高雄市明誠中學 高二(上)平時測驗 日期：94.12.12					
範圍	4-1 圓方程式	班級	普二 班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. 有一圓通過$A(1，1)$，且與圓$C：x^2+y^2-4x-2y=0$ 有相同的圓心$(a，b)$，則
(A)圓心爲(1，2) (B)半徑爲$\sqrt{5}$ (C)圓方程式爲$(x-2)^2+(y-1)^2=5$ (D) $a+b=3$
(E)圓面積爲 5π

【解答】(D)

【詳解】$C：(x-2)^2+(y-1)^2=5 \Rightarrow$ 圓心$P(a，b)=(2，1)$，半徑$r=\overline{AP}=1$，故選(D)

2. (複選)設方程式$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 表示xy平面上的一個圓，則下列敘述何者正確？(A) $a=1$ (B) $b=0$ (C) c之值可爲 -2 (D) $a=c$ (E) $d^2+e^2-4af>0$

【解答】(B)(C)(D)(E)

【詳解】

(1) $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 表一圓 $\Rightarrow$ $b=0$，$a=c\neq 0$

(2) $ax^2+ay^2+dx+ey+f=0 \Rightarrow x^2+y^2+\frac{d}{a}x+\frac{e}{a}y+\frac{f}{a}=0$

$\Rightarrow (x+\frac{d}{2a})^2+(y+\frac{e}{2a})^2=\frac{d^2}{4a^2}+\frac{e^2}{4a^2}-\frac{f}{a}>0 \Rightarrow d^2+e^2-4af>0$

3. (複選)在xy平面上，下列各方程式之圖形何者表示一圓？
(A)$(x-1)^2+(y-1)^2=3$ (B) $x^2+y^2+2x+4y+5=0$ (C) $y=\sqrt{1-x^2}$
(D)$\begin{cases}x=1+2\sin\theta\\ y=2+2\cos\theta\end{cases}$，$\theta\in R$ (E)$(x-1)(x+1)+(y-2)(y-3)=0$

【解答】(A)(D)(E)

【詳解】

(A)$(x-1)^2+(y-1)^2=3$ 爲一圓

(B) $x^2+y^2+2x+4y+5=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y+2)^2=-5+1+4=0$ 爲一點$(-1，-2)$

(C) $y=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2=1-x^2 \Rightarrow x^2+y^2=1$，但 $1-x^2\geq 0$，故圖形爲圓之上半部

(D)$\begin{cases}x=1+2\sin\theta\\ y=2+2\cos\theta\end{cases} \Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=2^2$ 表一圓

(E)$(x-1)(x+1)+(y-2)(y-3)=0 \Rightarrow x^2-1+y^2-5y+6=0$

$\Rightarrow x^2+(y-\frac{5}{2})^2=-6+1+\frac{25}{4}=\frac{5}{4}$ 爲一圓

二、填充題(每題 10 分)

1. 圓心在$(-1，4)$，且通過$(2，0)$之圓的半徑爲r，則$r=$__________。

【解答】5

【詳解】設圓心 $A(-1，4)$，點 $P(2，0)$，則半徑 $r=\overline{AP}=5$

2. 圓 $3x^2+3y^2+9x-6y+1=0$ 的圓心坐標爲__________。

【解答】圓心$(-\dfrac{3}{2}，1)$

【詳解】$x^2+y^2+3x-2y+\dfrac{1}{3}=0 \quad\Rightarrow\quad (x+\dfrac{3}{2})^2+(y-1)^2=\dfrac{9}{4}+1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{35}{12}$，圓心$(-\dfrac{3}{2}，1)$

3. 坐標平面上，圓C過點$A(1，4)$與$B(0，3)$，圓心在x軸上，則圓C方程式爲__________。

【解答】$(x-4)^2+y^2=25$

【詳解】

設圓心P爲$(t，0)$，則$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2 \quad\Rightarrow\quad (t-1)^2+4^2=(t-0)^2+3^2 \quad\Rightarrow\quad t=4$

圓心$P(4，0)$，半徑$r^2=\overline{PB}^2=t^2+3^2=25 \quad\therefore\quad$ 圓C：$(x-4)^2+y^2=25$

4. 圓心在直線$y=x$上且通過原點及$(-2，4)$的圓方程式是__________。

【解答】$(x-5)^2+(y-5)^2=50$

【詳解】$\because$ 圓心A在直線$y=x$上 $\therefore$ 設圓心$A(t，t)$

而圓又過$P(-2，4)$及$O(0，0)$，故$\overline{AP}^2=\overline{AO}^2$

$(t+2)^2+(t-4)^2=(t-0)^2+(t-0)^2 \quad\Rightarrow\quad t=5$ 得圓心$A(5，5)$

而半徑$r=\overline{AO}=\sqrt{50} \quad\Rightarrow\quad$ 圓C之方程式爲$(x-5)^2+(y-5)^2=50$

5. 通過三點$(1，-1)$，$(0，2)$，$(2，-2)$三點的圓方程式是__________，其面積 $=$__________。

【解答】$x^2+y^2-10x-4y+4=0$，25π

【詳解】設圓C爲$x^2+y^2+dx+ey+f=0$

$$\begin{cases}(1，-1)\\(0，2)\\(2，-2)\end{cases}\text{三點代入圓}C \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}1+1+d-e+f=0\\0+4+0+2e+f=0\\4+4+2d-2e+f=0\end{cases}\text{得}\begin{cases}d=-10\\e=-4\\f=4\end{cases}$$

則C：$x^2+y^2-10x-4y+4=0 \quad\Rightarrow\quad (x-5)^2+(y-2)^2=25$，故圓面積 $=\pi r^2=25\pi$

6. 設$\triangle ABC$之三邊的直線方程式爲 $3x-y=0$，$x-2y=0$，$x-y+4=0$，若包含$\triangle ABC$之最小圓的方程式爲$x^2+y^2+dx+ey+f=0$，求數對$(d，e，f)=$__________。

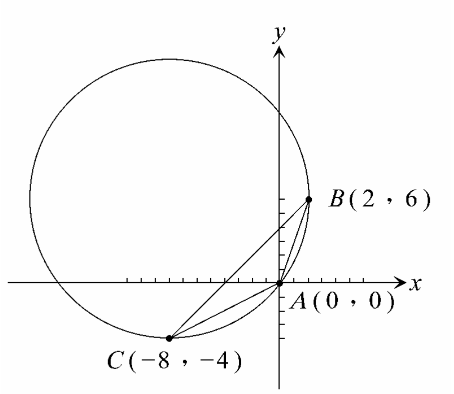
【解答】$(16，-12，0)$

【詳解】$\begin{cases}3x-y=0\cdots\cdots①\\x-2y=0\cdots\cdots②\\x-y+4=0\cdots\cdots③\end{cases}$，解①②得$A(0，0)$，解①③得$B(2，6)$，解②③得$C(-8，-4)$

設此三角形ABC的外接圓爲$x^2+y^2+dx+ey+f=0$

因過$A(0，0)$，$B(2，6)$，$C(-8，-4)$ $\therefore$ $\begin{cases}f=0\\2d+6e+f+40=0\\-8d-4e+f+80=0\end{cases}$

解之得$d=16$，$e=-12$，$f=0$，故$(d，e，f)=(16，-12，0)$



7. $A(1，2)$，$B(-3，0)$，

(1)求以 $\overline{AB}$ 爲直徑的圓 K 方程式，得____________________。（以 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 形式表之）

(2)若點 $P(x，y)$ 爲圓 K 上之動點，則 $x+2y+7$ 之最大値爲 M，最小値爲 m，得數對 $(M，m)=$__________。

【解答】(1) $x^2+y^2+2x-2y-3=0$　(2) $(13，3)$

【詳解】

(1)利用直徑式：$(x-1)(x+3)+(y-2)(y-0)=0$，得 $x^2+y^2+2x-2y-3=0$

(2) $P(x，y)\in$ 圓 K：$(x+1)^2+(y-1)^2=5$

利用柯西不等式：$[(x+1)^2+(y-1)^2](1^2+2^2)\geq[(x+1)+2(y-1)]^2$

$\Rightarrow\ 5\times5\geq(x+2y-1)^2\ \Rightarrow\ -5\leq x+2y-1\leq5\ \Rightarrow\ 3\leq x+2y+7\leq13$

得數對 $(M，m)=(13，3)$

8. 坐標平面上，圓 C 過點 $A(1，4)$ 與 $B(3，0)$，圓心在 y 軸上，則圓 C 方程式爲__________。

【解答】$x^2+(y-1)^2=10$

【詳解】

設圓心 $P(0，t)$，則 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2\ \Rightarrow\ 1+(t-4)^2=9+t^2$ 得 $t=1$，即圓心爲 $P(0，1)$

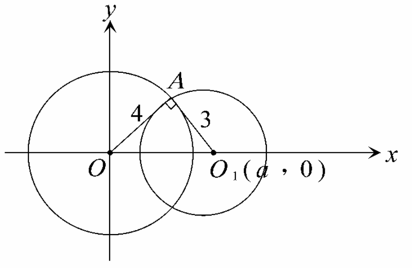
又半徑 $r=\overline{PA}=\sqrt{10}$，故圓 C：$x^2+(y-1)^2=10$

9. 一圓的圓心在 x 軸上，半徑 3 且與圓 $x^2+y^2=16$ 正交，則此圓的方程式爲__________。

【解答】$(x\pm5)^2+y^2=9$

【詳解】設所求圓的圓心 $O_1(a，0)$，兩圓一交點 A。兩圓正交，即 $\angle OAO_1=90°$

$\Rightarrow\ \overline{OO_1}^2=\overline{OA}^2+\overline{O_1A}^2\ \Rightarrow\ a^2=4^2+3^2=5^2\ \Rightarrow\ a=\pm5$，$(x\pm5)^2+y^2=3^2$ 爲所求



10.一圓與圓 $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ 同心，並且過點 $(-1，1)$，則此圓的方程式爲__________。

【解答】$x^2+y^2-4x+6y-12=0$

【詳解】與圓$x^2+y^2-4x+6y-3=0$同心的圓方程式可設爲$x^2+y^2-4x+6y+k=0$

過點$(-1，1)$，$(-1)^2+1^2+4+6+k=0 \Rightarrow k=-12$，所求爲$x^2+y^2-4x+6y-12=0$

11.圓心在直線$2x-3y-5=0$上且通過兩點$(6，0)$，$(5，3)$的圓的方程式爲＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(x-4)^2+(y-1)^2=5$

【詳解】設圓心$P(a，b)$，因圓心在直線$2x-3y-5=0$上，所以$2a-3b=5$⋯⋯①

又圓通過兩點$A(6，0)$，$B(5，3)$，所以$\overline{PA}=\overline{PB}$

故$(a-6)^2+b^2=(a-5)^2+(b-3)^2 \Rightarrow a-3b=1$⋯⋯②

解①，②得$a=4$，$b=1$，故圓心$P(4，1)$，半徑$r=\overline{PA}=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$

所求圓的方程式爲$(x-4)^2+(y-1)^2=5$

12.一圓C過點$(2，1)$且與兩坐標軸均相切，則圓C的方程式爲＿＿＿＿＿。（有二解）

【解答】$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 或 $(x-5)^2+(y-5)^2=25$

【詳解】圓C過第一象限的點$(2，1)$且與x軸，y軸均相切

$\Rightarrow$ 圓心必在第一象限內且與x軸，y軸等距

設圓心$(a，a)$，半徑a，則圓的方程式爲$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

過點$(2，1) \Rightarrow (2-a)^2+(1-a)^2=a^2 \Rightarrow a^2-6a+5=0 \Rightarrow a=1$ 或$a=5$

故圓的方程式爲$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 或 $(x-5)^2+(y-5)^2=25$

13.圓心在第一象限，通過$A(1，1)$和$B(2，2)$兩點且與x軸相切的圓方程式爲＿＿＿＿＿。

【解答】$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

【詳解】

圓心在第一象限，且與x軸相切，設圓心$(a，b)$，$a>0$，$b>0$，半徑 $=b$

$\therefore$ 圓方程式：$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$，過$(1，1)$，$(2，2)$

$$\Rightarrow \begin{cases}(1-a)^2+(1-b)^2=b^2\\(2-a)^2+(2-b)^2=b^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1-2a+a^2+1-2b=0 \cdots\cdots ①\\4-4a+a^2+4-4b=0 \cdots\cdots ②\end{cases}$$

①$\times 2-$②得$a^2-4=0 \quad \therefore \quad a=2$ 代入①得$b=1 \quad \therefore$ 圓方程式爲$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

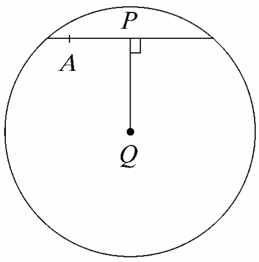
14.圓C：$(x-1)^2+(y+2)^2=16$過點$A(-2，-1)$的所有弦之中點軌跡方程式爲＿＿＿＿＿。

【解答】$x^2+y^2+x+3y=0$

【詳解】圓C的圓心爲$Q(1，-2)$，而點A在圓C的內部

$\therefore \quad P(x，y)$在軌跡上 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{QP}=0 \Leftrightarrow (x+2，y+1)\cdot(x-1，y+2)=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-1)+(y+1)(y+2)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+x+3y=0$



15.在平面上，$A(3，-2)$，$B(2，1)$，設P為圓$C：x^2+y^2=4$ 上的動點，則△ABP之重心所成的圖形為何？

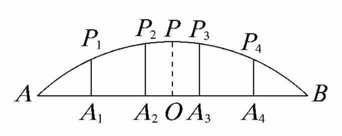
【解答】圖形為圓

【詳解】設$P(\alpha，\beta)\in$圓$C：x^2+y^2=4$，則$\alpha^2+\beta^2=4$……①

△ABP之重心G：$\begin{cases} x=\dfrac{(3+2+\alpha)}{3} \\ y=\dfrac{(-2+1+\beta)}{3} \end{cases}$，反而解得$\begin{cases} \alpha=3x-5 \\ \beta=3y+1 \end{cases}$……②

②代入①　$\Rightarrow$　$(3x-5)^2+(3y+1)^2=4$，即$(x-\dfrac{5}{3})^2+(y+\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{4}{9}$，圖形為圓

16.如圖所示，有一圓拱橋，其中一孔圓拱的寬度$\overline{AB}=30$ 公尺，拱高$\overline{OP}=5$ 公尺，建造時每隔 6 公尺須用一根支柱支撐，求支柱$\overline{A_2P_2}$的長度為多少公尺？________________公尺（$\sqrt{616}\approx 24.8$，答案可取近似值到小數第一位）



【解答】4.8

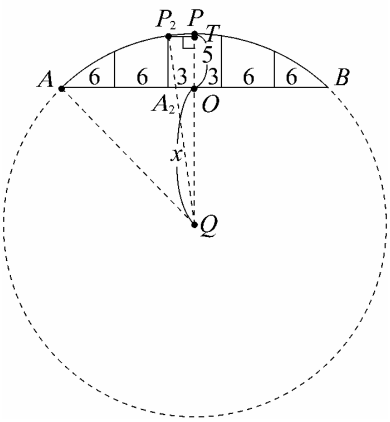
【詳解】令圓半徑為$r=5+x$

由直角△AOQ　$\Rightarrow$　$(5+x)^2=15^2+x^2$　$\Rightarrow$　$x=20$，半徑$r=5+20=25$

由P_2作$\overline{OP}$之垂直線，垂足點為T

由直角△P_2TQ　$\Rightarrow$　$\overline{QT}=\sqrt{\overline{QP_2}^2-\overline{P_2T}^2}=\sqrt{25^2-3^2}=\sqrt{616}$

則$\overline{A_2P_2}=\overline{OR}=\overline{QT}-x=\sqrt{616}-20$ ≒ $24.8-20$ ≒ 4.8



17.已知三圓$C_1：x^2+y^2+2ax+12y+10a+8=0$，$C_2：x^2+y^2-2x-a^2+2a=0$，$C_3：x^2+y^2-22x-6ay+8a^2-25a+36=0$ 的圓心共線，求a之值____________。

【解答】$a=4$ 或 -5

【詳解】

$C_1：(x+a)^2+(y+6)^2=a^2-10a+28$，圓心$O_1(-a，-6)$

$C_2：(x-1)^2+y^2=a^2-2a+1$，圓心$O_2(1，0)$，

$C_3：(x-11)^2+(y-3a)^2=a^2+19a+85$，圓心$O_3(11，3a)$

O_1，O_2，O_3共線 $\Rightarrow$ $\dfrac{6}{1+a}=\dfrac{3a}{10}$ $\Rightarrow$ $3a(1+a)=60$ $\Rightarrow$ $a^2+a-20=0$

$\Rightarrow$ $(a-4)(a+5)=0$ $\Rightarrow$ $a=4$ 或 -5

18.在xy平面上$A(1，2)$，$B(-3，0)$，若點$P(x，y)$在以$\overline{AB}$爲直徑的圓上移動，則 $2x+y-1$ 的最大值爲__________。

【解答】3

【詳解】以A，B爲直徑之圓C：$(x-1)(x+3)+(y-2)(y-0)=0$

即$P(x，y)\in C$：$(x+1)^2+(y-1)^2=5$

利用柯西不等式：$[(x+1)^2+(y-1)^2](2^2+1^2)\ge[2(x+1)+(y-1)]^2 \Rightarrow 5\times5\ge(2x+y+1)^2$

$\Rightarrow$ $-5\le(2x+y+1)\le5$ $\Rightarrow$ $-7\le(2x+y-1)\le3$ $\therefore$ 最大值爲 3

19.坐標平面上，點$A(2，4)$與$B(-6，10)$，則以$\overline{AB}$爲直徑的圓方程式爲__________。（以參數式表示之）

【解答】$\begin{cases} x=-2+5\cos\theta \\ y=7+5\sin\theta \end{cases}$

【詳解】圓心$(h，k)$爲 A，B 之中點$\begin{cases} h=\dfrac{2+(-6)}{2}=-2 \\ k=\dfrac{(4+10)}{2}=7 \end{cases}$，半徑 $r=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=5$

$\therefore$ 圓之參數式爲$\begin{cases} x=h+r\cos\theta \\ y=k+r\sin\theta \end{cases}$，即$\begin{cases} x=-2+5\cos\theta \\ y=7+5\sin\theta \end{cases}$

20. 設$P(x，y)$爲圓$x^2+y^2-2y-15=0$ 上的點，則 $2x-y+5$ 的最大值爲__________。

【解答】$4\sqrt{5}+4$

【詳解】

圓C：$x^2+y^2-2y-15=0$ $\Rightarrow$ $x^2+(y-1)^2=16$，則$P(x，y)=(4\cos\theta，1+4\sin\theta)$

$\Rightarrow 2x-y+5=8\cos\theta-1-4\sin\theta+5=8\cos\theta-4\sin\theta+4=4\sqrt{5}(\dfrac{8}{4\sqrt{5}}\cos\theta-\dfrac{4}{4\sqrt{5}}\sin\theta)+4$

$=4\sqrt{5}\sin(\phi-\theta)+4$，其中$\sin\phi=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\phi=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ 當$\sin(\phi-\theta)=1$ 時，$2x-y+5$ 有最大值 $=4\sqrt{5}+4$

21. 若P爲$x^2+(y-1)^2=4$ 上的任一點，令O爲原點，Q爲$(3，-4)$，則$\triangle POQ$面積的最大值爲__________。

【解答】$\dfrac{13}{2}$

【詳解】

因爲P爲$x^2+(y-1)^2=4$ 上的任一點，故可設$P(x，y)=(2\cos\theta，1+2\sin\theta)$，$\theta\in R$

$\because$ $\overrightarrow{OP}=(2\cos\theta，1+2\sin\theta)$，$\overrightarrow{OQ}=(3，-4)$

$\therefore \triangle POQ$面積 $=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1+2\sin\theta \\ 3 & -4 \end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}|(-8\cos\theta-3-6\sin\theta)|=|-4\cos\theta-3\sin\theta-\dfrac{3}{2}|$

$=|-5(\dfrac{4}{5}\cos\theta+\dfrac{3}{5}\sin\theta)-\dfrac{3}{2}|=|-5(\sin\phi\cos\theta+\cos\phi\sin\theta)-\dfrac{3}{2}|$（$\sin\phi=\dfrac{4}{5}$ ，$\cos\phi=\dfrac{3}{5}$）

$=|-5\sin(\theta+\phi)-\dfrac{3}{2}|$，故當$\sin(\theta+\phi)=1$時，$\triangle POQ$面積的最大值為$\dfrac{13}{2}$