高雄市明誠中學 高二(上)平時測驗　　日期：94.12.22

範圍	4- 圓與直線	班級	普二　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1.有一圓C：$x^2+y^2-4x+4y-2=0$ 及一點$P(4，2)$，則

(A) P點在圓上　　(B)過P之切線有一為$x+3y+2=0$

(C)過P之切線有一為 $3x-y-14=0$　(D)兩切線之銳夾角為 45°　(E)兩切線互相垂直

【解答】(E)

【詳解】

C：$(x-2)^2+(y+2)^2=10$，圓心$A(2，-2)$，半徑$r=\sqrt{10}$ ，而$\overline{AP}>r$，故P點在圓外

設過$P(4，2)$與圓C相切之直線L：$y-2=m(x-4)$

則$d(A，L)=\dfrac{|2m-4m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$　$\Rightarrow$　$m=-3$ 或$\dfrac{1}{3}$

得過P之切線為 $3x+y-14=0$ 及$x-3y+2=0$

且兩切線互相垂直（$\because$　$(-3)\times\dfrac{1}{3}=-1$），故選(E)

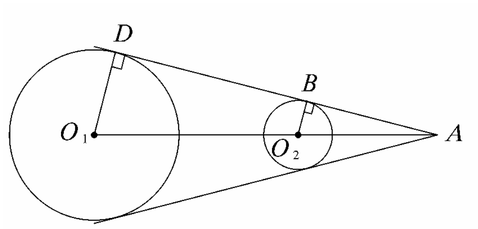
2.(複選)兩圓C_1：$x^2+y^2-6x-2y+1=0$，C_2：$x^2+y^2+4x+3=0$ 外公切線夾角為θ

（$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$），則下列敘述何者正確？(A)外公切線段長為$\sqrt{22}$　(B)內公切線段長為$\sqrt{10}$

(C)兩外公切線的交點為$(-\dfrac{9}{2}，-\dfrac{1}{2})$　(D)兩內公切線的交點為$(-\dfrac{3}{4}，\dfrac{1}{4})$　(E)$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3}{5}$

【解答】(A)(B)(C)(D)

【詳解】



(1) C_1：$(x-3)^2+(y-1)^2=9$，C_2：$(x+2)^2+y^2=1$

$\therefore$　圓心$O_1(3，1)$，$O_2(-2，0)$，半徑$R=3$，$r=1$

(2)外公切線段長 $=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(R-r)^2}=\sqrt{26-4}=\sqrt{22}$

(3)內公切線段長 $=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(R+r)^2}=\sqrt{26-16}=\sqrt{10}$

(4)在$\triangle O_1AD$中，$\overline{AO_2}:\overline{AO_1}=\overline{BO_2}:\overline{DO_1}=\dfrac{r}{R}=\dfrac{1}{3}$　$\Rightarrow$　$A(-\dfrac{9}{2}，-\dfrac{1}{2})$

(5)同(4)，兩內公切線的交點為$(-\dfrac{3}{4}，\dfrac{1}{4})$

(6)在$\triangle O_2AB$中，$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\overline{O_2B}}{\overline{O_2A}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{26}{4}}}=\dfrac{2}{\sqrt{26}}$

3. (複選)若點$P(a，2a)$在圓C：$x^2+y^2-2x=0$ 的內部，則a值在下列哪些範圍內？

(A) $0<a<0.5$　(B) $0.2<a<0.6$　(C) $0<a<0.4$　(D) $0.4<a<1$　(E)以上皆真

【解答】(A)(C)

【詳解】點$P(a，2a)$在圓$x^2+y^2-2x=0$ 的內部　$\Rightarrow$　$a^2+4a^2-2a<0$　$\Rightarrow$　$a(5a-2)<0$

$\Rightarrow$　$0<a<\dfrac{2}{5}$　$\Rightarrow$　$0<a<0.4$，又 $0<a<0.5$ 也成立，應選(A)(C)

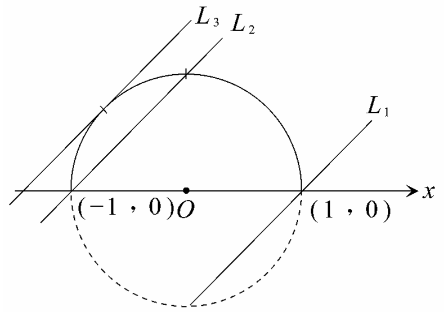
4. (複選)設曲線 $y=\sqrt{1-x^2}$ 與直線 $y=x+k$ 相交 n 個點，則

(A)當 $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ 時，$n=2$　(B)當 $k>\sqrt{2}$ 或 $k<-1$ 時，$n=0$

(C)當 $1<k<\sqrt{2}$ 時，$n=2$　(D)當 $-1\le k<1$ 時，$n=1$　(E)當 $k=-\sqrt{2}$ 時，$n=1$

【解答】(B)(C)(D)

【詳解】



(1) $y=\sqrt{1-x^2}$　$\Leftrightarrow$　$x^2+y^2=1$，$y\ge 0$，其圖形如上

(2) $y=x+k$過$(1，0)$　$\Rightarrow$　L_1：$y=x-1$；$y=x+k$

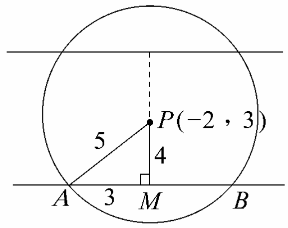
過$(-1，0)$　$\Rightarrow$　L_2：$y=x+1$

$y=x+k$與$y=\sqrt{1-x^2}$ 相切　$\Rightarrow$　L_3：$y=x+\sqrt{2}$

（利用圓心到$y=x+k$距離 ＝ 半徑）

(3)當$-1\le k<1$ 或$k=\sqrt{2}$ 時，$n=1$，當 $1\le k<\sqrt{2}$ 時，$n=2$，當$k>\sqrt{2}$ 或$k<-1$，$n=0$

二、填充題(每題 10 分)



1. 直線 $3x-4y=k$與圓$x^2+y^2+4x-6y-12=0$ 交於A，B兩點，若 $\overline{AB}=6$，則k之值為____。

【解答】$k=2$ 或-38

【詳解】

圓$x^2+y^2+4x-6y-12=0$　$\Rightarrow$　$(x+2)^2+(y-3)^2=5^2$，圓心$P(-2，3)$，半徑$r=5$

過P作直線 $3x-4y=k$的垂直線垂足M，則M為 $\overline{AB}$ 中點　$\therefore$　$\overline{AM}=3$，又 $\overline{PA}=r=5$

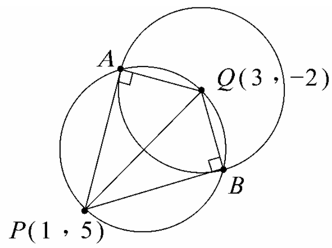
$\therefore$　$\overline{PM}=4$　$\therefore$　$d(P，\overline{AB})=\dfrac{|-6-12-k|}{\sqrt{9+16}}=4$　$\Rightarrow$　$k+18=\pm 20$　$\therefore$　$k=2$ 或-38

2. 自點$P(1，5)$向圓$x^2+y^2-6x+4y+4=0$ 作二切線，切點分別為A，B，則

(1)切線段 $\overline{PA}$ 長為__________。　(2)△PAB之外接圓方程式為__________。

【解答】(1) $2\sqrt{11}$　(2) $x^2+y^2-4x-3y-7=0$

【詳解】



(1) $\overline{PA}=\sqrt{1+25-6+20+4}=2\sqrt{11}$

(2) $\overline{AQ}\perp\overline{AP}$ ，$\overline{BQ}\perp\overline{BP}$ ，故△PAB之外接圓，

即為以$P(1，5)$及$Q(3，-2)$為直徑之圓

$\Rightarrow$　$(x-1)(x-3)+(y-5)(y+2)=0$　$\Rightarrow x^2+y^2-4x-3y-7=0$

3. 圓外一點$P(-3，6)$對圓 $2x^2+2y^2+6x-2y-5=0$ 所作的切線段長為__________。

【解答】 $\dfrac{\sqrt{110}}{2}$

【詳解】圓C：$x^2+y^2+3x-y-\dfrac{5}{2}=0$，切線段長 $=\sqrt{(-3)^2+6^2+3\times(-3)-6-\dfrac{5}{2}}=\sqrt{\dfrac{55}{2}}=\dfrac{\sqrt{110}}{2}$

4. 有一圓的圓心$(-3，4)$，與直線 $3x-4y+5=0$ 相切，其圓方程式為__________。

【解答】$(x+3)^2+(y-4)^2=16$

【詳解】圓C的圓心$A(-3，4)$與直線L：$3x-4y+5=0$ 相切

故半徑$r = d(A，L) = \dfrac{|3\times(-3)-4\times4+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 4$，得圓方程式為$(x+3)^2+(y-4)^2=4^2$

5. 若二元二次方程式$x^2+y^2-8x-5y+k=0$之圖形為一圓，則實數k的範圍為________，又此圓與x軸相切，則k之值為__________。

【解答】(1) $k<\dfrac{89}{4}$　(2) 16

【詳解】

(1) $d^2+e^2-4f=(-8)^2+(-5)^2-4k>0 \quad \Rightarrow \quad k<\dfrac{89}{4}$

(2) $\begin{cases} C：x^2+y^2-8x-5y+k=0\cdots\cdots① \\ x\text{ 軸}：y=0\cdots\cdots② \end{cases}$

②代入①　$\Rightarrow$　$x^2-8x+k=0$　$\because$　相切　$\therefore$　$D：(-8)^2-4k=0$ 得$k=16$

6. 過點(1，3)且與圓$(x+1)^2+(y-2)^2=5$相切的直線方程式為__________。

【解答】$2x+y-5=0$

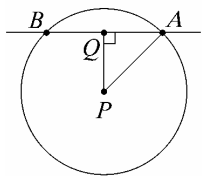
【詳解】點 $P(1，3)\in$圓 C

故所求切線 $L：(1+1)(x+1)+(3-2)(y-2)=5$，得 $L：2x+y-5=0$

7. 直線$x-y=3$被圓$x^2+y^2-x+y-2=0$所截得的弦長 $=$__________。

【解答】$\sqrt{2}$

【詳解】

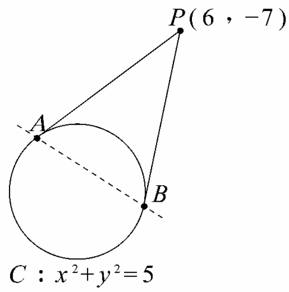


圓$C：(x-\dfrac{1}{2})^2+(y+\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{5}{2}$，圓心$P(\dfrac{1}{2}，-\dfrac{1}{2})$，半徑$r=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

弦長 $=\overline{AB}=2\,\overline{AQ}=2\sqrt{\overline{PA}^2-\overline{PQ}^2}=2\sqrt{\dfrac{5}{2}-2}=\sqrt{2}$

（其中$\overline{PQ}=d(P，L)=\dfrac{|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-3|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$）

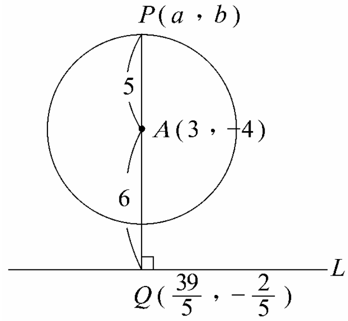
8. 若自點$P(6，-7)$作圓$x^2+y^2=5$的切線，則切點坐標為________。（兩解）



【解答】(2，1)，$(\dfrac{-22}{17}，\dfrac{-31}{17})$

【詳解】$\begin{cases} \text{切點弦}\overleftrightarrow{AB}：6x-7y=5 \\ C：x^2+y^2=5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$或$\begin{cases} x=\dfrac{-22}{17} \\ y=\dfrac{-31}{17} \end{cases}$

9. 圓$x^2+y^2-6x+8y=0$上任一點P到直線$4x+3y=30$的距離最大值 $=$__________，此時P點的坐標為__________。



【解答】11，(－1，－7)

【詳解】

(1)圓$x^2+y^2-6x+8y=0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2+(y+4)^2=5^2$，

圓心$A(3，-4)$，半徑 5

P點到直線L：$4x+3y=30$ 的最大距離 $=d(A，L)+r=\dfrac{|12-12-30|}{\sqrt{4^2+3^2}}+5=\dfrac{30}{5}+5=11$

(2)過$A(3，-4)$，作L：$4x+3y=30$ 的垂直線L'：$3x-4y=25$，L與L'交點$Q(\dfrac{39}{5}，-\dfrac{2}{5})$

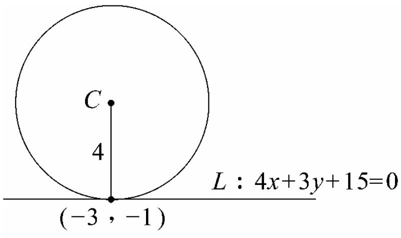
因 $\overline{AP}=5$，$\overline{AQ}=6$，設$P(a，b)$，則由分點公式得$(3，-4)=(\dfrac{6a+39}{5+6}，\dfrac{6b-2}{5+6})$

$\begin{cases}6a+39=33\\6b-2=-44\end{cases}\Rightarrow\ (a，b)=(-1，-7)$

10.若圓C與直線L：$4x+3y+15=0$ 相切於$(-3，-1)$，且圓半徑爲 4，圓心的x坐標爲正，則圓C的圓心爲__________。

【解答】$(\dfrac{1}{5}，\dfrac{7}{5})$

【詳解】設 $C(a，b)$，$a>0\ \Rightarrow\ \begin{cases}(a+3):(b+1)=4:3\\ \dfrac{|4a+3b+15|}{\sqrt{4^2+3^2}}=4\end{cases}\ \Rightarrow\ a=\dfrac{1}{5}，b=\dfrac{7}{5}$



11.一圓過圓$x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 與直線 $2x-y+4=0$ 的交點且半徑爲 3，此圓有兩個，其中圓心在第一象限的圓之方程式爲________________。

【解答】$(x-1)^2+(y-1)^2=9$

【詳解】

過圓$x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 與直線 $2x-y+4=0$ 交點的圓系方程式爲

$(x^2+y^2+2x-4y+1)+k(2x-y+4)=0\Rightarrow x^2+y^2+2(k+1)x-(k+4)y+4k+1=0\cdots\cdots$①

配方 $\Rightarrow\ (x+k+1)^2+(y-\dfrac{k+4}{2})^2=(k+1)^2+\dfrac{1}{4}(k+4)^2-(4k+1)=\dfrac{1}{4}(5k^2+16)$

半徑 3 $\Rightarrow\ \dfrac{1}{4}(5k^2+16)=9\ \Rightarrow\ k=\pm2$ 代入①

得$x^2+y^2+6x-6y+9=0$ 及$x^2+y^2-2x-2y-7=0$

圓心在第一象限者爲$x^2+y^2-2x-2y-7=0$，即$(x-1)^2+(y-1)^2=9$

12.若直線$y=2x+k$與圓C：$x^2+y^2+4x+2y-20=0$ 交於兩點，則k值之範圍爲__________。

【解答】$3-5\sqrt{5}<k<3+5\sqrt{5}$

【詳解】

$\begin{cases}C：x^2+y^2+4x+2y-20=0\cdots\cdots①\\L：y=2x+k\cdots\cdots②\end{cases}$

②代入① $\Rightarrow\ 5x^2+4(k+2)x+(k^2+2k-20)=0$

D：$16(k+2)^2-4\times5\times(k^2+2k-20)>0$（$\because$ 交於兩點）

$\Rightarrow\ k^2-6k-116<0\ \Rightarrow\ 3-5\sqrt{5}<k<3+5\sqrt{5}$

13.過$A(3,-1)$，$B(-1,5)$二點，且$\overline{AB}$之弦心距為$\sqrt{13}$之圓有二個，其中之一為$x^2+y^2+ax+by+6=0$，則數對$(a,b)=$__________。

【解答】$(-8,-8)$

【詳解】

$\overline{AB}$之中點$M(1,2)$，$\overrightarrow{AB}=(-4,6)=2(-2,3)$

圓心$O_1=(1,2)+\sqrt{13}\left(\dfrac{3}{\sqrt{13}},\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)=(4,4)$，

$O_2=(1,2)-\sqrt{13}\left(\dfrac{3}{\sqrt{13}},\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)=(-2,0)$

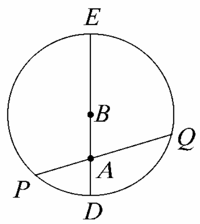
半徑$r^2=1+25=26$

$\Rightarrow$ C_1：$(x-4)^2+(y-4)^2=26$ $\Rightarrow$ $x^2+y^2-8x-8y+6=0$

C_2：$(x+2)^2+y^2=26$ $\Rightarrow$ $x^2+y^2+4x-22=0$，$\therefore$ $(a,b)=(-8,-8)$

14.過點$A(1,-1)$，作直線L與圓C：$x^2+y^2-2x+6y+1=0$交於P，Q兩點，則內積$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$之值為__________。

【解答】-5



【詳解】

圓C的圓心$(1,-3)$，半徑$r=3$，點A在圓C的內部

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overline{AP}\cdot\overline{AQ}\cos180°=-\overline{AP}\cdot\overline{AQ}=-\overline{AD}\cdot\overline{AE}$

$=-(\overline{AB}+r)(r-\overline{AB})=-(2+3)(3-2)=-5$

15.一圓的中心$(-2,1)$且和直線$3x-4y-5=0$相切，設此圓的方程式為$x^2+y^2+\ell x+my+n=0$，則$(\ell,m,n)=$__________。

【解答】$(4,-2,-4)$

【詳解】

圓心$(-2,1)$和直線$3x-4y-5=0$相切，則半徑$r=$圓心到直線的距離 $=\dfrac{|-6-4-5|}{\sqrt{9+16}}=3$

$\therefore$ 圓的方程式為$(x+2)^2+(y-1)^2=3^2$，即$x^2+y^2+4x-2y-4=0$，

$\therefore$ $(\ell,m,n)=(4,-2,-4)$

16.求與直線$x+2y-3=0$垂直且與圓$x^2+y^2-2x+2y+1=0$相切的直線方程式________。

【解答】$2x-y-3+\sqrt{5}=0$或$2x-y-3-\sqrt{5}=0$

【詳解】

(方法一)：

設切線方程式為$2x-y+k=0$

圓：$x^2+y^2-2x+2y+1=0$ $\Rightarrow$ $(x-1)^2+(y+1)^2=1$，圓心$(1,-1)$，半徑 $=1$

$\Rightarrow$ $\dfrac{|2-(-1)+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=1$ $\Rightarrow$ $|3+k|=\sqrt{5}$ $\Rightarrow$ $k=-3\pm\sqrt{5}$

$\therefore$ 切線方程式為$2x-y-3+\sqrt{5}=0$或$2x-y-3-\sqrt{5}=0$

(方法二)：公式法

直線$x+2y-3=0$ 斜率$m=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow$所求切線斜率$m=-2$

$y+1=2(x-1)\pm1\cdot\sqrt{2^2+1}\Rightarrow$切線方程式為 $2x-y-3+\sqrt{5}=0$ 或 $2x-y-3-\sqrt{5}=0$

17.設$k\in R$，已知點$P(-1，7)$在圓C：$x^2+y^2+kx+(k-2)y-12=0$上，則圓C過P點的切線方程式為__________。

【解答】$3x-4y+31=0$

【詳解】

點$P(-1，7)$在圓C：$x^2+y^2+kx+(k-2)y-12=0$上

$\Rightarrow\quad 1^2+7^2-k+7k-14-12=0\quad\Rightarrow\quad k=-4\quad\therefore\quad$ 圓C：$x^2+y^2-4x-6y-12=0$

代入切線方程式公式：$-x+7y-\dfrac{4}{2}(x-1)-\dfrac{6}{2}(y+7)-12=0$

$\Rightarrow\quad -x+7y-2x+2-3y-21-12=0\quad\Rightarrow\quad 3x-4y+31=0$

18.設$A(1，4)$與$B(3，-2)$為坐標平面上兩點，若$\overline{AB}$為圓C的一弦，且距離圓心為$\sqrt{10}$，求圓C的方程式：__________。（兩解）

【解答】$(x+1)^2+y^2=20$ 或$(x-5)^2+(y-2)^2=20$

【詳解】

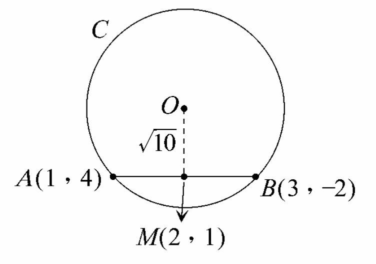
$\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(-2-4)^2}=2\sqrt{10}\quad\therefore\quad$ 圓C半徑 $=\sqrt{10+10}=\sqrt{20}$

設圓心$C'(a，b)$，$\overline{AB}$中點$M(2，1)$，$\overrightarrow{AB}=(2，-6)=2(1，-3)$，$\overrightarrow{C'M}=(a-2,1-b)$

$$\begin{cases}\overrightarrow{C'M}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \overline{C'M}=\sqrt{10}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-3b=-1\cdots\cdots①\\(a-2)^2+(b-1)^2=10\cdots\cdots②\end{cases}$$

①代入②得$b=0$或 2，代回①得$a=-1$或 5，故$(a，b)=(-1，0)$或$(5，2)$

$\therefore$ 圓C：$(x+1)^2+y^2=20$ 或$(x-5)^2+(y-2)^2=20$



19.求過$P(1，1)$且與圓$x^2+(y-3)^2=1$相切的直線方程式：__________。（兩解）

【解答】$x=1$ 或 $y-1=-\dfrac{3}{4}(x-1)$

【詳解】

$P(1，1)$代入圓方程式得 $1^2+(1-3)^2=5>1\quad\therefore\quad P$在圓外

設切線為$y-1=m(x-1)$，即$mx-y-m+1=0$

$\dfrac{|m\cdot0-3-m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1\quad\Rightarrow\quad m=-\dfrac{3}{4}\quad\Rightarrow\quad$ 切線$y-1=-\dfrac{3}{4}(x-1)$，另一無斜率，即$x=1$

20.坐標平面上，圓C過點$A(5，1)$，$B(-2，8)$，且與x軸相切，則圓C方程式為__________。

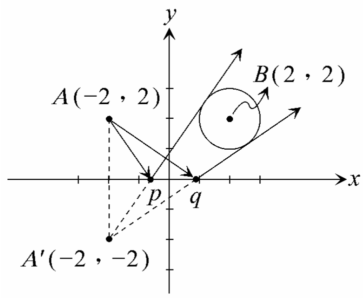
【解答】$(x-2)^2+(y-5)^2=25$ 或$(x-10)^2+(y-13)^2=169$

【詳解】∵　圓C與x軸相切，設圓心$P(\alpha，\beta)$，則半徑為 $|\beta|$

$\begin{cases}\overline{PA}^2=\beta^2\\ \overline{PB}^2=\beta^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(\alpha-5)^2+(\beta-1)^2=\beta^2\cdots\cdots①\\ (\alpha+2)^2+(\beta-8)^2=\beta^2\cdots\cdots②\end{cases}$，② − ①得$\alpha=\beta-3\cdots\cdots③$

③代入①得$\beta^2-18\beta+65=0 \Rightarrow (\beta-5)(\beta-13)=0$，$\beta=5$ 或 13，則$\alpha=2，10$

∴　圓C為$(x-2)^2+(y-5)^2=5^2$或$(x-10)^2+(y-13)^2=13^2$



21.從$A(-2，2)$發出之光線，照在鏡面（x軸）上最大區間$[p，q]$，反射光線皆與圓$x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 相交，求序對$(p，q)=$__________。

【解答】$(\frac{2-2\sqrt{31}}{15}，\frac{2+2\sqrt{31}}{15})$

【詳解】

圓$x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 之圓心$B(2，2)$，半徑$r=1$

由$A(-2，2)$射向x軸之反射光線必過$A'(-2，-2)$

設過$A'(-2，-2)$且與圓相切之切線L：$y+2=m(x+2)\cdots\cdots①$

則$d(B，L)=\frac{|4m-4|}{\sqrt{m^2+1}}=1 \Rightarrow 15m^2-32m+15=0 \Rightarrow m=\frac{16\pm\sqrt{31}}{15}$代入①

得$y+2=\frac{16\pm\sqrt{31}}{15}(x+2)\cdots\cdots②$，由②，令$y=0$，得$x=\frac{2\pm2\sqrt{31}}{15}$

即$p=\frac{2-2\sqrt{31}}{15}$，$q=\frac{2+2\sqrt{31}}{15}$，故序對$(p，q)=(\frac{2-2\sqrt{31}}{15}，\frac{2+2\sqrt{31}}{15})$

22.自點$P(8，1)$作圓C：$x^2+y^2-2x-4y-7=0$ 的切線，切點為A與B，則$\overleftrightarrow{AB}$ 方程式為____。

【解答】$7x-y=17$

【詳解】令$P(x_0，y_0)=P(8，1)$　∴　$x^2\to x_0x$，$x\to\frac{x_0+x}{2}$，$y^2\to y_0y$，$y\to\frac{y_0+y}{2}$代入

得 $8x+y-2(\frac{8+x}{2})-4(\frac{1+y}{2})-7=0 \Rightarrow 7x-y=17$

23.坐標平面上，圓C：$x^2+y^2+4x+2y-20=0$，圓外一點$P(2，-6)$，過P對圓C做切線，切點為A，B，則過P，A，B三點圓方程式為__________。

【解答】$x^2+y^2+7y+2=0$

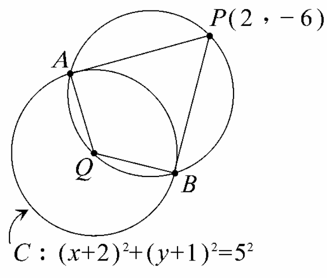
【詳解】

圓C：$(x+2)^2+(y+1)^2=5^2$，圓心$Q(-2，-1)$

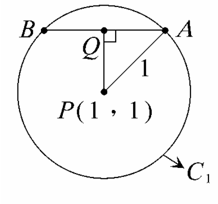
四邊形$PAQB$之對角互補（$\angle PAQ=\angle PBQ=90°$）

∴　過P，A，B三點之圓亦過Q點，即以$\overline{PQ}$為直徑之圓

$(x+2)(x-2)+(y+1)(y+6)=0 \Rightarrow x^2+y^2+7y+2=0$



24.兩圓C_1：$x^2+y^2-2x-2y+1=0$，C_2：$x^2+y^2+4x+4y-17=0$ 交A，B兩點，$\overline{AB}=$ ____ 。



【解答】$\sqrt{2}$

【詳解】

$\overleftrightarrow{AB}$：$C_1-C_2=0\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{AB}$：$x+y-3=0$，$\overline{PQ}=d(P，\overleftrightarrow{AB})=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 且 $\overline{AP}=1$

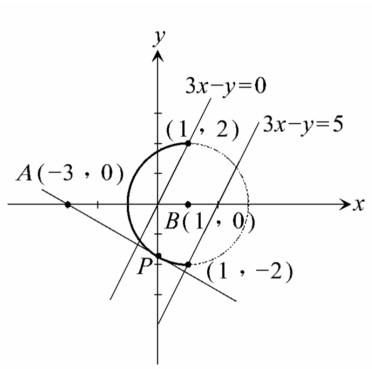
則 $\overline{AB}=2\overline{AQ}=2\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{PQ}^2}=\sqrt{2}$

25.已知$P(x，y)\in\Gamma$：$x=1-\sqrt{4-y^2}$，求(1) $3x-y$的max = ______ 。(2) $\dfrac{y}{x+3}$的min = ______ 。

【解答】(1) 5　(2) $\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$

【詳解】Γ：$x=1-\sqrt{4-y^2}$ $\Rightarrow$ $x-1=-\sqrt{4-y^2}$ $\Rightarrow$ $(x-1)^2+y^2=4$（$x\le 1$）

(1)圖形如右，當$(x，y)=(1，-2)$時，$3x-y=5$ 為最大值



(2)若$P(x，y)\in\Gamma$，$A(-3，0)$，則$\dfrac{y}{x+3}$表$\overleftrightarrow{PA}$之斜率m

由圖可知$\overleftrightarrow{PA}$與Γ 相切時，$\dfrac{y}{x+3}$有最小值

設$\overleftrightarrow{PA}$：$y-0=m(x+3)$ $\because$ 相切$\Rightarrow d(B，\overleftrightarrow{PA})=\dfrac{|m+3m|}{\sqrt{m^2+1}}=2$

$\Rightarrow|4m|=2\sqrt{m^2+1}$ $\Rightarrow\dfrac{-\sqrt{3}}{3}\le m\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故$\dfrac{y}{x+3}$之min $=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$

26.設$y=-3+\sqrt{4-(x-2)^2}$，則x^2+y^2的最大值為__________，最小值為__________。

【解答】25，$17-4\sqrt{13}$

【詳解】

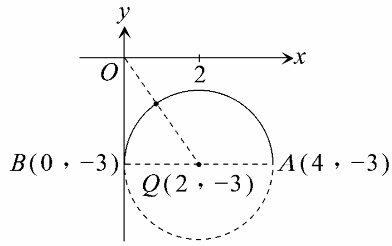
$y=-3+\sqrt{4-(x-2)^2}$ ……①，移項平方，$(y+3)^2=4-(x-2)^2$

$\Rightarrow$ $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ 為圓心$Q(2，-3)$，半徑 2 的圓

①式的圖形為此圓的一部分（上方半圓，因$y\ge-3$）。

如右圖，圓的直徑$\overline{AB}$，①的圖形為上方半圓（實線部分），

x^2+y^2表示圖形上的點$(x，y)$與原點O的距離平方



(1) x^2+y^2的最大值為$\overline{OA}^2=4^2+(-3)^2=25$

(2) x^2+y^2的最小值為$(\overline{OQ}-2)^2=(\sqrt{13}-2)^2=17-4\sqrt{13}$

27.設圓$x^2+y^2-2x-4y-3=0$ 與圓$x^2+y^2+4x-6y+3=0$ 交於A，B兩點，求以$\overline{AB}$為一弦且在y軸截弦長最小之圓方程式為__________。

【解答】$x^2+y^2+4x-6y+3=0$

【詳解】$\overleftrightarrow{AB}$：$C_1-C_2=0$ $\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{AB}$：$3x-y+3=0$，設所求圓C：$C_1+k\overleftrightarrow{AB}=0$

$\Rightarrow$ C：$(x^2+y^2-2x-4y-3)+k(3x-y+3)=0$……①

令$x = 0$ 代入① $\Rightarrow$ $y^2 - (k + 4)y + 3(k - 1) = 0$ 之二根爲α，β

其中α，β 表圓C與y軸相交之y坐標，且$\alpha + \beta = k + 4$，$\alpha\beta = 3k - 3$

截弦長之平方 $= (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (k + 4)^2 - 4(3k - 3) = (k - 2)^2 + 24$

當$k = 2$ 時，截弦長有最小值$\sqrt{24}$

此時圓C：$(x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3) + 2(3x - y + 3) = 0$，即$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$

28.兩圓C_1：$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12 = 0$ 與C_2：$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$

(1)求兩內公切線之交點坐標爲__________。

(2)求兩內公切線方程式爲__________。（有兩條）

【解答】(1) $(-1，1)$ (2) $y = 1$ 或 $4x + 3y + 1 = 0$

【詳解】

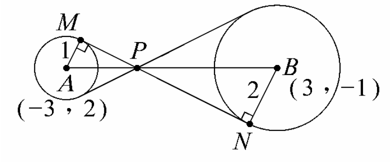
(1) C_1：$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$，圓心$A(-3，2)$，半徑$r_1 = 1$

C_2：$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$，圓心$B(3，-1)$，半徑$r_2 = 2$

設兩內公切線相交於P點，則$\triangle AMP \sim \triangle BNP \Rightarrow \overline{AP}:\overline{BP} = \overline{AM}:\overline{BN} = r_1 : r_2 = 1 : 2$

由內分點公式$P(x，y) = (\dfrac{(-3)\times 2 + 3\times 1}{1+2}，\dfrac{2\times 2 + (-1)\times 1}{1+2}) = (-1，1)$

(2)$\because$ 內公切線L過$P(-1，1)$ $\therefore$ 設L：$y - 1 = m(x + 1)$



$d(A，L) = \dfrac{|-3m - 2 + m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$

$\Rightarrow$ $3m^2 + 4m = 0$ $\Rightarrow$ $m = 0$ 或$m = \dfrac{-4}{3}$

故內公切線L分別爲$y - 1 = 0$ 或$y - 1 = \dfrac{-4}{3}(x + 1)$，即$y = 1$ 或 $4x + 3y + 1 = 0$

29.圓心在$x - 2y + 3 = 0$ 上且與兩坐標軸相切的圓方程式爲__________。

【解答】$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ 或$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

【詳解】

與兩坐標軸均相切之圓的圓心可設爲$(a，a)$或$(a，-a)$，半徑爲 $|a|$

(1)圓心$(a，a)$代入$x - 2y + 3 = 0 \Rightarrow a = 3$， $r = |a| = 3$，圓方程式$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

(2)圓心$(a，-a)$代入$x - 2y + 3 = 0 \Rightarrow a = -1$， $r = |a| = 1$，圓方程式$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

30.試求通過圓$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 與直線 $2x - y + 4 = 0$ 的交點，且切於x軸的圓方程式：__________。（兩解）

【解答】$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 或$x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$

【詳解】

設過圓與直線的圓爲$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 + \alpha(2x - y + 4) = 0$

即$(x + 1 + \alpha)^2 + (y - 2 - \dfrac{\alpha}{2})^2 = \dfrac{5}{4}\alpha^2 + 4$，圓心$O(-1 - \alpha，2 + \dfrac{\alpha}{2})$

$d(O，x軸) = |2 + \dfrac{\alpha}{2}|$ $\Rightarrow$ $(2 + \dfrac{\alpha}{2})^2 = \dfrac{5}{4}\alpha^2 + 4$ $\Rightarrow$ $\alpha = 0$ 或 2

$\therefore$ 因爲$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 或$x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$

31.一光線通過$(-4，5)$，經x軸反射後與圓：$(x-2)^2+(y-2)^2=5$ 相切，求原光線之方程式爲__________。

【解答】$2x+y+3=0$

【詳解】

設原光線通過$A(-4，5)$，經x軸反射，反射點$B(t，0)$

則$\overleftrightarrow{AB}$ ：$\dfrac{y-0}{x-t}=\dfrac{5-0}{-4-t}$ $\Rightarrow$ $y=\dfrac{-5}{4+t}x+\dfrac{5t}{4+t}$

反射後，入射角 = 反射角 $\therefore$ 切線斜率 $=-(\dfrac{-5}{4+t})=\dfrac{5}{4+t}$

又過$B(t，0)$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{BC}$：$y=\dfrac{5}{4+t}(x-t)$ $\Rightarrow y=\dfrac{5}{4+t}x-\dfrac{5t}{4+t}$ $\Rightarrow$ $5x-(4+t)y-5t=0$

與圓相切 $\therefore$ $\dfrac{|5\cdot 2-(4+t)\cdot 2-5t|}{\sqrt{5^2+(4+t)^2}}=\sqrt{5}$ $\Rightarrow$ $|2-7t|^2=5[25+(4+t)^2]$

$\Rightarrow$ $44t^2-68t-201=0$ $\Rightarrow$ $(2t+3)(22t-67)=0$ $\Rightarrow$ $t=-\dfrac{3}{2}$或$\dfrac{67}{22}$（不合）

$\therefore$ 原光線之方程式爲$y=\dfrac{-5}{\frac{5}{2}}x+\dfrac{5(-\frac{3}{2})}{\frac{5}{2}}$ $\Rightarrow$ $2x+y+3=0$