高雄市明誠中學 高二(上)平時測驗 日期：94.11.28					
範圍	3-2 行列式	班級	普二 班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. (複選)設 a，b，c 表△ABC 三邊長，若$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=0$，則△$ABC$ 為

(A)等腰三角形 (B)銳角三角形 (C)直角三角形 (D)正三角形 (E)鈍角三角形

【解答】(A)(B)(D)

【詳解】

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad a^3+b^3+c^3-3abc=0 \quad\Rightarrow\quad (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0$$

$\because$ a，b，c表△ABC的三邊長 $\therefore$ $a+b+c>0$

$\therefore$ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ $\Rightarrow$ $a=b=c$ $\Rightarrow$△ABC為正三角形，故選(A)(B)(D)

2. (複選)試問下列行列式，其值何者為 0？

(A)$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ (B)$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$ (C)$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (D)$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$

(E)$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$，$a\neq b\neq c\neq a$

【解答】(B)(D)

【詳解】

(A)錯。$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=12$

(B)對。$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} \overset{\times 1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix}=0$

（第一，三列成比例）

(C)錯。$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-4$

(D)對。$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \times 1 \\ \times 1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$

(E)錯。$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$（$\because \quad a \neq b \neq c \neq a$）

二、填充題(每題 10 分)

1. 試求$\begin{vmatrix} 12 & 108 & 72 \\ 16 & 64 & 0 \\ 52 & 0 & 13 \end{vmatrix}$之値爲__________。

【解答】-252096

【詳解】原式 $= 12 \times 16 \times 13 \times \begin{vmatrix} 1 & 9 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12 \times 16 \times 13 \times (-101) = -252096$

2. 設三平面分別爲E_1：$3x+5y-z=-1$，E_2：$x-y+4z=11$，E_3：$x+7y-9z=-23$，求三平面共同的交點______________________。

【解答】$\begin{cases} x = \dfrac{-19t+7}{13} \\ y = t \\ z = \dfrac{8t+34}{13} \end{cases}$，$t \in R$

【詳解】$\begin{cases} E_1: 3x+5y-z=-1 & \cdots\cdots ① \\ E_2: x-y+4z=11 & \cdots\cdots ② \\ E_3: x+7y-9z=-23 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

由① − ② × 3 得 $8y-13z=-34$……④，由③ − ②得 $8y-13z=-34$……⑤

由④，⑤知有無限多組解，其解爲$\begin{cases} x = 2+19t \\ y = -1-13t \quad , t \in R \\ z = 2-8t \end{cases}$

3. 已知$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$，行列式$\begin{vmatrix} 2a-3b & 3b-4c & 5c \\ 2d-3e & 3e-4f & 5f \\ 2g-3h & 3h-4i & 5i \end{vmatrix}$的值 $=$__________。

【解答】90

【詳解】

$$
\text{原式}=5\begin{vmatrix}2a-3b & 3b-4c & c\\ 2d-3e & 3e-4f & f\\ 2g-3h & 3h-4i & i\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}2a-3b & 3b & c\\ 2d-3e & 3e & f\\ 2g-3h & 3h & i\end{vmatrix}
$$

$$
=5\begin{vmatrix}2a & 3b & c\\ 2d & 3e & f\\ 2g & 3h & i\end{vmatrix}=5\times2\times3\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}=(5\times2\times3)\times3=90
$$

4. 利用克拉瑪公式解方程組$\begin{cases}21x+22y+27z=50\\ 22x+23y+28z=51\\ 23x+24y+25z=52\end{cases}$，則$(x，y，z)=$__________。

【解答】$(-28，29，0)$

【詳解】

$$
\triangle=\begin{vmatrix}21 & 22 & 27\\ 22 & 23 & 28\\ 23 & 24 & 25\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-1)\\ \times(-1)\end{matrix}=\begin{vmatrix}21 & 22 & 27\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -2\end{vmatrix}=4
$$

$$
\triangle_x=\begin{vmatrix}50 & 22 & 27\\ 51 & 23 & 28\\ 52 & 24 & 25\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-1)\\ \times(-1)\end{matrix}=\begin{vmatrix}50 & 22 & 27\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -2\end{vmatrix}=-112
$$

$$
\triangle_y=\begin{vmatrix}21 & 50 & 27\\ 22 & 51 & 28\\ 23 & 52 & 25\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-1)\\ \times(-1)\end{matrix}=\begin{vmatrix}21 & 50 & 27\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}21 & 29 & 6\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{vmatrix}=116
$$

$$
\triangle_z=\begin{vmatrix}21 & 22 & 50\\ 22 & 23 & 51\\ 23 & 24 & 52\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-1)\\ \times(-1)\end{matrix}=\begin{vmatrix}21 & 22 & 50\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=0
$$

$$
\begin{cases}x=\dfrac{\triangle_x}{\triangle}=\dfrac{-112}{4}=-28\\ y=\dfrac{\triangle_y}{\triangle}=\dfrac{116}{4}=29\\ z=\dfrac{\triangle_z}{\triangle}=\dfrac{0}{4}=0\end{cases}\quad\therefore\ (x，y，z)=(-28，29，0)
$$

5. 設方程組$\begin{cases}3x+4y+5z=kx\\ 3x+4y+5z=ky\\ 3x+4y+5z=kz\end{cases}$恰有一解，則$k$值有何限制？__________。

【解答】$k\neq0$，12

【詳解】原式 $\Rightarrow$ $\begin{cases}(3-k)x+4y+5z=0\\ 3x+(4-k)y+5z=0\\ 3x+4y+(5-k)z=0\end{cases}$ 為齊次方程組恰有一解$\Rightarrow$ $\triangle\neq0$

$$\triangle=\begin{vmatrix}3-k&4&5\\3&4-k&5\\3&4&5-k\end{vmatrix}=(12-k)\begin{vmatrix}1&4&5\\1&4-k&5\\1&4&5-k\end{vmatrix}=(12-k)\begin{vmatrix}1&4&5\\0&-k&0\\0&0&-k\end{vmatrix}$$

$(\times 1)$ $(\times 1)$

$$=(12-k)\begin{vmatrix}-k&0\\0&-k\end{vmatrix}=(12-k)\cdot k^2\neq 0\text{，即}k\neq 0\text{，}12$$

6. 設方程組$\begin{cases}2x+2ay+2a^2z=0\\2x+8y+32z=0\\2x+34y+578z=0\end{cases}$ 有無限多解，則$a=$__________。

【解答】4，17

【詳解】

齊次方程組有無限多解，則$\triangle=0$

$$\triangle=\begin{vmatrix}2&2a&2a^2\\2&8&32\\2&34&578\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&4&4^2\\1&17&17^2\end{vmatrix}=8(a-4)(4-17)(17-a)=0\quad\Rightarrow\quad a=4\text{，}17$$

7. 求$\begin{vmatrix}1^2&2^2&3^2\\4^2&5^2&6^2\\7^2&8^2&9^2\end{vmatrix}$之值為__________。

【解答】-216

【詳解】

$\times(-1)$ $\times(-1)$ $\times(-1)$

$$\begin{vmatrix}1^2&2^2&3^2\\4^2&5^2&6^2\\7^2&8^2&9^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1^2&2^2&5\\4^2&5^2&11\\7^2&8^2&17\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&5\\16&9&11\\49&15&17\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&2\\16&9&2\\49&15&2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}9&2\\15&2\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}16&2\\49&2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}16&9\\49&15\end{vmatrix}=(18-30)-3(32-98)+2(240-441)=-216$$

8. 行列式$\begin{vmatrix}42&42&84\\35&36&37\\42&44&48\end{vmatrix}=$__________。

【解答】1260

【詳解】

$\times(-1)$ $\times(-1)$

$$\begin{vmatrix}42&42&84\\35&36&37\\42&44&48\end{vmatrix}\times(-1)=\begin{vmatrix}0&-2&36\\35&36&37\\42&44&48\end{vmatrix}\times(-1)=\begin{vmatrix}0&-2&36\\35&36&37\\7&8&11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-2&36\\35&1&2\\7&1&4\end{vmatrix}=1260$$

9. 已知空間中四平面E_1：$x-2y+3z=5$，E_2：$2x+y-3z=-3$，E_3：$3x+y+2z=8$，

E_4：$x+3y+4z=k$恰有一交點，則$k=$__________。

【解答】12

【詳解】三平面$\begin{cases} E_1：x-2y+3z=5 \\ E_2：2x+y-3z=-3 \\ E_3：3x+y+2z=8 \end{cases}$解之，交點(1，1，2)

又四平面交於一點　∴　(1，1，2) $\in E_4$　代入$\Rightarrow$　$1+3+8=k$　$\Rightarrow$　$k=12$

10.空間中四點A(1，1，1)，B(1，2，– 7)，C(3，4，5)，D(4，5，– 7)，則四面體$ABCD$之體積爲__________。

【解答】6

【詳解】$\overrightarrow{AB}=(0，1，-8)$，$\overrightarrow{AC}=(2，3，4)$，$\overrightarrow{AD}=(3，4，-8)$

四面體 $ABCD$ 之體積 $=\dfrac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 0 & 1 & -8 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -8 \end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{6}|36|=6$

11.若$a\in R$且方程組$\begin{cases} (1-a)x+3y+3=0 \\ x+(3-a)y+3=0 \\ x+3y+(3-a)=0 \end{cases}$恰有一解，則$a$之值=__________。

【解答】7

【詳解】方程組恰有一解　$\Rightarrow$　平面上三直線共點

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-a & 3 & 3 \\ 1 & 3-a & 3 \\ 1 & 3 & 3-a \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad a^2(7-a)=0 \quad\Rightarrow\quad a=0，7$

但當$a=0$時　$\Rightarrow$　三直線重合　$\Rightarrow$　無限多解，不合

12.設k爲一正數，若A(3，2，2)，B(5，$k-1$，1)，C(1，1，0)，D(– 1，k^2+2，1)四點共平面，則k爲__________。

【解答】1

【詳解】A，B，C，D四點共平面，則$\overrightarrow{AB}=(2，k-3，-1)$，$\overrightarrow{AC}=(-2，-1，-2)$，$\overrightarrow{AD}=(-4，k^2，-1)$；三向量所張之平行六面體體積爲 0

即$\begin{vmatrix} 2 & k-3 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & k^2 & -1 \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad k^2+k-2=0 \quad\Rightarrow\quad k=1，-2$（不合，因$k>0$）

13.設 $0\le x\le 2\pi$，解$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4} \\ 1 & \sin x & \sin^2 x \end{vmatrix}=0$，則$x=$__________。

【解答】$\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5\pi}{6}$，$\dfrac{3\pi}{2}$

【詳解】$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \sin x & \sin^2 x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & (-1) & (-1)^2 \\ 1 & \frac{1}{2} & (\frac{1}{2})^2 \\ 1 & \sin x & \sin^2 x \end{vmatrix} = [(-1)-\frac{1}{2}](\frac{1}{2}-\sin x)[\sin x-(-1)]=0$

$\Rightarrow$ $\sin x=\dfrac{1}{2}$ 或 $\sin x=-1$ 且 $0\le x\le 2\pi$，則 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{5\pi}{6}$ 或 $\dfrac{3\pi}{2}$

14.若三平面 $kx+5y+z=0$，$x-ky-z=-2k$，$2x+ky-z=-3$ 相交於一直線，則 $k=$______。

【解答】1

【詳解】$\triangle = \begin{vmatrix} k & 5 & 1 \\ 1 & -k & -1 \\ 2 & k & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2k^2+3k-5=0 \Rightarrow k=1，\dfrac{-5}{2}$

$\triangle_x = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -2k & -k & -1 \\ -3 & k & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2k^2+13k-15=0 \Rightarrow k=1，\dfrac{-15}{2}$

三平面相交於一直線即無限多解 $\Rightarrow$ $\triangle=\triangle_x=\triangle_y=\triangle_z=0$，故 $k=1$

15.不等式 $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 5 & 25 & 1 \\ -3 & 9 & 1 \end{vmatrix} < 0$ 的解爲__________。

【解答】$x>5$ 或 $x<-3$

【詳解】令 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 5 & 25 & 1 \\ -3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 5 & 5^2 \\ 1 & -3 & 3^2 \end{vmatrix} = (x-5)(5+3)(-3-x)$

$\therefore$ $f(x)<0 \Leftrightarrow -8(x-5)(x+3)<0 \Leftrightarrow (x-5)(x+3)>0 \Leftrightarrow x>5$ 或 $x<-3$

16.設方程式 $x^3+2x-1=0$ 之三根爲 a，b，c，則 $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & ab & ac \\ ba & (c+a)^2 & bc \\ ca & cb & (a+b)^2 \end{vmatrix} =$__________。

【解答】0

【詳解】a，b，c 爲 $x^3+2x-1=0$ 之三根，

則 $a+b+c=0$，$abc=-1$，且 $a+b=-c,\quad b+c=-a,\quad c+a=-b$

$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & ab & ca \\ ab & (c+a)^2 & bc \\ ca & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}$（第一、二、三行分別提出 a，b，c）

$$= abc\begin{vmatrix} \frac{(b+c)^2}{a} & a & a \\ b & \frac{(c+a)^2}{b} & b \\ c & c & \frac{(a+b)^2}{c} \end{vmatrix}$$（第一、二、三列分別再提出a，b，c）

$$= a^2b^2c^2\begin{vmatrix} (\frac{b+c}{a})^2 & 1 & 1 \\ 1 & (\frac{c+a}{b})^2 & 1 \\ 1 & 1 & (\frac{a+b}{c})^2 \end{vmatrix} = (-1)^2\begin{vmatrix} (-1)^2 & 1 & 1 \\ 1 & (-1)^2 & 1 \\ 1 & 1 & (-1)^2 \end{vmatrix} = 0$$

17.平面上三相異直線L_1：$3x-8y=t-4$，L_2：$-2x+(t+3)y=4$，L_3：$x+(1-t)y=-2$ 相交於一點，求t值 ＝__________。

【解答】-2

【詳解】三直線共點 $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} 3 & -8 & t-4 \\ -2 & t+3 & 4 \\ 1 & 1-t & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ $-6(t+3)-32-2(t-4)(1-t)-(t-4)(t+3)+32-12(1-t)=0$

$\Rightarrow$ $t^2-3t-10=0$ $\Rightarrow$ $(t+2)(t-5)=0$ $\Rightarrow$ $t=5$ 或$t=-2$

①當$t=5$ 時，三直線爲$\begin{cases} L_1: 3x-8y=1 \\ L_2: -2x+8y=4 \\ L_3: x-4y=-2 \end{cases}$，但$L_2$與$L_3$重合，故不合

②當$t=-2$ 時，三直線爲$\begin{cases} L_1: 3x-8y=-6 \\ L_2: -2x+y=4 \\ L_3: x+3y=-2 \end{cases}$ 均相異，故$t=-2$

18.若方程組$\begin{cases} 2kx+y+z=k-\frac{3}{2} \\ x+2ky+z=-1 \\ x+y+2kz=-1 \end{cases}$（$k$爲常數），

(1)無解時，$k=$__________。 (2)無限多組解時，$k=$__________。

【解答】(1) $k=-1$ (2) $k=\frac{1}{2}$

【詳解】$\begin{cases} 2kx+y+z=k-\frac{3}{2} \\ x+2ky+z=-1 \\ x+y+2kz=-1 \end{cases}$ 無解或無限多解時，必$\triangle = \begin{vmatrix} 2k & 1 & 1 \\ 1 & 2k & 1 \\ 1 & 1 & 2k \end{vmatrix} = 0$

$\therefore$ $8k^3+1+1-2k-2k-2k=0$ $\Rightarrow$ $4k^3-3k+1=0$

$\Rightarrow$ $(k+1)(2k-1)^2=0$ $\Rightarrow$ $k=-1$，$\frac{1}{2}$

(1) $k=-1$ 時，原式 $\begin{cases} -2x+y+z=-\dfrac{5}{2} & \cdots\cdots① \\ x-2y+z=-1 & \cdots\cdots② \\ x+y-2z=-1 & \cdots\cdots③ \end{cases}$

② − ①得 $3x-3y=\dfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x-y=\dfrac{1}{2}\cdots\cdots④$

② × 2 + ③得 $3x-3y=-3 \quad \Rightarrow \quad x-y=-1\cdots\cdots⑤$

④、⑤矛盾，無解，即原方程組無解

(2) $k=\dfrac{1}{2}$ 時，原式為 $\begin{cases} x+y+z=-1 \\ x+y+z=-1 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$，即 $x+y+z=-1$，有無限多解

19.設 k 為一正數，且方程組 $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 3x-ky+5z=0 \\ kx+3y+2z=0 \end{cases}$ 有異於(0，0，0)之解，試求：

(1) $k=$？ (2) $x^2+y^2+z^2-8x+2z+2$ 之最小值為何？

【解答】(1) $k=7$ (2) -4

【詳解】

(1)齊次方程組有異於(0，0，0)之解，則

$$\triangle=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -k & 5 \\ k & 3 & 2 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad k^2-7k=0 \quad \Rightarrow \quad k=7 \text{ 或 } 0\text{（不合）}$$

(2) $k=7$ 時，方程組之解表三相異平面交於一直線 L

而 L：$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 3x-7y+5z=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad L$：$\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=-2t \end{cases}$，$t\in R$

$x^2+y^2+z^2-8x+2z+2=t^2+t^2+4t^2-8t-4t+2=6t^2-12t+2=6(t-1)^2-4$

當 $t=1$ 時，有最小值為 -4

20.設 x，y，$a\in R$，若 $|3x-2y+9a|+|4x+y+5a+3|+|5x+4y+4a|=0$ 有解，則 a 之值為何？

【解答】2

【詳解】原式有解，表示 $\begin{cases} 3x-2y+9a=0 \\ 4x+y+5a+3=0 \\ 5x+4y+4a=0 \end{cases}$ 有解，即相異三直線交於一點

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 3 & -2 & 9a \\ 4 & 1 & 5a+3 \\ 5 & 4 & 4a \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad 33a-66=0\text{，得 } a=2$$