高雄市明誠中學 高二(上)平時測驗 日期：94.12.26					
範圍	4-2,3 圓、直線、球面	班級	普二 班	姓名	
		座號			

一、單選題(每題 10 分)

1. 以下各平面中哪一個與球面：$x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-19=0$ 相交所形成的圓面積最小？(A) $x+y+z=0$ (B) $z=-1$ (C) $y=1$ (D) $x=2$ (E) $x=2y$

【解答】(C)

【詳解】平面 $y=1$ 距離球心最遠，故與球面相交之圓面積最小

2. 設實數x，y，z滿足$x^2+y^2+z^2=1$，若$x+y+z=k$，則

(A) k的最大值為$\sqrt{2}$ (B) k的最小值為 $-\sqrt{2}$ (C) k有最大值時，$x=y=z=1$

(D) k有最小值時，$x=y=z=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$ (E) k無最大或最小值

【解答】(D)

【詳解】

由柯西不等式$(x^2+y^2+z^2)(1^2+1^2+1^2)\ge(x+y+z)^2 \Rightarrow 1\times 3\ge k^2 \Rightarrow -\sqrt{3}\le k\le\sqrt{3}$

當k有最大值$\sqrt{3}$時，$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$且$x+y+z=\sqrt{3}$，得$x=y=z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

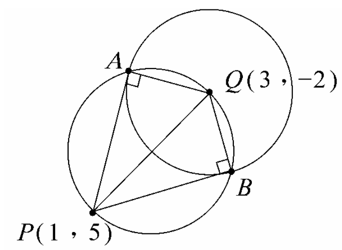
當k有最小值$-\sqrt{3}$時，$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$且$x+y+z=-\sqrt{3}$，當$x=y=z=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$，故選(D)

二、填充題(每題 10 分)

1. 自點$P(1，5)$向圓$x^2+y^2-6x+4y+4=0$ 作二切線，切點分別為A，B，則

(1)切線段$\overline{PA}$長為＿＿＿＿＿。 (2)△PAB之外接圓方程式為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $2\sqrt{11}$ (2) $x^2+y^2-4x-3y-7=0$



【詳解】

(1) $\overline{PA}=\sqrt{1+25-6+20+4}=2\sqrt{11}$

(2) $\overline{AQ}\perp\overline{AP}$，$\overline{BQ}\perp\overline{BP}$，故△$PAB$之外接圓，

即為以$P(1，5)$及$Q(3，-2)$為直徑之圓

$\Rightarrow (x-1)(x-3)+(y-5)(y+2)=0 \Rightarrow x^2+y^2-4x-3y-7=0$

2. 圓外一點$P(-3，6)$對圓 $2x^2+2y^2+6x-2y-5=0$ 所作的切線段長為＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{\sqrt{110}}{2}$

【詳解】圓C：$x^2+y^2+3x-y-\dfrac{5}{2}=0$，切線段長 $=\sqrt{(-3)^2+6^2+3\times(-3)-6-\dfrac{5}{2}}=\sqrt{\dfrac{55}{2}}=\dfrac{\sqrt{110}}{2}$

3. 有一圓的圓心$(-3，4)$，與直線 $3x-4y+5=0$ 相切，其圓方程式為＿＿＿＿＿。

【解答】$(x+3)^2+(y-4)^2=16$

【詳解】圓C的圓心$A(-3，4)$與直線L：$3x-4y+5=0$ 相切

故半徑$r=d(A，L)=\dfrac{|3\times(-3)-4\times4+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=4$，得圓方程式為$(x+3)^2+(y-4)^2=4^2$

4. 過點$(1，3)$且與圓$(x+1)^2+(y-2)^2=5$相切的直線方程式為__________。

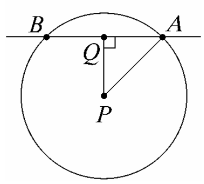
【解答】$2x+y-5=0$

【詳解】點$P(1，3)\in$圓C，所求切線$L：(1+1)(x+1)+(3-2)(y-2)=5$，$L：2x+y-5=0$

5. 直線$x-y=3$被圓$x^2+y^2-x+y-2=0$所截得的弦長 $=$______________。

【解答】$\sqrt{2}$

【詳解】

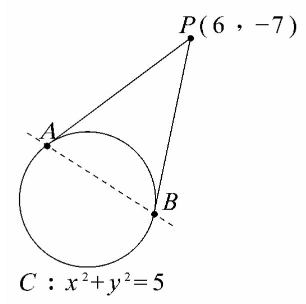


圓$C：(x-\dfrac{1}{2})^2+(y+\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{5}{2}$，圓心$P(\dfrac{1}{2}，-\dfrac{1}{2})$，半徑$r=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

弦長 $=\overline{AB}=2\overline{AQ}=2\sqrt{\overline{PA}^2-\overline{PQ}^2}=2\sqrt{\dfrac{5}{2}-2}=\sqrt{2}$

（其中$\overline{PQ}=d(P，L)=\dfrac{|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-3|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$）

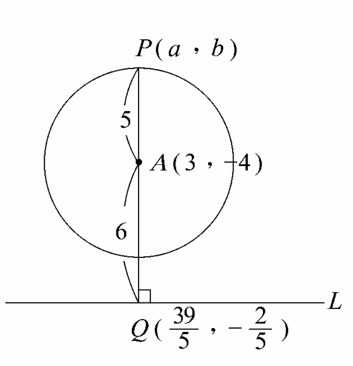
6. 若自點$P(6，-7)$作圓$x^2+y^2=5$的切線，則切點坐標為_________。（兩解）



【解答】$(2，1)$，$(\dfrac{-22}{17}，\dfrac{-31}{17})$

【詳解】$\begin{cases}切點弦\overleftrightarrow{AB}：6x-7y=5\\C：x^2+y^2=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}或\begin{cases}x=\dfrac{-22}{17}\\y=\dfrac{-31}{17}\end{cases}$

7. 圓$x^2+y^2-6x+8y=0$上任一點P到直線$4x+3y=30$的距離最大值 $=$___________，此時P點的坐標為___________。



【解答】11，$(-1，-7)$

【詳解】

(1)圓$x^2+y^2-6x+8y=0\Rightarrow(x-3)^2+(y+4)^2=5^2$，

圓心$A(3，-4)$，半徑5

P點到直線$L：4x+3y=30$的最大距離 $=d(A，L)+r=\dfrac{|12-12-30|}{\sqrt{4^2+3^2}}+5=\dfrac{30}{5}+5=11$

(2)過$A(3，-4)$，作$L：4x+3y=30$的垂直線$L'：3x-4y=25$，L與L'交點$Q(\dfrac{39}{5}，-\dfrac{2}{5})$

因$\overline{AP}=5$，$\overline{AQ}=6$，設$P(a，b)$，則由分點公式得$(3，-4)=(\dfrac{6a+39}{5+6}，\dfrac{6b-2}{5+6})$

$\begin{cases}6a+39=33\\6b-2=-44\end{cases}\Rightarrow(a，b)=(-1，-7)$

8. 若直線$y = 2x + k$與圓C：$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$ 交於兩點，則k值之範圍爲__________。

【解答】$3 - 5\sqrt{5} < k < 3 + 5\sqrt{5}$

【詳解】$\begin{cases} C：x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0 \cdots\cdots ① \\ L：y = 2x + k \cdots\cdots ② \end{cases}$

②代入① $\Rightarrow$ $5x^2 + 4(k + 2)x + (k^2 + 2k - 20) = 0$

D：$16(k + 2)^2 - 4 \times 5 \times (k^2 + 2k - 20) > 0$（$\because$ 交於兩點）

$\Rightarrow$ $k^2 - 6k - 116 < 0$ $\Rightarrow$ $3 - 5\sqrt{5} < k < 3 + 5\sqrt{5}$

9. 求與直線$x + 2y - 3 = 0$ 垂直且與圓$x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ 相切的直線方程式________。

【解答】$2x - y - 3 + \sqrt{5} = 0$ 或 $2x - y - 3 - \sqrt{5} = 0$

【詳解】代入公式，直線 $x + 2y - 3 = 0$ 斜率 $m = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ 所求切線斜率 $m = -2$

$y + 1 = 2(x - 1) \pm 1 \cdot \sqrt{2^2 + 1} \Rightarrow$ 切線方程式爲 $2x - y - 3 + \sqrt{5} = 0$ 或 $2x - y - 3 - \sqrt{5} = 0$

10.求過$P(1，1)$且與圓$x^2 + (y - 3)^2 = 1$ 相切的直線方程式：______________________________。

【解答】$x = 1$ 或 $y - 1 = -\dfrac{3}{4}(x - 1)$

【詳解】$P(1，1)$代入圓方程式得 $1^2 + (1 - 3)^2 = 5 > 1$ $\therefore$ P在圓外

設切線爲$y - 1 = m(x - 1)$，即$mx - y - m + 1 = 0$

$\dfrac{|m \cdot 0 - 3 - m + 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1$ $\Rightarrow$ $m = -\dfrac{3}{4}$ $\Rightarrow$ 切線$y - 1 = -\dfrac{3}{4}(x - 1)$，另一無斜率，即$x = 1$

11.自點$P(8，1)$作圓C：$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 7 = 0$ 的切線，切點爲A與B，則 $\overleftrightarrow{AB}$ 方程式爲____。

【解答】$7x - y = 17$

【詳解】令$P(x_0，y_0) = P(8，1)$ $\therefore$ $x^2 \to x_0 x$，$x \to \dfrac{x_0 + x}{2}$，$y^2 \to y_0 y$，$y \to \dfrac{y_0 + y}{2}$代入

得 $8x + y - 2(\dfrac{8 + x}{2}) - 4(\dfrac{1 + y}{2}) - 7 = 0$ $\Rightarrow$ $7x - y = 17$

12.兩圓C_1：$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12 = 0$ 與C_2：$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$

(1)求兩內公切線之交點坐標爲__________。

(2)求兩內公切線方程式爲__________。（有兩條）

【解答】(1) $(-1，1)$ (2) $y = 1$ 或 $4x + 3y + 1 = 0$

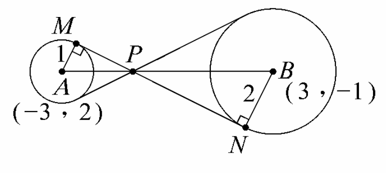
【詳解】

(1) C_1：$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$，圓心$A(-3，2)$，半徑$r_1 = 1$

C_2：$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$，圓心$B(3，-1)$，半徑$r_2 = 2$

設兩內公切線相交於P點，則$\triangle AMP \sim \triangle BNP \Rightarrow \overline{AP} : \overline{BP} = \overline{AM} : \overline{BN} = r_1 : r_2 = 1 : 2$

由內分點公式$P(x，y) = (\dfrac{(-3) \times 2 + 3 \times 1}{1 + 2}，\dfrac{2 \times 2 + (-1) \times 1}{1 + 2}) = (-1，1)$



(2)∵內公切線L過$P(-1，1)$，∴設$L：y-1=m(x+1)$， $d(A，L)=\dfrac{|-3m-2+m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

$\Rightarrow \quad 3m^2+4m=0 \quad \Rightarrow \quad m=0$ 或$m=\dfrac{-4}{3}$

故內公切線L分別爲$y-1=0$ 或$y-1=\dfrac{-4}{3}(x+1)$，即$y=1$ 或 $4x+3y+1=0$

13.圓心在$x-2y+3=0$ 上且與兩坐標軸相切的圓方程式爲__________。

【解答】$(x-3)^2+(y-3)^2=9$ 或$(x+1)^2+(y-1)^2=1$

【詳解】與兩坐標軸均相切之圓的圓心可設爲$(a，a)$或$(a，-a)$，半徑爲 $|a|$

(1)圓心$(a，a)$代入$x-2y+3=0\Rightarrow a=3$， $r=|a|=3$，圓方程式$(x-3)^2+(y-3)^2=9$

(2)圓心$(a，-a)$代入$x-2y+3=0\Rightarrow a=-1$， $r=|a|=1$，圓方程式$(x+1)^2+(y-1)^2=1$

14.試求通過圓$x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 與直線 $2x-y+4=0$ 的交點，且切於x軸的圓方程式：__________。（兩解）

【解答】$x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 或$x^2+y^2+6x-6y+9=0$

【詳解】設過圓與直線的圓爲$x^2+y^2+2x-4y+1+\alpha(2x-y+4)=0$

即$(x+1+\alpha)^2+(y-2-\dfrac{\alpha}{2})^2=\dfrac{5}{4}\alpha^2+4$，圓心$O(-1-\alpha，2+\dfrac{\alpha}{2})$

$d(O，x\text{軸})=|2+\dfrac{\alpha}{2}| \quad \Rightarrow \quad (2+\dfrac{\alpha}{2})^2=\dfrac{5}{4}\alpha^2+4 \quad \Rightarrow \quad \alpha=0$ 或 2

$\therefore \quad x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 或$x^2+y^2+6x-6y+9=0$

15. 設方程式$x^2+y^2+z^2-2kx+4y-4z+k^2+k=0$ 的圖形爲一個點，則$k=$__________。

【解答】8

【詳解】圖形爲一點 $\Rightarrow \quad d^2+e^2+f^2-4g=0$，即 $4k^2+16+16-4k^2-4k=0$，得$k=8$

16. 以$P(-1，2，3)$爲球心，並通過原點的球面方程式爲__________。

【解答】$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$

【詳解】半徑$r^2=\overline{OP}^2=1+4+9=14 \quad \therefore$ 球面方程式爲$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$

17. 通過下列四點$A(-3，2，-2)$，$B(5，2，-2)$，$C(-2，3，-2)$，$D(4，3，-2)$之球面S的球心$(a，b，c)$，則序組$(a，b，c)=$__________。

【解答】$(1，-1，2)$

【詳解】設所求球面方程式爲$S：x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$

將$A(-3，2，-2)$，$B(5，2，-2)$，$C(-2，3，-2)$，$D(4，3，-2)$代入S

得$\begin{cases}-3d+2e-2f+g=-17\\5d+2e-2f+g=-33\\-2d+3e-2f+g=-17\\4d+3e-2f+g=-29\end{cases}$，解之得$d=-2$，$e=2$，$f=-4$，$g=-35$

故$S：x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-35=0$，即$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=41$

18. 平面E：$x-2y+2z+k=0$，球面S：$x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z+5=0$，若E與S相交成一圓，則k值範圍為__________。

【解答】$4<k<10$

【詳解】球面S：$(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=1 \quad \Rightarrow \quad$ 球心$A(-1，1，-2)$，半徑$r=1$

若E與S相交成一圓 $\Rightarrow \quad 0<d(A；E)<1 \quad \Rightarrow \quad 0<\dfrac{|-1-2-4+k|}{\sqrt{1+4+4}}<1$，即$4<k<10$

19. 求$P(1，2，3)$到球面S：$x^2+y^2+z^2-2x+8y+4z+12=0$的最近距離 $=$__________。

【解答】$\sqrt{61}-3$

【詳解】球面S：$(x-1)^2+(y+4)^2+(z+2)^2=9$之球心$A(1，-4，-2)$，半徑$r=3$

最近距離 $=|\overline{AP}-r|=\sqrt{61}-3$

20. 空間中，過$A(4，2，2)$，$B(3，-3，0)$且球心在x軸之球面方程式為__________。

【解答】$(x-3)^2+y^2+z^2=9$

【詳解】設球心$P(t，0，0)$，則$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2 \quad \Rightarrow \quad (t-4)^2+2^2+2^2=(t-3)^2+(-3)^2 \quad \Rightarrow \quad t=3$

半徑$R=\overline{PA}=3 \quad \therefore \quad$ 球面方程式S：$(x-3)^2+y^2+z^2=9$

21.求直線L：$\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{4}$與球面$S$：$x^2+y^2+z^2-12z+27=0$的交點坐標__________。

【解答】$(2，1，4)$及$(1，2，8)$

【詳解】

設交點坐標為$(-t+3，t，4t)$，代入S方程式得$(-t+3)^2+t^2+(4t)^2-12(4t)+27=0$

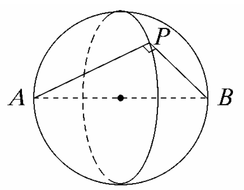
$\Rightarrow t^2-3t+2=0 \quad \Rightarrow \quad t=1$ 或 $2 \quad \therefore \quad$ 二交點為$(2，1，4)$及$(1，2，8)$22.

22.以$A(10，2，5)$，$B(-6，10，11)$為直徑兩端點的球面S，求

(1) S的方程式為__________________________。(2) S截出z軸的線段長為__________。

【解答】(1) $x^2+y^2+z^2-4x-12y-16z+15=0$ (2) 14

【詳解】



(1)$(x-10)(x+6)+(y-2)(y-10)+(z-5)(z-11)=0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2-4x-12y-16z+15=0$

(2)設與z軸交點$(0，0，t)$代入，$t^2-16t+15=0 \quad \Rightarrow \quad t=1，15$

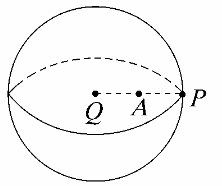
得兩交點$(0，0，1)$，$(0，0，15)$，此線段長為 $15-1=14$

23.球面$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$上任一點$P$，一定點$A(0，1，2)$，求

(1) $\overline{PA}$ 的最小值為__________。(2) $\overline{PA}$ 最小時，P點的坐標為__________。

【解答】(1) $3-\sqrt{3}$ (2) $(1-\sqrt{3}，2-\sqrt{3}，1+\sqrt{3})$

【詳解】



球面$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$，球心$Q(1，2，1)$，半徑$r=3$，定點$A(0，1，2)$

$\overline{AQ}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}<r \quad \Rightarrow \quad A$點在球面內部

(1) $\overline{PA}$的最小値 $=r-\overline{AQ} \ =3-\sqrt{3}$

(2)由(1)知$\overline{AQ}:\overline{AP}=\sqrt{3}:(3-\sqrt{3}) \ \Rightarrow$ 設$P(a,b,c)$

$$\Rightarrow A(0,1,2)=(\frac{\sqrt{3}\times a+(3-\sqrt{3})\times 1}{\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})},\frac{\sqrt{3}\times b+(3-\sqrt{3})\times 2}{\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})},\frac{\sqrt{3}\times c+(3-\sqrt{3})\times 1}{\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})})$$

$P(a,b,c)=(1-\sqrt{3}，2-\sqrt{3}，1+\sqrt{3})$

24.若直線L：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{2}$與球面$S$：$x^2+y^2+z^2=r^2$相切，則半徑$r$的長 $=$ ________，切點坐標爲____________________。

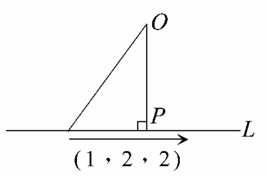
【解答】$\sqrt{5}$，$(\frac{2}{3}，-\frac{5}{3}，\frac{4}{3})$

【詳解】直線L：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{2}$與球面$S$：$x^2+y^2+z^2=r^2$相切，即球心$O(0，0，0)$到$L$的距離等於球的半徑$r$。設$L$上一點$P(1+t，-1+2t，2+2t)$且$\overline{OP}\perp L$，則

$\overrightarrow{OP}\cdot(1，2，2)=0 \quad \Rightarrow \quad (1+t，-1+2t，2+2t)\cdot(1，2，2)=0$

$\Rightarrow \quad 1+t+2(-1+2t)+2(2+2t)=0 \quad \Rightarrow \quad 9t+3=0 \quad \Rightarrow \quad t=\frac{-3}{9}=\frac{-1}{3}$

$r=\overline{OP}=\sqrt{(1-\frac{1}{3})^2+(-1-\frac{2}{3})^2+(2-\frac{2}{3})^2}=\sqrt{5}$，切點即爲$P$點，其坐標爲$(\frac{2}{3}，-\frac{5}{3}，\frac{4}{3})$



25.球面 $3x^2+3y^2+3z^2-6x+9y-2=0$ 的球心坐標爲__________，半徑爲__________。

【解答】$(1，-\frac{2}{3}，0)$，$\frac{\sqrt{141}}{6}$

【詳解】$x^2+y^2+z^2-2x+3y-\frac{2}{3}=0$，配方得$(x-1)^2+(y+\frac{3}{2})^2+z^2=\frac{47}{12}$

球心$(1，-\frac{2}{3}，0)$，半徑$\sqrt{\frac{47}{12}}=\frac{\sqrt{141}}{6}$

26.已知球面$x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-8=0$與x軸交於A，B兩點，則$\overline{AB}$的長爲__________。

【解答】6

【詳解】設球面$x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-8=0$與x軸交點爲$(a，0，0)$代入

得$a^2-2a-8=0 \quad \Rightarrow \quad (a+2)(a-4)=0 \quad \Rightarrow \quad a=-2，4$

故交點A，B的坐標分別為$(-2，0，0)$，$(4，0，0)$，$\overline{AB}=|4-(-2)|=6$

27.令$O(6，2，0)$，而點Q在球面$S：x^2+y^2+z^2=4$上移動，則$\overline{OQ}$中點的軌跡方程式為____。

【解答】$(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=1$

【詳解】令$Q(a，b，c)\in S$　$\therefore$　$a^2+b^2+c^2=4$

設$\overline{OQ}$中點為$P(x,y,z)=(\frac{6+a}{2}，\frac{2+b}{2}，\frac{0+c}{2})$，

即$x=3+\frac{a}{2}$，$y=1+\frac{b}{2}$，$z=\frac{c}{2}$　$\Rightarrow$　$a=2(x-3)$，$b=2(y-1)$，$c=2z$

但$a^2+b^2+c^2=4$　$\Rightarrow$　$[2(x-3)]^2+[2(y-1)]^2+(2z)^2=4$　$\Rightarrow$　$(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=1$

28.已知一球面$S：x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0$，若平面$x+y+z+k=0$與$S$相切，則實數$k$之值 $=$ __________。

【解答】$\pm3\sqrt{3}$

【詳解】$S：(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3^2$，球心$P(1，-2，1)$，半徑 3

平面$E：x+y+z+k=0$與球面S相切　$\Rightarrow$　球心P到E的距離 $=S$的半徑

$\Rightarrow$　$\frac{|1-2+1+k|}{\sqrt{1+1+1}}=3$　$\Rightarrow$　$k=\pm3\sqrt{3}$

29.球面S與平面$x-2y-2z=7$相切於點$A(3，-1，-1)$且半徑 3，則S之方程式為__________或__________。

【解答】$(x-4)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=9$ 或$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$

【詳解】

球面S切平面$E：x-2y-2z=7$於點$A(3，-1，-1)$，球心P_0在垂直E於A點的直線上

$\therefore$　$\overleftrightarrow{P_0A}$的方程式為$\begin{cases}x=3+t\\y=-1-2t\\z=-1-2t\end{cases}$。設$P_0(3+t，-1-2t，-1-2t)$，則$\overline{P_0A}=3$

$\therefore$　$\sqrt{t^2+4t^2+4t^2}=3\Rightarrow$　$3|t|=3$　$\Rightarrow$　$t=\pm1$，$\therefore$球心$P_0(4，-3，-3)$或$P_0(2，1，1)$

故S的方程式為$(x-4)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=9$ 或$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$

30.兩個球面$S_1：x^2+y^2+z^2=4$與$S_2：(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=9$交於一圓$C$，則包含圓$C$的所有球面中，最小的球面方程式為__________。

【解答】$9x^2+9y^2+9z^2-4x-8y+8z-28=0$

【詳解】

$S_1：x^2+y^2+z^2=4$，$S_2：x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z=0$

S_1，S_2的交圓C所在平面E為 $2x+4y-4z=4$，即$x+2y-2z=2$

包含圓C的最小球面即以圓C為大圓的球面，即球心在平面E上

設此球面方程式為$(x^2+y^2+z^2-4)+t(x+2y-2z-2)=0$

化簡$x^2+y^2+z^2+tx+2ty-2tz-2t-4=0$

球心$(-\frac{t}{2}$，$-t$，$t)$在E：$x+2y-2z=2$ 上 $\Rightarrow$ $-\frac{t}{2}-2t-2t=2$ $\Rightarrow$ $t=\frac{-4}{9}$

所求球面方程式爲$x^2+y^2+z^2-\frac{4}{9}x-\frac{8}{9}y+\frac{8}{9}z-\frac{28}{9}=0$

31.球面S：$(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$，$E$爲$S$上一點$(1，1，1)$切平面，則點$(2，3，4)$與平面$E$的距離爲__________。

【解答】3

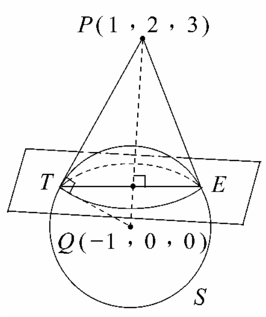
【詳解】球心 $O(1，1，-1)$，$P(1，1，1)$在 E 上，$Q(2，3，4)$

$\overrightarrow{OP}=(0，0，2)$ $\therefore$ E：$z=1$，$d(Q，E)=\frac{|4-1|}{\sqrt{1^2}}=3$

32.點$P(1，2，3)$到球面S：$(x+1)^2+y^2+z^2=10$ 的切線段長爲__________，所有切點形成一個圓，此圓所在平面方程式爲__________，圓的圓心坐標爲__________。

【解答】(1) $\sqrt{7}$ (2) $2x+2y+3z=8$ (3) $(\frac{3}{17}，\frac{20}{17}，\frac{30}{17})$

【詳解】



S：$(x+1)^2+y^2+z^2=10$ 的球心$Q(-1，0，0)$，過$P(1，2，3)$作球的切線，一切點T

(1)切線段長 $\overline{PT}=\sqrt{\overline{PQ}^2-r^2}=\sqrt{(4+4+9)-10}=\sqrt{7}$

(2)所有切點所成的圓即以P爲中心，$\overline{PT}$ 爲半徑的球面S'與球面S的交圓

此圓所在平面E即爲兩球的根平面，S'的方程式爲$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=7$

平面E的方程式爲$[(x+1)^2+y^2+z^2-10]-[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-7]=0$

即 $2x+2y+3z=8$

(3)兩球面交圓的圓心爲球心連線PQ與平面E的交點，直線PQ的方程式：$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$

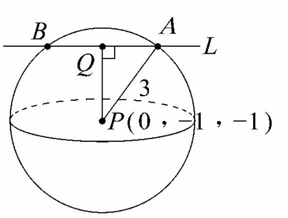
設圓心$R(-1+2t，2t，3t)$代入E：$2x+2y+3z=8$ 得 $2(-1+2t)+2(2t)+3(3t)=8$

$\Rightarrow$ $t=\frac{10}{17}$，故$R(\frac{3}{17}，\frac{20}{17}，\frac{30}{17})$

33.直線L：$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=z-2$ 被球面S：$x^2+(y+1)^2+(z+1)^2=9$ 截出之線段長爲________。

【解答】4

【詳解】



$\because\ Q \in L \quad \therefore$ 設$Q(1+2t，-2-t，2+t)$

$\Rightarrow\ \overline{PQ}^2=(1+2t)^2+(-1-t)^2+(3+t)^2=6(t+1)^2+5$

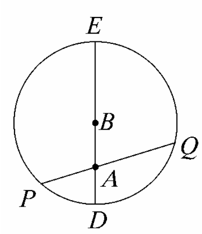
當$t=-1$時，$\overline{PQ}$有最小值$\sqrt{5}$，即$d(P；L)=\sqrt{5}$

所求截線段 $=\overline{AB}=2\,\overline{AQ}=2\sqrt{\overline{PA}^2-\overline{PQ}^2}=2\sqrt{3^2-5}=4$

34.過點$A(1,2,3)$,作直線L與球面$S:x^2+y^2+z^2+2x-4y-4z-7=0$ 交於點P與Q,則$\overline{PA}\cdot\overline{AQ}$之積 $=$__________。

【解答】11

【詳解】



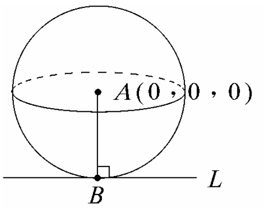
$S：(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=16$，球心$B(-1，2，2)$，半徑$r=4$

點A在S的內部，$\overline{AB}=\sqrt{5}$，$\overline{PA}\cdot\overline{AQ}=\overline{AD}\cdot\overline{AE}=(r-\overline{AB})(r+\overline{AB})=r^2-\overline{AB}^2=16-5=11$

35.球面$S：x^2+y^2+z^2=a$與直線$L：\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$相切，則實數$a=$__________。

【解答】$\dfrac{35}{6}$

【詳解】



$B\in$ 直線L，設$B(1+t，-1+2t，2+t)$

$\overline{AB}=\sqrt{(1+t)^2+(-1+2t)^2+(2+t)^2}=\sqrt{6(t+\frac{1}{6})^2+\frac{35}{6}}$

當$t=\dfrac{-1}{6}$時，$\overline{AB}$有最小值$\sqrt{\dfrac{35}{6}}$，即半徑$r=d(A；L)=\sqrt{\dfrac{35}{6}}$，故$a=r^2=\dfrac{35}{6}$

$\sqrt{a^2+2a+11})^2$，故$a=-1 \quad \therefore\ (x-2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=10$ 爲所求