高雄市明誠中學 高二(上)平時測驗 日期：94.10.31					
範圍	2-4 空間平面方程式	班級	普二　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. 已知空間中二點 $A(2，0，1)$，$B(-1，1，2)$，若線段 $\overline{AB}$ 之垂直平分面方程式爲 $ax+by+cz+1=0$，則 $a+b+c$ 之值爲(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5　(E) 6

【解答】(A)

【詳解】

平面 E 之法向量 $\vec{n}=\overrightarrow{BA}=(3，-1，-1)$，且過 A，B 之中點 $M(\frac{1}{2}，\frac{1}{2}，\frac{3}{2})$

則 $E：3(x-\frac{1}{2})-(y-\frac{1}{2})-(z-\frac{3}{2})=0 \quad \Rightarrow \quad 3x-y-z+\frac{1}{2}=0$

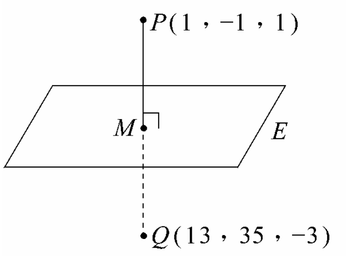
$\Rightarrow \quad 6x-2y-2z+1=0 \quad \therefore \quad a+b+c=6+(-2)+(-2)=2$

二、填充題(每題 10 分)

1. 點$P(1，-1，1)$對於平面E之對稱點爲$Q(13，35，-3)$，則E之方程式爲__________。

【解答】$3x+9y-z-175=0$

【詳解】



$\overline{PQ}$ 之中點 $M(7，17，-1)\in E$，$\overrightarrow{PQ}=(12，36，-4)\perp E$，

取平面 E 之法向量 $\vec{n}=(3，9，-1)$

$\therefore \quad E：3(x-7)+9(y-17)-(z+1)=0 \quad \Rightarrow \quad E：3x+9y-z-175=0$

2. 兩平面 $2x-y-3z=5$ 與 $3x+2y-z=8$ 的夾角爲__________。

【解答】$\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$

【詳解】

$$\cos\theta=\pm\frac{|2\times3+(-1)\times2+(-3)\times(-1)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \cos\theta=\pm\frac{1}{2}，\theta=\frac{\pi}{3}\text{或}\frac{2\pi}{3}$$

3. 兩平面$ax+3y+5z=3$ 與 $2ax-y+az=1$ 互相垂直，則$a=$__________。

【解答】$\frac{1}{2}$或 -3

【詳解】

法向量$(a，3，5)$，$(2a，-1，a)$互相垂直

$\Rightarrow\quad a(2a)+3(-1)+5\cdot a=0 \quad\Rightarrow\quad 2a^2+5a-3=0$

$\therefore\quad (a+3)(2a-1)=0 \quad\Rightarrow\quad a=-3$ 或 $\frac{1}{2}$

4. 垂直於E_1：$x-y+2z+3=0$，E_2：$2x+y+3z+5=0$，且過點$A(2，3，2)$之平面方程式爲__________。

【解答】$5x-y-3z-1=0$

【詳解】

$\overrightarrow{n_1}=(1，-1，2)$，$\overrightarrow{n_2}=(2，1，3)$

$\Rightarrow\quad \overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\left(\begin{vmatrix}-1&2\\1&3\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}\right)=(-5，1，3)$

E：$5(x-2)-(y-3)-3(z-2)=0 \quad\Rightarrow\quad 5x-y-3z-1=0$

5. $A(1，3，2)$在平面E上之投影點爲$B(2，1，0)$，則$C(3，5，1)$到平面E的距離爲__________。

【解答】3

【詳解】

法向量$\overrightarrow{AB}=(1，-2，-2) \quad\Rightarrow\quad E：(x-2)-2(y-1)-2z=0 \quad\Rightarrow\quad x-2y-2z=0$

$d(C，E)=\dfrac{|3-10-2|}{\sqrt{1+4+4}}=3$

6. 平面 $2x+3y+6z=12$，交x，y，z軸於點A，B，C，則$\triangle ABC$在平面 $2x-2y+z=1$ 上正射影的面積 $=$__________。

【解答】$\frac{8}{3}$

【詳解】

平面 $2x+3y+6z=12$ 與 x，y，z 軸交點分別爲 $A(6，0，0)$，$B(0，4，0)$，$C(0，0，2)$

$\overrightarrow{AB}=(-6，4，0)$，$\overrightarrow{AC}=(-6，0，2)$

$\Rightarrow\quad \triangle ABC$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{784}=\dfrac{28}{2}=14$

$2x+3y+6z=12$ 與 $2x-2y+z=1$ 所夾銳角θ

$\Rightarrow\quad \cos\theta=\dfrac{|(2，3，6)\cdot(2，-2，1)|}{\sqrt{4+9+36}\cdot\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{4}{3\times7}=\dfrac{4}{21}$

$\triangle ABC$ 在 $2x-2y+z=1$ 上正射影的面積爲$(\triangle ABC)\cos\theta=14\times\dfrac{4}{21}=\dfrac{8}{3}$

7. 設一平面E平行平面 $2x+y+2z-1=0$ 且與三坐標平面所成四面體之體積爲 9，則此平面E的方程式爲__________。

【解答】$2x+y+2z=\pm6$

【詳解】

$\because\quad$ 平面E與平面 $2x+y+2z-1=0$ 平行

$\therefore$　令平面E的方程式為 $2x+y+2z=k$，則 $\dfrac{x}{\frac{k}{2}}+\dfrac{y}{k}+\dfrac{z}{\frac{k}{2}}=1$

$\because$　E與三坐標平面所圍成的四面體體積 $V=\dfrac{1}{6}\left|\dfrac{k}{2}\cdot k\cdot\dfrac{k}{2}\right|=\dfrac{1}{24}|k^3|$

$\therefore$　$\dfrac{1}{24}|k|^3=9 \quad\Rightarrow\quad |k|^3=6^3 \quad\therefore\quad |k|=6 \quad\Rightarrow\quad k=\pm 6$

故平面E的方程式為 $2x+y+2z=\pm 6$

8. 空間中含$A(1，0，0)$，$B(0，1，0)$，$C(0，0，1)$之平面方程式為__________。

【解答】$x+y+z=1$

【詳解】用截距式得 $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{1}=1$，即 $x+y+z=1$

9. 平面E_1：$x+2y-3z+2=0$，E_2：$3x-2y+z+5=0$ 相交於直線L，任取L上兩相異點P，Q，若點$A(-3，1，0)$，則平面APQ的方程式為__________。

【解答】$9x+10y-17z+17=0$

【詳解】

點P，Q在平面APQ上　$\Rightarrow$　L在平面APQ上

而L為平面E_1：$x+2y-3z+2=0$，E_2：$3x-2y+z+5=0$ 的交線，而$A\notin E_1$

$\therefore$　可設平面APQ的方程式為 $(3x-2y+z+5)+t(x+2y-3z+2)=0$

$\because$　過點$A(-3，1，0)$代入　$\therefore$　$t=6$

$\therefore$平面APQ：$(3x-2y+z+5)+6(x+2y-3z+2)=0\Rightarrow$平面$APQ$：$9x+10y-17z+17=0$

10. 過點$A(-2，1，1)$，$B(1，1，3)$的平面E，若與平面F：$x-2y+3z=5$ 垂直，則E的方程式為__________。

【解答】$4x-7y-6z+21=0$

【詳解】

設平面 E，F 的法向量各為 $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$　$\because$　$E\perp F$　$\Rightarrow$　$\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$

又 A，$B\in E$　$\Rightarrow$　$\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{AB}$　$\therefore$　$\overrightarrow{n_1}$ 為 $\overrightarrow{n_2}$，$\overrightarrow{AB}$ 的公垂向量

由 $\overrightarrow{n_2}=(1，-2，3)$，$\overrightarrow{AB}=(3，0，2)$

$\Rightarrow$　$\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{n_2}\times\overrightarrow{AB}=\left(\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}\right)=(-4，7，6)=-(4，-7，-6)$

$\therefore$　E：$4x-7y-6z+21=0$

11. 設過點$A(1，0，0)$，$B(0，0，\dfrac{1}{3})$的平面E與平面F：$x+z=\dfrac{1}{2}$ 的銳夾角為 $45°$，則E的方程式為__________。

【解答】$x\pm\sqrt{6}\,y+3z=1$

【詳解】

$\because$ 平面E過點$A(1，0，0)$，$B(0，0，\frac{1}{3})$ $\therefore$ E的x截距為 1，y截距為$\frac{1}{3}$

設E：$\frac{x}{1}+\frac{y}{b}+\frac{z}{1/3}=1$ $\therefore$ E的法向量為$\overrightarrow{n_1}=(1，\frac{1}{b}，3)$

而F：$x+z=\frac{1}{2}$的法向量為$\overrightarrow{n_2}=(1，0，1)$

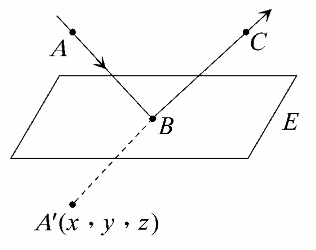
$\cos 45^\circ=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{10+\frac{1}{b^2}}\cdot\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ $b^2=\frac{1}{6}$ $\Rightarrow$ $b=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$

$\therefore$ E：$x\pm\sqrt{6}\,y+3z=1$

11.空間坐標系中，有一平面鏡E，有一雷射光線經過點$A(1，3，2)$射向鏡面E上的點$B(0，1，0)$，反射又經過點$C(-4，5，2)$，則平面E方程式為__________。

【解答】$x-4y-3z+4=0$

【詳解】



由光學原理，$\overleftrightarrow{BC}$之延長線必經過A關於平面E的對稱點A'，

且$\overline{A'B}=\overline{AB}=3$，又$\overrightarrow{BC}=(-4，4，2)$，且$\overrightarrow{BC}$上的單位向量

$\vec{u}=\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{(-4，4，2)}{6}=(\frac{-2}{3}，\frac{2}{3}，\frac{1}{3})$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{A'B}=3\vec{u}=3\cdot(\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|})=3\cdot(\frac{-2}{3}，\frac{2}{3}，\frac{1}{3})=(-2，2，1)$

即$(-x，1-y，-z)=(-2，2，1)$，得$A'(x，y，z)=(2，-1，-1)$

平面E之法向量為$\overrightarrow{AA'}=(1，-4，-3)$，又過$B$點$(0，1，0)$

$\therefore$ E：$(x-0)-4(y-1)-3(z-0)=0$，即E：$x-4y-3z+4=0$

12.平面E包含兩平面$2x+y-4=0$及$y+2z=0$之交線，且垂直平面$3x+2y-3z-6=0$，則E之方程式為__________。

【解答】$2x+3y+4z-4=0$

【詳解】

設E：$(2x+y-4)+k(y+2z)=0$……①

$\Rightarrow$ E：$2x+(k+1)y+2kz-4=0$，法向量$\vec{n}=(2，k+1，2k)$

而E'：$3x+2y-3z-6=0$之法向量$\overrightarrow{n'}=(3，2，-3)$

$\because$ $E\perp E'$ $\therefore$ $\vec{n}\cdot\overrightarrow{n'}=6+2k+2-6k=0$ $\Rightarrow$ $k=2$代入①

$\Rightarrow$ E：$2x+3y+4z-4=0$

13.設平面E：$x-2y+2z+3=0$，求平行E且距離為 3 的平面方程式。

【解答】$x-2y+2z-6=0$或$x-2y+2z+12=0$

【詳解】

設所求平面爲 $x-2y+2z+k=0$

則 $\dfrac{|3-k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=3 \quad \Rightarrow \quad |3-k|=9 \quad \therefore \quad 3-k=\pm 9 \quad \Rightarrow \quad k=-6$ 或 12

$\therefore$ 所求方程式：$x-2y+2z-6=0$ 或 $x-2y+2z+12=0$

14.求平行於平面 $x+y-3z+1=0$ 且 x，y，z 軸截距和 $=10$ 的平面方程式。

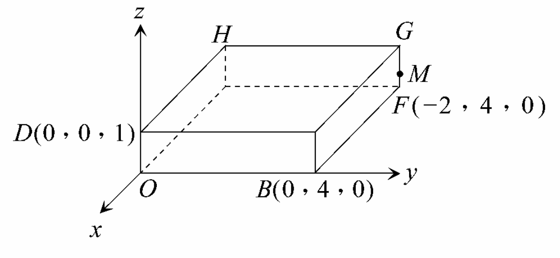
【解答】$x+y-3z-6=0$

【詳解】

設所求平面 $x+y-3z=k$，則三軸截距 $x=k,\quad y=k,\quad z=-\dfrac{k}{3}$

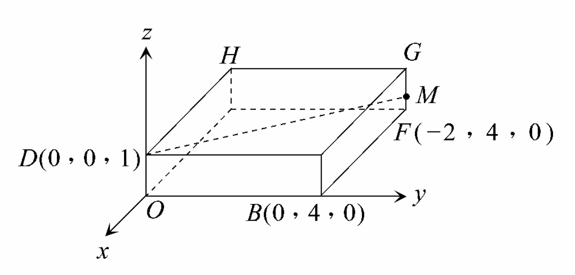
截距和 $=k+k-\dfrac{k}{3}=10 \quad \Rightarrow \quad k=10\times\dfrac{3}{5}=6 \quad \therefore \quad x+y-3z-6=0$ 爲所求

15.在右圖所示的長方體中，M 點在 $\overline{FG}$ 上，且 $\overline{FM}=\dfrac{1}{2}\overline{MG}$，求通過 H 點，且與 $\overline{DM}$ 垂直的平面方程式。



【解答】$3x-6y+z+5=0$

【詳解】



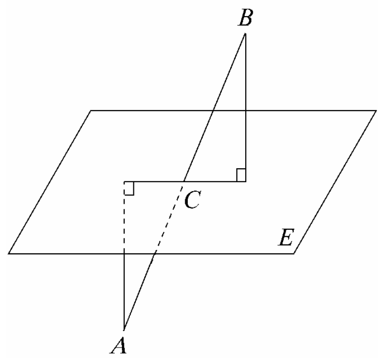
如圖，$D(0，0，1)$，$B(0，4，0)$，$F(-2，4，0)$，$\overline{FG}=\overline{OD}=1$，$\overline{FM}=\dfrac{1}{2}\overline{MG}=\dfrac{1}{3}\overline{FG}$

$\therefore \quad M(-2,4,\dfrac{1}{3}) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{DM}=(-2,4,-\dfrac{2}{3})$

故通過 H 垂直 $\overline{DM}$ 的平面法向量爲 $\overrightarrow{DM}$

$\therefore$ 所求平面方程式爲 $-2(x+2)+4(y-0)-\dfrac{2}{3}(z-1)=0$，即 $3x-6y+z+5=0$ 爲所求

16.設點 $A(-2，-2，2)$，$B(6，1，-2)$，若 $\overline{AB}$ 交平面 E：$2x+y-2z=5$ 於 C 點，則 $\overline{AC}$ ： $\overline{BC}=$？



【解答】5：4

【詳解】

$\overline{AC}$ ： $\overline{BC}=d(A，E)：d(B，E)$

$=\dfrac{|-4-2-4-5|}{3}$ ： $\dfrac{|12+1+4-5|}{3}=5：4$

17.若空間中四點 $A(0，0，0)$，$B(1，2，3)$，$C(2，3，1)$，$D(1，1，a)$共平面，則 $a=$？

【解答】(1) $7x-5y+z=0$ (2)-2

【詳解】

先求 ABC 平面方程式，再將$(1，1，a)$代入方程式求 a

$\overrightarrow{AB}=(1，2，3)$，$\overrightarrow{AC}=(2，3，1)$

$\therefore\ ABC$ 平面的法向量 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(\begin{vmatrix}2&3\\3&1\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix})=(-7，5，-1)$

$\therefore\ ABC$ 平面的方程式：$-7(x-0)+5(y-0)-1(z-0)=0 \Rightarrow 7x-5y+z=0$

$D(1，1，a)$在平面上 $\therefore\ 7-5+a=0 \Rightarrow a=-2$

18. 若點$P(x_0，y_0，z_0)$是平面 $2x-y-4z-1=0$ 上一點，則$\sqrt{(x_0-1)^2+(y_0+2)^2+(x_0-3)^2}$ 的最小值爲__________。

【解答】$\dfrac{9}{\sqrt{21}}=\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$

【詳解】

設$A(1，-2，3)$ $\because\ P(x_0，y_0，z_0)$ $\therefore\ \overline{AP}=\sqrt{(x_0-1)^2+(y_0+2)^2+(z_0-3)^2}$

$\because\ P$爲平面E：$2x-y-4z-1=0$ 上一點

$\therefore\ \overline{AP}$ 的最小值即爲A點到平面E之距離d

$\because\ d=\dfrac{|2+2-12-1|}{\sqrt{4+1+16}}=\dfrac{|-9|}{\sqrt{21}}=\dfrac{9}{\sqrt{21}}=\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$

19. 若平面E過點$P(2，3，1)$且在卦限$(+，+，+)$與三坐標平面所成之四面體體積爲最小，則平面E的方程式爲__________。

【解答】$\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{9}+\dfrac{z}{3}=1$

【詳解】

令平面 E 爲$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$，點 $P(2，3，1) \Rightarrow \dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}+\dfrac{1}{c}=1$

$\because\ a>0，b>0，c>0 \Rightarrow \dfrac{\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{1}{c}}{3}\geq\sqrt[3]{\dfrac{6}{abc}} \Rightarrow \dfrac{1}{6}abc\geq 27$

當$\dfrac{2}{a}=\dfrac{1}{3}，\dfrac{3}{b}=\dfrac{1}{3}，\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{3}$時，等號成立 $\Rightarrow a=6，b=9，c=3 \Rightarrow \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{9}+\dfrac{z}{3}=1$

20.設O- xyz空間中，兩點$A(1，-2，-1)$，$B(3，1，0)$，一平面E：$x-y-z-1=0$，則

(1) $\overline{AB}$ 在E之正射影的長度爲__________。

(2)若E上一點P使$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$ 爲最小，則P點之坐標爲__________。

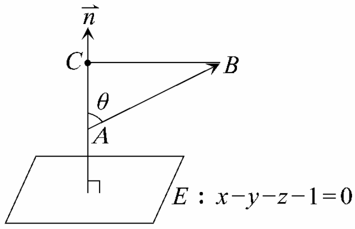
【解答】(1)$\dfrac{\sqrt{114}}{3}$ (2) $(\dfrac{4}{3}，\dfrac{1}{6}，\dfrac{1}{6})$

【詳解】

(1) $\overrightarrow{AB}=(2，3，1)$，平面 E 之法向量$\vec{n}=(1，-1，-1)$

$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\vec{n}|} = \dfrac{-2}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{3}}$ ，$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\dfrac{19}{21}}$

所求 $=\overline{BC}=\overline{AB}\cdot\sin\theta=\sqrt{14}\cdot\dfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{21}}=\dfrac{\sqrt{114}}{3}$



(2) $\overline{AB}$ 之中點 $M(\,2，\dfrac{-1}{2}，\dfrac{-1}{2}\,)$，根據中線定理 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2\overline{PM}^2+\dfrac{1}{2}\overline{AB}^2$

即 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2\overline{PM}^2+2\overline{AM}^2\ \geq 2\overline{MH}^2+2\overline{AM}^2$　(其中 H 為 M 在 E 之投影點，)

設 $H(\,2+t，\dfrac{-1}{2}-t，\dfrac{-1}{2}-t\,)$ 代入 $E：x-y-z-1=0$

$\Rightarrow (2+t)-(\dfrac{-1}{2}-t)-(\dfrac{-1}{2}-t)-1=0 \quad\Rightarrow\quad t=\dfrac{-2}{3}$，故所求之 P 點即為 $H(\dfrac{4}{3}，\dfrac{1}{6}，\dfrac{1}{6})$