=(2，2，1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{d}=0 \;\Rightarrow\; 9t+9=0 \;\Rightarrow\; t=-1$，則 $B(1，0，-2)$，$\overline{AB}=3$

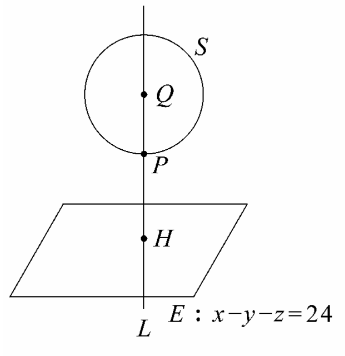
故 P 與直線 L 的距離 $=\overline{BP}=\overline{AB}-\overline{AP}=3-1=2$

由分點公式 $P(a，b，c)=(\dfrac{(-1)\times 2+1\times 1}{1+2}，\dfrac{1\times 2+0\times 1}{1+2}，\dfrac{0\times 2+(-2)\times 1}{1+2})=(\dfrac{-1}{3}，\dfrac{2}{3}，\dfrac{-2}{3})$

24.點P是球面$S：x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+11=0$ 的動點，當P到平面$E：x-y-z=24$ 距離最小時，點P之坐標爲____________________。

【解答】$(2，-3，2)$

【詳解】



$S：(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=3$，

球心爲$Q(1，-2，3)$，半徑$r=\sqrt{3}$

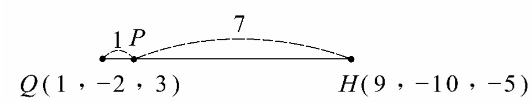
球心Q到平面$E：x-y-z-24=0$ 距離爲$\dfrac{24}{\sqrt{3}}=8\sqrt{3}$

$\because\; \overline{PQ}=r=\sqrt{3} \quad \therefore\; \overline{PH}=7\sqrt{3}$

$L：\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{-1}$，令$H(t+1，-t-2，-t+3)\in L$

$\therefore\; H\in E \;\Rightarrow\; t=8 \;\Rightarrow\; H(9，-10，-5)$

$\because\; \overline{QP}：\overline{PH}=\sqrt{3}：7\sqrt{3}=1：7 \;\Rightarrow\; P(2，-3，2)$



25.假設一地球儀的半徑爲R，在北緯 30°的緯圈上，由東經 30°的位置沿逆時針方向東移到東經 60°的位置，其所經的弧長爲_______________。

【解答】$\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi R$

【詳解】

設球心 O，北緯 30°的小圓圓心 O'，半徑 r

在北緯 30°的緯圈上，東經 30°的位置爲 A，東經 60°的位置爲 B

$\therefore\quad \angle AO'B = 30°$，$r = R\cos30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R \quad \therefore\quad \overset{\frown}{AB} = r \cdot \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R \times \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi R$