

高雄市明誠中學 高二(上)平時測驗					日期：94.11.14
範圍	3-1,3 克拉瑪公式	班級	普二 班	姓	
		座號		名	

一、選擇題(每題 10 分)

1. 若方程組  $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$  之解為  $(4, -1)$ ，則方程組  $\begin{cases} 2a_1x + 3b_1y = c_1 \\ 2a_2x + 3b_2y = c_2 \end{cases}$  之解  $(x, y)$  為  
 (A)  $(2, -\frac{1}{3})$  (B)  $(2, 3)$  (C)  $(2, -3)$  (D)  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$  (E)  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$

【解答】(A)

【詳解】

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Rightarrow \text{解為}(4, -1)\dots\dots\textcircled{1}$$

$$\begin{cases} 2a_1x + 3b_1y = c_1 \\ 2a_2x + 3b_2y = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(2x) + b_1(3y) = c_1 \\ a_2(2x) + b_2(3y) = c_2 \end{cases} \dots\dots\textcircled{2}$$

比較①，②得  $\begin{cases} 2x = 4 \\ 3y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$

2. (複選)若方程組  $\begin{cases} x + 2y = ax \\ 6x + 2y = ay \end{cases}$  有  $x < 0, y > 0$  的解，則

- (A)  $a$  為任意數 (B)  $a$  恰有一解，且  $a = 5$  (C)  $a$  恰有一解，且  $a = -2$   
 (D)  $a$  恰有兩解，且  $a = 5$  或  $a = -2$  (E)  $a$  恰有兩解，且  $a = -5$  或  $a = 2$

【解答】(C)

【詳解】

原式  $\Rightarrow \begin{cases} (1-a)x + 2y = 0 \\ 6x + (2-a)y = 0 \end{cases}$  齊次方程組有  $(0, 0)$  以外之解

則  $\begin{vmatrix} 1-a & 2 \\ 6 & 2-a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = -2$  或  $a = 5$  (不合  $\because a = 5$  時， $x, y$  同號)

故應選(A)(B)(D)

3. (複選)方程組(L)  $\begin{cases} x - 4y + 2z = 0 \\ -2x + 4y + 3z = 1 \\ -3x + 8y + z = 2 \end{cases}$  中，各方程式分別表平面  $E_1, E_2, E_3$ ，則下列何者正確？

- (A) (L)恰有一組解 (B) (L)無限多解 (C) (L)無解 (D)三平面共線  
 (E)  $E_1, E_2, E_3$  兩兩相交於一線且三線不共點

【解答】(C)(E)

【詳解】

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0, \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -20 \neq 0, \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ -3 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

∴ 方程組無解，又  $E_1, E_2, E_3$  係數均不成比例 ⇒ 三平面兩兩相交於一線且三線不共點

## 二、填充題(每題 10 分)

1. 解方程組  $\begin{cases} \frac{1}{2x} - \frac{4}{3y} = 5 \\ \frac{4}{x} + \frac{1}{y} = 5 \end{cases}$ ，得  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】  $\frac{1}{2}$

【詳解】 令  $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v = \frac{1}{y} \end{cases}$ ，則原式可表為  $\begin{cases} \frac{1}{2}u - \frac{4}{3}v = 5 \\ 4u + v = 5 \end{cases}$ ，得  $\begin{cases} u = 2 \\ v = -3 \end{cases}$ ，即  $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$

2. 若  $\begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{1}{y} = 4 \\ ax + by = 4 \end{cases}$  與  $\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{2}{y} = -1 \\ 3ax - 4by = 26 \end{cases}$  均有解且為同義方程組，求數對  $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】  $(3, 4)$

【詳解】

解  $\begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{6}{x} + \frac{2}{y} = -1 \end{cases}$  得  $\begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$  代入  $\begin{cases} ax + by = 4 \\ 3ax - 4by = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - \frac{1}{2}b = 4 \\ 6a + 2b = 26 \end{cases}$  得  $\begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases}$

3. 若方程組  $\begin{cases} 2kx + y = 2k + 1 \\ 2x + ky = 3k \end{cases}$  不只一組解，則  $k$  之值為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】 1

【詳解】

不只一組解，即無限多解，則  $\frac{2k}{2} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{k} \stackrel{\textcircled{2}}{=} \frac{2k+1}{3k}$ ，由  $\textcircled{1}$  得  $k = 1, -1$  (代入  $\textcircled{2}$  不合)

4. 若  $k \in R$  且方程組  $\begin{cases} 2x + 5y = kx \\ 3x + 4y = ky \end{cases}$ ，

(1) 若方程組除了  $(0, 0)$  外，還有其他解，則  $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 若方程組有  $x > 0, y > 0$  之解，則  $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】 (1)  $-1, 7$  (2) 7

【詳解】

$$\text{方程組} \begin{cases} (2-k)x+5y=0 \\ 3x+(4-k)y=0 \end{cases}$$

$$(1) \text{若方程組除了}(0, 0)\text{外, 尚有其他解即無限多解} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-k & 5 \\ 3 & 4-k \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 6k - 7 = 0 \Rightarrow k = -1, 7$$

$$(2) \text{①} k = -1 \text{ 時, 方程組} \begin{cases} 3x+5y=0 \\ 3x+5y=0 \end{cases}, \text{其解爲 } 3x+5y=0 \text{ 之解} \Rightarrow x, y \text{ 爲一正一負 (不合)}$$

$$\text{②} k = 7 \text{ 時, 方程組爲} \begin{cases} -5x+5y=0 \\ 3x-3y=0 \end{cases}, \text{其解即爲 } x-y=0 \text{ 之解} \Rightarrow x=y$$

$\therefore$  方程組有  $x > 0, y > 0$  之解

5. 有一工程, 如甲、乙、丙三人合作, 10 天可完成; 如乙、丙二人合作, 15 天可完成; 如甲作 15 天後餘下由丙來作, 丙再作 30 天才完成, 問如乙獨做需\_\_\_\_\_天完成。

【解答】20

【詳解】

設一工程甲獨作需  $x$  天, 乙獨作需  $y$  天, 丙獨作需  $z$  天完成

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{10} \dots\dots \text{①} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{15} \dots\dots \text{②} \\ \frac{15}{x} + \frac{30}{z} = 1 \dots\dots \text{③} \end{cases}$$

$$\text{由①} - \text{②} \text{得} \frac{1}{x} = \frac{1}{30} \Rightarrow x = 30, \text{代入③得} \frac{1}{30} + \frac{2}{z} = \frac{1}{15} \Rightarrow z = 60$$

$$\text{代入②得} \frac{1}{y} + \frac{1}{60} = \frac{1}{15} \Rightarrow y = 20, \text{故乙獨作需 } 20 \text{ 天完成}$$

6. 已知  $xyz \neq 0$  且  $8x - 3y - 6z = 0, 10x - 5y - 8z = 0$ , 則  $\frac{3x^2 - 2y^2 + z^2 - 5xy}{4x^2 - 5y^2 - 6z^2 + 2zx}$  之值爲\_\_\_\_\_。

【解答】 $-\frac{37}{52}$

【詳解】

$$\begin{cases} 8x - 3y - 6z = 0 \\ 10x - 5y - 8z = 0 \end{cases} \Rightarrow x : y : z = \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -5 & -8 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -6 & 8 \\ -8 & 10 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 10 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (-6) : 4 : (-10) = 3 : (-2) : 5$$

令  $x = 3k, y = -2k, z = 5k$  代入

$$\text{則原式} = \frac{3(3k)^2 - 2(-2k)^2 + (5k)^2 - 5(3k)(-2k)}{4(3k)^2 - 5(-2k)^2 - 6(5k)^2 + 2(5k)(3k)} = \frac{27 - 8 + 25 + 30}{36 - 20 - 150 + 30} = -\frac{37}{52}$$

7. 設  $\begin{cases} (a+3)x+4y=5-3a \\ 2x+(5+a)y=8 \end{cases}$ ，若方程組無解，則  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】  $-7$

【詳解】

$$\frac{a+3}{2} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{4}{5+a} \stackrel{\textcircled{2}}{=} \frac{5-3a}{8}, \text{ 由 } \textcircled{1} \Rightarrow a^2+8a+7=0 \Rightarrow (a+1)(a+7)=0$$

$$\Rightarrow a=-1, -7 \text{ 代入 } \textcircled{2}, \text{ 得 } a=-7$$

8. 若二元一次方程組  $\begin{cases} (k-3)x-2y=2k \\ 3x+(2k+1)y+k+2=0 \end{cases}$  無解，則  $k$  之值 =  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】  $\frac{3}{2}$

【詳解】

$$\text{無解} \Rightarrow \frac{k-3}{3} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{-2}{2k+1} \stackrel{\textcircled{2}}{=} \frac{2k}{-k-2}; \text{ 由 } \textcircled{1} \Rightarrow k=\frac{3}{2} \text{ 或 } k=1 \text{ (}\textcircled{2}\text{式不合)} \therefore k=\frac{3}{2}$$

9. 若  $\triangle ABC$  的三邊長為  $a, b, c$ ，且滿足  $a-2b+c=0, 5a+4b-5c=0$ ，已知  $\triangle ABC$  的周長 = 30，則  $\triangle ABC$  的面積 =  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】  $15\sqrt{3}$

【詳解】

$$\begin{cases} a-2b+c=0 \\ 5a+4b-5c=0 \end{cases} \Rightarrow a:b:c = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 6:10:14 = 3:5:7$$

$$\text{令 } a=3k, b=5k, c=7k \therefore a+b+c=30 \Rightarrow 15k=30 \Rightarrow k=2$$

$$\therefore \text{三邊長為 } 6, 10, 14 \Rightarrow \triangle \text{的面積} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{15 \times 9 \times 5 \times 1} = 15\sqrt{3}$$

10. 甲乙二人同解方程組  $\begin{cases} 4x-ay=7 \\ bx-y=3 \end{cases}$ ，甲看錯  $b$  得解  $x=3, y=-1$ ，乙看錯  $a$  得解  $x=2, y=1$ ，若沒有其他錯誤，則方程組正確的解  $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】  $(\frac{11}{7}, \frac{1}{7})$

【詳解】

(1) 甲看錯  $b \therefore x=3, y=-1$  滿足  $4x-ay=7 \Rightarrow 12+a=7 \Rightarrow a=-5$

(2) 乙看錯  $a \therefore x=2, y=1$  滿足  $bx-y=3 \Rightarrow 2b-1=3 \Rightarrow b=2$

(3) 正確方程組為  $\begin{cases} 4x+5y=7 \\ 2x-y=3 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{11}{7}, y=\frac{1}{7}$

11. 若兩方程組  $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-2y+2z=3 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$  與  $\begin{cases} ax+by+cz=5 \\ bx+cy+az=6 \\ cx+ay+bz=1 \end{cases}$  有相同的解，則數對  $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】  $(1, -1, 2)$

【詳解】

$$\begin{cases} x+y+z=6 & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ x-2y+2z=3 & \cdots\cdots\textcircled{2} \\ 2x-3y=-4 & \cdots\cdots\textcircled{3} \end{cases}$$

由  $\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2}$  得  $x+4y=9 \cdots\cdots\textcircled{4}$

$\textcircled{3} - \textcircled{4} \times 2$  得  $-11y = -22 \Rightarrow y = 2$ ，代入 $\textcircled{4}$ 得  $x = 1$ ，代入 $\textcircled{1}$ 得  $z = 3$

將  $x = 1, y = 2, z = 3$  代入第二個方程組得 
$$\begin{cases} a+2b+3c=5 \\ b+2c+3a=6 \\ c+2a+3b=1 \end{cases} \Rightarrow 6(a+b+c) = 12$$

$$\Rightarrow a+b+c=2 \quad \therefore \begin{cases} b+2c=3 \\ c+2a=4 \\ a+2b=-1 \end{cases} \text{ 解得 } a=1, b=-1, c=2$$

12. 
$$\begin{cases} \frac{2}{3x-y} - \frac{4}{2x+y} = 1 \\ \frac{5}{3x-y} + \frac{8}{2x+y} = 7 \end{cases}$$
 之解  $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解答】(1, 2)

【詳解】

令  $\frac{1}{3x-y} = A, \frac{1}{2x+y} = B$ ，則 
$$\begin{cases} 2A-4B=1 \\ 5A+8B=7 \end{cases} \therefore A=1, B=\frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} 3x-y=1 \\ 2x+y=4 \end{cases} \Rightarrow x=1, y=2$$

13. 試就實數  $a$  之值，討論方程組 
$$\begin{cases} 2x-(a-3)y=a+5 \\ (3-a)x+2y=7-a \end{cases}$$
 之解。

【解答】

當  $a \neq 1, a \neq 5$  時，唯一解  $(\frac{a-11}{a-5}, \frac{-a-1}{a-5})$ ；

當  $a = 1$  時，有無窮多解 
$$\begin{cases} x=t \\ y=3-t \end{cases}, t \in R$$
；

當  $a = 5$  時，無解

【詳解】

方程組 
$$\begin{cases} 2x-(a-3)y=a+5 \\ (3-a)x+2y=7-a \end{cases}$$
，則

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -(a-3) \\ 3-a & 2 \end{vmatrix} = 4 - (a-3)^2 = -a^2 + 6a - 5 = -(a-1)(a-5)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a+5 & -(a-3) \\ 7-a & 2 \end{vmatrix} = 2(a+5) + (a-3)(7-a) = -(a-1)(a-11)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & a+5 \\ 3-a & 7-a \end{vmatrix} = 2(7-a) - (a+5)(3-a) = a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$$

(1) 當  $a \neq 1$  且  $a \neq 5$  時,  $\Delta \neq 0$

$$\text{此方程組恰有一解 } x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-(a-1)(a-11)}{-(a-1)(a-5)} = \frac{a-11}{a-5}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{(a+1)(a-1)}{-(a-1)(a-5)} = \frac{-a-1}{a-5}$$

(2) 當  $a = 1$  時,  $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0 \quad \therefore$  方程組有無窮多解

此時方程組與  $x + y - 3 = 0$  同義  $\Rightarrow$  解為  $x = t, y = 3 - t, t \in R$

(3) 當  $a = 5$  時,  $\Delta = 0, \Delta_x \neq 0, \Delta_y \neq 0 \quad \therefore$  方程組無解

14. 若  $k \in R$ , 方程組  $\begin{cases} 6x + (k-2)y - 7k + 17 = 0 \\ (k+5)x - 2y + 8k + 24 = 0 \end{cases}$  有無限多組解, 在所有解  $(x, y)$  中, 試求  $4x^2 + y^2 - 2x - y + 1$  的最小值。

【解答】  $\frac{65}{2}$

【詳解】

$$\text{令 } \Delta = \begin{vmatrix} 6 & k-2 \\ k+5 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -12 - (k-2)(k+5) = 0 \Rightarrow k^2 + 3k + 2 = 0 \Rightarrow k = -1, -2$$

(1) 當  $k = -1$  時, 方程組為  $\begin{cases} 6x - 4y + 31 = 0 \\ 3x - 2y + 8 = 0 \end{cases} \quad \therefore \frac{6}{3} = \frac{-4}{-2} \neq \frac{31}{8} \Rightarrow$  方程組無解, 不合

(2) 當  $k = -2$  時, 方程組為  $\begin{cases} 6x - 3y + 24 = 0 \\ 4x - 2y + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{-3}{-2} = \frac{24}{16} \Rightarrow$  方程組有無限多解

此時方程組與  $2x - y + 8 = 0$  同義  $\Rightarrow$  令  $x = 0 + t, y = 8 + 2t, t \in R$

$$\begin{aligned} \therefore 4x^2 + y^2 - 2x - y + 1 &= 4t^2 + (2t + 8)^2 - 2t - (2t + 8) + 1 \\ &= 8t^2 + 28t + 57 = 8\left(t + \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{65}{2}, \text{ 故最小值 } = \frac{65}{2} \end{aligned}$$

15. 解方程組:  $\begin{cases} 6(x+y) = 5xy \\ 2(y+z) = 3yz \\ 3(z+x) = 4zx \end{cases}$

【解答】  $(x, y, z) = (0, 0, 0), (3, 2, 1)$

【詳解】

$$\begin{cases} 6(x+y) = 5xy & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2(y+z) = 3yz & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 3(z+x) = 4zx & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

(1) 若  $xyz = 0$ , 當  $x = 0$  代入  $\textcircled{1}, \textcircled{3}$  得  $y = 0, z = 0 \quad \therefore (x, y, z) = (0, 0, 0)$  為其解

(2) 若  $xyz \neq 0$ , 則  $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$  分別除以  $xy, yz, zx$  得

$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{6}{y} = 5 \\ \frac{2}{y} + \frac{2}{z} = 3 \\ \frac{3}{z} + \frac{3}{x} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \dots\dots ④ \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2} \dots\dots ⑤ \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{4}{3} \dots\dots ⑥ \end{cases}, \text{由}[④ + ⑤ + ⑥] \div 2 \text{得} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{6} \dots\dots ⑦$$

$$\text{⑦} - \text{⑤}, \text{⑦} - \text{⑥}, \text{⑦} - \text{④} \text{得} \frac{1}{x} = \frac{11}{6} - \frac{3}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \frac{1}{y} = \frac{11}{6} - \frac{4}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \frac{1}{z} = \frac{11}{6} - \frac{5}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\therefore x = 3, y = 2, z = 1$$

16. 有一件工作，若 A 與 B 兩部機器同時使用，則 4 小時可完成這件工作；若先讓 A 機器工作 3 小時，餘下工作由 B 機器去做，則 6 小時可完工，問 A, B 機器單獨工作，各需多少小時才能完工？

**【解答】** A 機器需 6 小時，B 機器需 12 小時

**【詳解】**

設 A 機器單獨工作需  $x$  小時，B 機器單獨工作需  $y$  小時

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \dots\dots ① \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{3} \dots\dots ② \end{cases}$$

$$\text{由} ② - ① \text{得} \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \Rightarrow y = 12, \text{由} ① \times ② - ② \text{得} \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = 6$$

故 A 機器需 6 小時，B 機器需 12 小時

17. 一條河上橫跨一橋，由上游垂直橋面划下兩船，船速都是每秒 3 公尺。第一船長 14 公尺，第二船長 20 公尺，自船頭從橋的一側進入到船尾離開橋的另一側，各需  $8\frac{1}{2}$ ，10 秒，求橋寬與水流速率。

**【解答】** 橋寬 20 公尺，水速 1 公尺／秒

**【詳解】**

設橋寬為  $x$  公尺，水速每秒  $y$  公尺，則

$$\text{第一船穿過橋面的時間爲} \frac{x+14}{3+y} = 8\frac{1}{2}$$

$$\text{第二船穿過橋面的時間爲} \frac{x+20}{3+y} = 10$$

$$\therefore \begin{cases} 2x - 17y = 23 \\ x - 10y = 10 \end{cases} \Rightarrow x = 20, y = 1, \text{橋寬爲 20 公尺，水速爲每秒 1 公尺}$$