高雄市明誠中學 高二(上)平時測驗 日期：94.10.23					
範圍	2-3 空間向量	班級	普二 班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. (複選)空間中三點 $P(6，-4，4)$，$Q(2，1，2)$，$R(3，-1，4)$， 則下列何者正確？

(A) $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}=18$ (B) $\cos\angle PQR=\dfrac{-1}{\sqrt{5}}$ (C) $\sin\angle PQR=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(D) P 點到直線 QR 的距離爲 3 (E)$\triangle PQR$ 的面積 $=\dfrac{9}{2}$

【解答】(A)(C)(D)(E)

【詳解】

$\because$ $P(6，-4，4)$，$Q(2，1，2)$，$R(3，-1，4)$

$\therefore$ $\overrightarrow{QP}=(4，-5，2)$，$\overrightarrow{QR}=(1，-2，2)$

(1) $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}=4\times1+(-5)(-2)+2\times2=4+10+4=18$ $\therefore$ (A)爲真

(2) $\cos\angle PQR=\dfrac{\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}}{|\overrightarrow{QP}||\overrightarrow{QR}|}=\dfrac{18}{\sqrt{45}\sqrt{9}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ $\therefore$ (B)不真

但 $\sin\angle PQR=\sqrt{1-(\dfrac{2}{\sqrt{5}})^2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $\therefore$ (C)爲真

(4)$\triangle PQR$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{QP}|^2|\overrightarrow{QR}|^2-(\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{45\times9-18^2}=\dfrac{9}{2}$ $\therefore$ (E)爲真

(3) P 點到 $\overleftrightarrow{QR}$ 的距離 $d\Rightarrow\triangle PQR$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}\times|\overrightarrow{QR}|\cdot d=\dfrac{9}{2}\Rightarrow d=3$，$\therefore$ (D)爲真

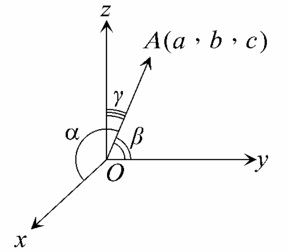
2. (複選)判斷下列何者可爲空間坐標系中某向量之方向角？

(A) $\dfrac{\pi}{3}，\dfrac{\pi}{3}，\dfrac{\pi}{3}$ (B) $\dfrac{\pi}{6}，\dfrac{\pi}{3}，\dfrac{\pi}{2}$ (C) $\dfrac{\pi}{4}，\dfrac{\pi}{3}，\dfrac{2\pi}{3}$ (D) $\dfrac{\pi}{4}，\dfrac{\pi}{8}，\dfrac{\pi}{6}$ (E) $\dfrac{2\pi}{3}，\dfrac{2\pi}{3}，\dfrac{3\pi}{4}$

【解答】(B)(C)(E)

【詳解】

設 α，β，γ 分別爲向量 $\overrightarrow{OA}$ 與 x 軸，y 軸，z 軸的正向夾角$\Rightarrow$ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$



(A)╳：$\cos^2\dfrac{\pi}{3}+\cos^2\dfrac{\pi}{3}+\cos^2\dfrac{\pi}{3}=3\cdot\dfrac{1}{4}\neq1$

(B)○：$\cos^2\dfrac{\pi}{6}+\cos^2\dfrac{\pi}{3}+\cos^2\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}+0=1$

(C)○：$\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$

(D)╳：$\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{2+\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}\neq 1$

(E)○：$\cos^2\frac{2\pi}{3}+\cos^2\frac{2\pi}{3}+\cos^2\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1$

二、填充題(每題 10 分)

1. 設$\vec{u}=(2，1，-1)$，$\vec{v}=(1，3，3)$，且$\vec{a}\perp\vec{u}$ ，$\vec{a}\perp\vec{v}$ ，若$\vec{a}=(-6，p，q)$，則數對$(p，q)=$ __________。

【解答】$(7，-5)$

【詳解】

$\vec{u}\times\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 3\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\right)=(6，-7，5)$

$\because$ $\vec{a}\perp\vec{u}$ ，$\vec{a}\perp\vec{v}$ $\therefore$ $\vec{a}=t(\vec{u}\times\vec{v})=t(6，-7，5)=(-6，p，q)$，得$(p，q)=(7，-5)$

2. 設$\overrightarrow{AB}=(1，2，3)$，若$B$之坐標爲$(-1，1，-1)$，則$A$之坐標爲__________，若$|\vec{u}|=\sqrt{126}$且$\vec{u}$與$\overrightarrow{AB}$反向，則$\vec{u}=$ __________。

【解答】(1) $(-2，-1，-4)$ (2) $(-3，-6，-9)$

【詳解】

(1)設$A(x，y，z)$，$\overrightarrow{AB}=(-1-x,1-y,-1-z)=(1，2，3)$ ，即$A(-2，-1，-4)$

(2) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$ ，又 $|\vec{u}|=\sqrt{126}=3|\overrightarrow{AB}|$，且又$\vec{u}$與$\overrightarrow{AB}$反向

$\therefore$ $\vec{u}=-3\overrightarrow{AB}=-3(1，2，3)=(-3，-6，-9)$

3. 設$\vec{a}=(x，y，z)$，$\vec{b}=(2，3，6)$，若$|\vec{a}|=5$，則$2x+3y+6z$的最大值爲__________。

【解答】35

【詳解】$|\vec{a}|=5\Rightarrow x^2+y^2+z^2=25$

由柯西不等式知$(2x+3y+6z)^2\le(x^2+y^2+z^2)(2^2+3^2+6^2)$

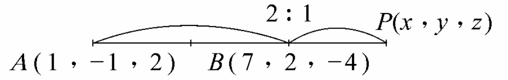
$\Rightarrow$ $-5\times 7\le 2x+3y+6z\le 5\times 7$

即 $-35\le 2x+3y+6z\le 35$ $\therefore$ $2x+3y+6z$之最大值爲 35

4. 已知空間中相異兩點$A(1，-1，2)$，$B(7，2，-4)$，設P點在$\overleftrightarrow{AB}$上，但不在$\overline{AB}$上，且$\overline{AP}$ ：$\overline{PB}=3：1$，則P點坐標爲__________。

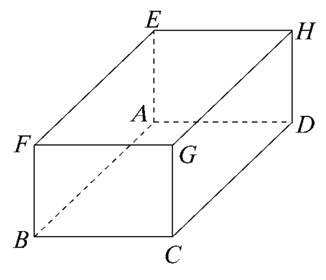
【解答】$(10，\frac{7}{2}，-7)$

【詳解】



由分點公式 $B(7，2，-4)=(\frac{2x+1}{3}，\frac{2y-1}{3}，\frac{2z+2}{3})$，得 P 點之坐標爲$(10，\frac{7}{2}，-7)$

5. 如下圖，長方體之長，寬，高各爲 4，5，3，試求 $\overline{AG}$ 與 $\overline{FD}$ 的夾角的度量$\theta=$ ＿＿＿＿＿＿＿ 。

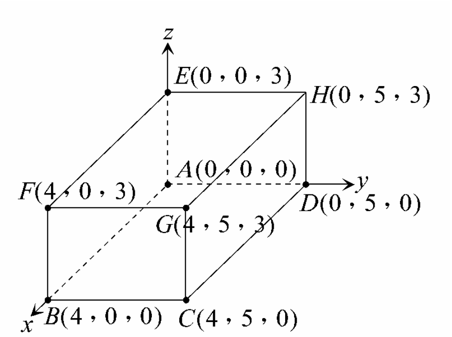


【解答】$\frac{\pi}{2}$

【詳解】

如下圖，將圖形坐標化，得 $\overrightarrow{AG}=(4，5，3)$，$\overrightarrow{FD}=(-4，5，-3)$

$\cos\theta=\pm\frac{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{FD}}{|\overrightarrow{AG}||\overrightarrow{FD}|}=\pm\frac{-16+25-9}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{50}}=0$ $\therefore$ $\overline{AG}$ 與 $\overline{FD}$ 的夾角度量$\theta=\frac{\pi}{2}$



6. 設$A(2，-1，5)$，$B(5，4，3)$，$C(-1，3，4)$，則$\triangle ABC$的重心坐標爲＿＿＿＿＿＿＿ 。

【解答】$(2，2，4)$

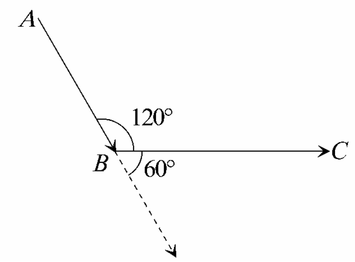
【詳解】

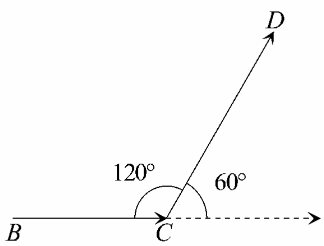
$\triangle ABC$ 的重心坐標爲$=(\frac{2+5-1}{3}，\frac{-1+4+3}{3}，\frac{5+3+4}{3})=(2，2，4)$

7. 空間中有A，B，C，D四點，已知$\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=3$，且$\angle ABC=\angle BCD=120°$，且 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 的夾角爲 60°，則 $\overline{AD}$ 之長爲＿＿＿＿＿＿＿ 。

【解答】5

【詳解】





已知$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{CD}$之夾角爲 60°

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}|$

$\therefore \quad |\overrightarrow{AD}|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$

$=|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2+2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB})$

$=1+4+9+2(|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos 60°+|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{CD}|\cos 60°+|\overrightarrow{CD}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos 60°)$

$=14+2(1\times 2\times\frac{1}{2}+2\times 3\times\frac{1}{2}+3\times 1\times\frac{1}{2})=25$，故$\overline{AD}=\sqrt{25}=5$

8. 向量(1，2，2) 之方向角爲α，β，γ，則

(1) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=$ __________。(2) $7\cos^2\alpha+2\cos^2\beta+3\cos^2\gamma=$ __________。

【解答】(1) 2　(2) 3

【詳解】

(1) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=(1-\cos^2\alpha)+(1-\cos^2\beta)+(1-\cos^2\gamma)$

$=3-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=2$

(2) $\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3\Rightarrow(1,2,2)=3(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})\Rightarrow \cos\alpha=\frac{1}{3}$，$\cos\beta=\frac{2}{3}$，$\cos\gamma=\frac{2}{3}$

$7\cos^2\alpha+2\cos^2\beta+3\cos^2\gamma=7\cdot\frac{1}{9}+2\cdot\frac{4}{9}+3\cdot\frac{4}{9}=\frac{27}{9}=3$

9. 設x，y，$z\in R$，且滿足$x^2+y^2+z^2=5$，則$x+2y+3z$之最大值爲__________。

【解答】$\sqrt{70}$

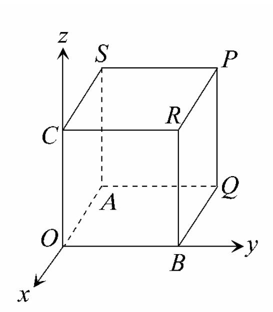
【詳解】$(x+2y+3z)^2\le(x^2+y^2+z^2)(1^2+2^2+3^2)=5\cdot 14=70 \quad \therefore \quad x+2y+3z$最大值爲$\sqrt{70}$

10.如右圖所示，正立方體各邊（稜）長爲 1，

(1)點P之坐標爲__________。

(2)對角線$\overline{AR}$與$\overline{BS}$的一個夾角爲θ，$\sin\theta$ 之值爲__________。

(3)點R至平面BCP的距離爲__________。



【解答】(1) (－1，1，1)　(2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　(3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

【詳解】

(1)如圖，P (－1，1，1)

(2) $\vec{a}=\overrightarrow{AR}=(1，1，1)$，$\vec{b}=\overrightarrow{BS}=(-1，-1，1)$，

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-1-1+1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{-1}{3} \quad \therefore \quad \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(3) $B(0，1，0)$，$C(0，0，1)$，$P(-1，1，1)$，$R(0，1，1)$，

$\overrightarrow{BC}=(0,-1,1)$, $\overrightarrow{BP}=(-1,0,1)$

$$\Delta BCP=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}-1&1\\0&1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1&0\\1&-1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}0&-1\\-1&0\end{vmatrix}^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

設點 R 至平面 BCP 的距離為 $\overline{BH}$ $\Rightarrow$ 四面體 $R-BCP$ 體積 $=\frac{1}{3}\Delta BCP\cdot\overline{AH}$

即 $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}\times1\times1)\times1=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{AH}\Rightarrow\overline{AH}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

11.設 $\vec{i}=(1，0，0)$，$\vec{j}=(0，1，0)$，$\vec{k}=(0，0，1)$，
且 $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$（$t\in R$），
(1)若 $\vec{a}\perp\vec{c}$，則 $t=$ ＿＿＿＿＿。
(2)若 $(2\vec{a}-\vec{b})\,//\,\vec{c}$，則 $t=$ ＿＿＿＿＿。
(3)當 $|\vec{c}|$ 有最小值時，$t=$ ＿＿＿＿＿。
(4)若單位向量 $\vec{u}$ 與 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 皆垂直，則 $\vec{u}=$ ＿＿＿。

【解答】(1) -3　(2) $-\frac{1}{2}$　(3) $-\frac{3}{2}$　(4) $\pm(\frac{2}{3}，\frac{2}{3}，-\frac{1}{3})$

【詳解】

$\vec{a}=(2，-1，2)$，$\vec{b}=(1，-1，0)$，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(2+t，-1-t，2)$

(1) $\vec{a}\perp\vec{c}$ $\Rightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ $\Rightarrow$ $(2，-1，2)\cdot(2+t，-1-t，2)=0$

$\Rightarrow$ $2(2+t)-(-1-t)+4=0$ $\Rightarrow$ $9+3t=0$ $\therefore$ $t=-3$

(2) $\because$ $2\vec{a}-\vec{b}=2(2，-1，2)-(1，-1，0)=(4，-2，4)-(1-1，0)=(3，-1，4)$

$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(2+t，-1-t，2)$ $\therefore$ $(2\vec{a}-\vec{b})\,//\,\vec{c}$ $\Rightarrow\frac{2+t}{3}=\frac{-1-t}{-1}=\frac{2}{4}$ $\Rightarrow$ $t=-\frac{1}{2}$

(3) $\because$ $|\vec{c}|=\sqrt{(2+t)^2+(-1-t)^2+4}=\sqrt{2t^2+6t+9}=\sqrt{2(t+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{2}+9}=\sqrt{2(t+\frac{3}{2})^2+\frac{9}{2}}$

$\therefore$ 當 $t=-\frac{3}{2}$ 時，$|\vec{c}|=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 為最小值

(4) $\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix}-1&2\\-1&0\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}2&2\\0&1\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}2&-1\\1&-1\end{vmatrix})=(2，2，-1)$

$\vec{u}=\pm\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}=\pm\frac{(2，2，-1)}{3}==\pm(\frac{2}{3}，\frac{2}{3}，-\frac{1}{3})$

12.有一向量 $\overrightarrow{AB}$，其終點 B 坐標為 $(7，6，-5)$，$\overrightarrow{AB}$ 與 x 軸，y 軸，z 軸正向的夾角分別為 $45°$，$60°$，γ（其中 $90°<\gamma<180°$），若 $|\overrightarrow{AB}|=8$，則 $\overrightarrow{AB}$ 始點 A 的坐標為＿＿＿＿＿。

【解答】$(7-4\sqrt{2}，2，-1)$

【詳解】

設 $\overrightarrow{AB}$ 的始點 $A(x，y，z)$，則 $\overrightarrow{AB}=(7-x，6-y，-5-z)$

$\because$ $|\overrightarrow{AB}|=8$ 且方向角為 $45°，60°，\gamma$ $\Rightarrow$ $\cos^2 45°+\cos^2 60°+\cos^2\gamma=1$

$\Rightarrow$ $\cos^2\gamma=\frac{-1}{2}$（$\because$ $90°<\gamma<180°$）

$\therefore\ \overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|(\cos45°,\ \cos60°,\ \cos\gamma)=(4\sqrt{2},4,-4)$

故 $7-x=4\sqrt{2}$，$6-y=4$，$-5-z=-4$

$\therefore\ x=7-4\sqrt{2}$，$y=6-4=2$，$z=-5+4=-1$，故$A$的坐標爲 $(7-4\sqrt{2},2,-1)$

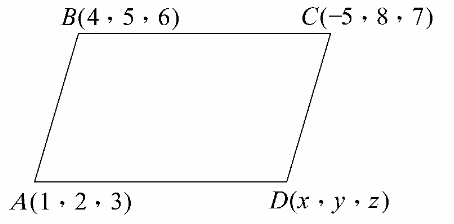
13.已知平行四邊形$ABCD$中，$A(1,2,3)$，$B(4,5,6)$，$C(-5,8,7)$，則D之坐標爲__________。

【解答】$(-8,5,4)$

【詳解】

如下圖，可知$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，即$(-3,-3,-3)=(x+5,y-8,z-7)$，

則 $D(x,y,z)=(-8,5,4)$



14.△ABC中，$A(4,1,3)$，$B(6,3,4)$，$C(3,1,-2)$，$\angle B$之角平分線交線段AC於D，則D點坐標爲__________。

【解答】$(\frac{37}{10},1,\frac{3}{2})$

【詳解】

$A(4,1,3)$，$B(6,3,4)$，$C(3,1,-2)$，$\overline{BA}=3$，$\overline{BC}=7$

$\because$ D 是$\angle B$ 之角平分線與線段 AC 之交點　$\therefore\ \frac{\overline{DA}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}=\frac{3}{7}$(內分比性質)

$\because$ 由分點公式 $D(\frac{3\times3+7\times4}{3+7},\frac{3\times1+7\times1}{3+7},\frac{3\times(-2)+7\times3}{3+7})=(\frac{37}{10},1,\frac{3}{2})$

15.有一隻小螞蟻在建立了直角坐標系的空間中在斜坡上順著向量$\vec{v}$爬行，向量$\vec{v}=(-2,-1,2)$，起始點的位置是$(1,2,3)$。在此直角坐標系裡，x，y，z 軸上的一單位皆代表一公分長，小螞蟻每公鐘爬行 9 公分。若爬行方向不變，則小螞蟻 5 分鐘後的位置在哪裡？以坐標表示，不必寫出單位。

【解答】$(-29,-13,33)$

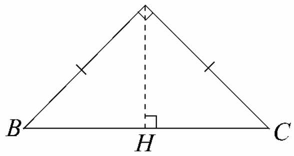
【詳解】

$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{(-2,-1,2)}{3}=(\frac{-2}{3},\frac{-1}{3},\frac{2}{3})$（單位向量），小螞蟻共爬了 $9\times5=45$ 公分

所求$=(1,2,3)+45(\frac{-2}{3},\frac{-1}{3},\frac{2}{3})=(-29,-13,33)$

16.設點 $A(5,4,7)$，$B(2,6,1)$，$C(-1,1,9)$，求

(1)△ABC 的面積。　(2)點 A 到 $\overleftrightarrow{BC}$ 的距離。



【解答】$\frac{49}{2}$，$\frac{7}{\sqrt{2}}$

$\triangle ABC = \frac{1}{2}\sqrt{\overline{AB}^2 \cdot \overline{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} = \frac{49}{2}$ ，

$\triangle ABC = \frac{1}{2}\ \overline{BC} \times \overline{AH} \Rightarrow \frac{49}{2} = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2}.\overline{AH}$ ，A 到 $\overleftrightarrow{BC}$ 距離 $= \overline{AH} = \frac{7}{\sqrt{2}}$

17.設空間向量 $\bar{a}$ 的方向角爲 α，β，γ，$0 < \alpha$，β，$\gamma < \pi$，則 $\csc^2\alpha + 9\csc^2\beta + 25\csc^2\gamma$ 的最小值爲__________。

【解答】$\frac{81}{2}$

【詳解】

$\because\ \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$，由柯西不等式

$\therefore\ (1+3+5)^2 \le (\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)[(\frac{1}{\sin\alpha})^2 + (\frac{3}{\sin\beta})^2 + (\frac{5}{\sin\gamma})^2]$

$\Rightarrow\quad 81 \le 2(\csc^2\alpha + 9\csc^2\beta + 25\csc^2\gamma)$

$\therefore\ \csc^2\alpha + 9\csc^2\beta + 25\csc^2\gamma \ge \frac{81}{2}$ $\therefore$ 最小值爲 $\frac{81}{2}$