高雄市明誠中學 高二(上)平時測驗 日期：94.11.25					
範圍	2-5 空間直線方程式 2	班級	普二　　班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1. 設相異兩點A，B都在直線L_1：$\begin{cases} 3x-y+z-7=0 \\ 2x+y-3z+14=0 \end{cases}$上，也都在直線$L_2$：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-b}{m}=\dfrac{z-c}{n}$上，$m$，$n$，$b$，$c\in R$，則數對($m$，$n$)之值爲________________。

【解答】(11，5)

【詳解】

$\overleftrightarrow{AB}=L_1=L_2$

$\begin{array}{cccccc} 3 & -1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \end{array}$ $\Rightarrow$ L_1的方向向量爲(2，11，5)

$\therefore$ (2，11，5) = (2，m，n) $\Rightarrow$ $m=11$，$n=5$ $\Rightarrow$ (m，n) = (11，5)

2. 設空間上兩平面E_1：$2x+y+z=3$，E_2：$5x+2y-2z=5$ 交於一直線L，則L上某點(a，b，c)到原點有最短距離，則(a，b，c)=_________________。

【解答】$(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$

【詳解】

E_1之法向量(2，1，1)和E_2的法向量(5，2，$-$2)

L之方向向量 $=\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}\right)=(-4，9，-1)=-(4，-9，1)$

$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ 4x+y-7z=1 \end{cases}$，得$x-4z=-1$，取$L$之交點($-$1，5，0)，得L：$\begin{cases} x=-1+4t \\ y=5-9t \\ z=0+t \end{cases}$

$d(L，O)=\sqrt{(1-8t+16t^2)+(25-90t+81t^2)+t^2}=\sqrt{98t^2-98t+26}$

$=\sqrt{98(t^2-t+\dfrac{1}{4})+\dfrac{3}{2}}=\sqrt{98(t-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{2}}$

當$d(L，O)$爲最小時，$t=\dfrac{1}{2}$，故(a，b，c)= $(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$

3. 包含二平行直線$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=3-z$與$x=\dfrac{y+1}{2}=1-z$的平面方程式爲_______________。

【解答】$7x-y+5z-6=0$

【詳解】

$\begin{cases} L_1：\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-1} \\ L_2：\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1} \end{cases}$

L_1過$A(-1，2，3)$，L_2過$B(0，-1，1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(1,-3,-2)$，且方向向量$\vec{d}=(1，2，-1)$

$$\overrightarrow{AB}\times\vec{d}=\left(\begin{vmatrix}-3 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right)=(7，-1，5)$$

取平面E之法向量$\vec{n}=(7，-1，5)$，且E過點$A(-1，2，3)$

則$E：7(x+1)-(y-2)+5(z-3)=0 \quad \Rightarrow \quad E：7x-y+5z-6=0$

4. 直線$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+5}{-2}$與平面$2x+y-3z+7=0$的交點坐標為______________。

【解答】$(-3，-4，-1)$

【詳解】

直線$L：\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+5}{-2}$化為參數式$L：\begin{cases}x=-1+t\\ y=2+3t\\ z=-5-2t\end{cases}$，$t\in R$

令P為交點，$P\in L$，則將$P(-1+t，2+3t，-5-2t)$代入平面$2x+y-3z+7=0$

得$t=-2$，即交點P為$(-3，-4，-1)$

5. 包含直線$L：\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{4}$的平面$E$，若與平面$F：2x-y+3z+7=0$垂直，則其方程式為______________。

【解答】$10x-y-7z+25=0$

【詳解】

設平面E，F的法線向量各為$\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$，取$\overrightarrow{n_2}=(2，-1，3)$

$\because \quad E\perp F \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$ 　且$L\subset E \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n_1}\perp L$，$L$的方向向量$\vec{\ell}=(3，2，4)$

$$\begin{array}{cccccc}2 & -1 & 3 & 2 & -1 & 3\\ & \times & \times & \times & & \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 2 & 4\end{array}$$

$\therefore$ 　取$\overrightarrow{n_2}$，L的公垂向量$\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{n_2}\times\vec{\ell}=-(10，-1，-7)$

$E：10x-y-7z=-25$（$\because$ 　點$(-1，1，2)\in L \quad \Rightarrow \quad (-1，1，2)\in E$）

6. 二平行線$L_1：\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+2}{1}=1-z$與$L_2：\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{1}=3-z$的距離為______________。

【解答】$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

【詳解】

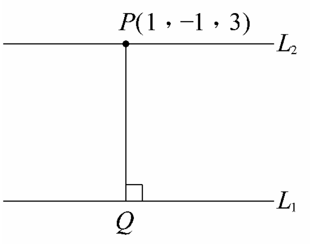
$L_1：\begin{cases}x=3+4t\\ y=-2+t\\ z=1-t\end{cases}$，設垂足$Q$為$(3+4t，-2+t，1-t)$

$P(1，-1，3)\in L_2$，$\overrightarrow{PQ}=(2+4t，-1+t，-2-t)\perp L_1$

$\overrightarrow{PQ}\perp\vec{d} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{d}=0 \quad \Rightarrow \quad (2+4t，-1+t，-2-t)\cdot(4，1，-1)=0$

$\Rightarrow \quad 18t+9=0 \quad \Rightarrow \quad t=\dfrac{-1}{2} \quad \therefore \quad \overrightarrow{PQ}=(0，\dfrac{-3}{2}，\dfrac{-3}{2})$

$\therefore\quad d(L_1；L_2)=|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{0+\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$



7. 試求包含$A(4，3，1)$及直線$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$之平面方程式爲__________。

【解答】$2x-6y+z+9=0$

【詳解】

取直線 L 上一點 $P(1，2，1)$　$\therefore\quad \overrightarrow{PA}=(3，1，0)$

直線 L 之方向向量 $\vec{\ell}=(2，1，2)$　$\Rightarrow\quad \overrightarrow{PA}\times\vec{\ell}=(2，-6，1)$

$\therefore$　包含 A 點及直線 L 之平面方程式爲 $2x-6y+z+9=0$

8. 設直線$L：\begin{cases}2x-y+z=3\\x-2y+2z=2\end{cases}$，試求包含直線$L$及點$P(-1，2，3)$之平面方程式爲__________。

【解答】$2x-7y+7z-5=0$

【詳解】

設此平面方程式爲 $2x-y+z-3+k(x-2y+2z-2)=0$；又過 $P(-1，2，3)$

則$(-2-2+3-3)+k(-1-4+6-2)=0\quad\Rightarrow\quad k=-4$

$\therefore$　平面方程式爲 $2x-y+z-3-4(x-2y+2z-2)=0$，即 $2x-7y+7z-5=0$

9. 直線L過$P(2，4，3)$且平行於$A(2，1，1)$，$B(3，4，2)$兩點之連線，求L的對稱比例式__________。

【解答】$\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-3}{1}$

【詳解】

$\because\quad \overrightarrow{AB}=(1，3，1)$爲 L 之方向向量且 L 又過 $P(2，4，3)$

$\therefore$　L 的對稱比例式爲 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-3}{1}$

10. 設$L：\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+3}{1}$與$M：\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+3}{1}$兩直線相交於一點，若平面$E$包含$L$及$M$，則平面$E$方程式爲________________。

【解答】$x-y+z=-1$

【詳解】

L 之方向向量 $\vec{\ell}_1=(4，5，1)$，M 之方向向量 $\vec{\ell}_2=(2，3，1)$，$\vec{\ell}_1\times\vec{\ell}_2=(2，-2，2)$

$E：2(x-3)-2(y-1)+2(z+3)=0$，故平面 E 爲 $x-y+z=-1$

11.給定一點$A(1，2，3)$，平面$E：x+y+z=0$，

(1)過A點垂直平面E的直線參數式爲__________。

(2) A點在E上的正射影坐標爲__________。

(3) A點對E的對稱點坐標爲__________。

【解答】(1) $x=1+t，y=2+t，z=3+t，t\in R$　(2) $(-1，0，1)$　(3) $(-3，-2，-1)$

【詳解】

(1)垂直 $E：x+y+z=0$ 之直線方向向量即爲 E 的法線向量$(1，1，1)$

此直線過 $A(1，2，3)$　∴　直線參數式爲$\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t，t\in R \\ z=3+t \end{cases}$

(2)將(1)的參數式代入 E，$(1+t)+(2+t)+(3+t)=0$　$\Rightarrow$　$t=-2$

∴　直線與 E 的交點爲 $B(-1，0，1)$，即爲 A 在 E 上的正射影

(3)設 A 對 E 的對稱點 A'，則 $\overline{AA'}$ 中點 B，得 $A'(-2-1，0-2，2-3)=(-3，-2，-1)$

12. 設空間二直線$\begin{cases} L_1：\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-7}{2}=\dfrac{z+7}{-2} \\ L_2：\dfrac{x-5}{-3}=\dfrac{y+6}{4}=\dfrac{z+1}{1} \end{cases}$，

(1)若L_1與L_2之公垂線與L_1，L_2的交點分別爲P，Q，則P坐標爲________________。

(2) L_1與L_2間之最短距離爲________________。

【解答】(1) $(-3，1，-1)$　(2) 3

【詳解】

(1) $L_1：\begin{cases} x=t \\ y=7+2t \\ z=-7-2t \end{cases}$ 及$L_2：\begin{cases} x=5-3s \\ y=-6+4s \\ z=-1+s \end{cases}$

$\Rightarrow$　$P(t，7+2t，-7-2t)$，$Q(5-3s，-6+4s，-1+s)$

$\overrightarrow{PQ}=(5-3s-t，-13+4s-2t，6+s+2t)$與$L_1$及$L_2$之方向向量

$\overrightarrow{d_1}=(1，2，-2)$及$\overrightarrow{d_2}=(-3，4，1)$均垂直

則$\begin{cases} \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{d_1}=0 \\ \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{d_2}=0 \end{cases}$　$\Rightarrow$　$\begin{cases} 3s-9t-33=0 \\ 26s-3t-61=0 \end{cases}$，得$\begin{cases} t=-3 \\ s=2 \end{cases}$

即$P(-3，1，-1)$，$Q(-1，2，1)$

(2) $d(L_1；L_2)=\overline{PQ}=\sqrt{4+1+4}=3$