<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高二(上)平時測驗　　日期：94.10.06</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">2-2
空間座標</td><td>班級</td><td>普二　　班</td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、選擇題(每題 10 分)

1. 一線段 $\overline{AB}$ 在 xy 平面，yz 平面，zx 平面上的正射影長分別為 4，$\sqrt{15}$，$\sqrt{21}$，則 $\overline{AB}$ 的長為(A) 5　(B) $\sqrt{21}$　(C) $\dfrac{7}{\sqrt{2}}$　(D) $\sqrt{26}$　(E) $\sqrt{30}$

【解答】(D)

【詳解】

設 $A(0，0，0)$，$B(a，b，c)$，則 $\sqrt{a^2+b^2}=4$，$\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{15}$，$\sqrt{c^2+a^2}=\sqrt{21}$

$\Rightarrow\ a^2+b^2=16$，$b^2+c^2=15$，$c^2+a^2=21\ \Rightarrow\ a^2+b^2+c^2=26$

$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{26}$

2. 設兩平面 E_1，E_2 交於一直線 L，平面 E_1 有一點 A，A 在平面 E_2 之正射影點 B，自 B 作 L 的垂直線垂足為 C，若 $\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=12$，則

(1) $\overline{BC}$ =(A) $3\sqrt{3}$　(B) $4\sqrt{3}$　(C) $5\sqrt{3}$　(D) $6\sqrt{3}$　(E) $7\sqrt{3}$

(2)兩平面之銳交角為(A) 15°　(B) 30°　(C) 45°　(D) 60°　(E) 75°

【解答】(1) (D)　(2) (B)

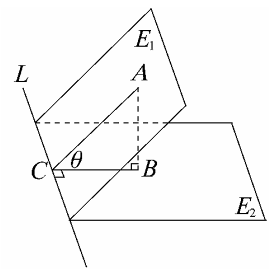
【詳解】

(1) $\because\ \overline{AB}\perp E_2\ \therefore\ \overline{AB}\perp\overline{BC}\ \Rightarrow\ \angle ABC=90°$，由畢氏定理：$\overline{BC}^2+\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$

$\because\ \overline{AB}=6$，$\overline{AC}=12\ \therefore\ \overline{BC}^2=12^2-6^2=108\ \Rightarrow\ \overline{AB}=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$

(2) $\because\ \overline{AB}\perp E_2$，$\overline{BC}\perp L$ 於 C　$\therefore$　由三垂線定理知 $\overline{AC}\perp L$ 於 C

$\Rightarrow\ \angle ACB$ 為此二面角的平面角，令之為 θ，則 $\sin\theta=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}\ \therefore\ \theta=30°$



3. 空間一點 $P(1，-2，3)$

(1) P 點到 xy 平面的距離為(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) $\sqrt{5}$　(E) $\sqrt{13}$

(2) P 點到 yz 平面的距離為(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) $\sqrt{5}$　(E) $\sqrt{13}$

(3) P 點到 x 軸的距離為(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) $\sqrt{5}$　(E) $\sqrt{13}$

(4) P 點到 z 軸的距離為(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) $\sqrt{5}$　(E) $\sqrt{13}$

【解答】(1) (C)　(2) (A)　(3) (E)　(4) (D)

【詳解】

$P(a，b，c)=P(1，-2，3)$，P 到 xy 平面的距離 $=|c|=3$，P 到 yz 平面的距離 $=|a|=1$

P 到 x 軸的距離 $=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$，$P$ 到 z 軸的距離 $=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

4. (複選)已知 $P(-2，3，-5)$是空間上的定點，下列敘述何者爲真？
(A) P 相關於原點的對稱點是$(2，-3，5)$　　(B) P 相關於 yz 平面的對稱點是$(2，3，-5)$
(C) P 相關於 x 軸的對稱點是$(-2，-3，5)$　(D) P 到 xz 平面的距離爲 3
(E) P 到 y 軸的距離爲$\sqrt{29}$

【解答】(A)(B)(C)(D)(E)

【詳解】

(A)設對稱點爲$P'(x，y，z)$，則$(\frac{-2+x}{2}，\frac{3+y}{2}，\frac{-5+z}{2})=(0，0，0)$，得$P'(2，-3，5)$

(B)$P(-2，3，-5)$在yz平面之投影點爲$(0，3，-5)$，利用中點公式得對稱點$(2，3，-5)$

(C)$P(-2，3，-5)$在x軸之投影點爲$(-2，0，0)$，利用中點公式得對稱點$(-2，-3，5)$

(D)$P(-2，3，-5)$在xz平面之投影點$P_{xz}=(-2，0，-5)$，故P到xz平面之距離$\overline{PP_{xz}}=3$

(E)$P(-2，3，-5)$在y軸之投影點$P_y=(0，3，0)$，故P到y軸之距離 $=\overline{PP_y}=\sqrt{29}$

二、填充題(每題 10 分)

1. 設$A(1，-3，5)$與$B(2，1，-4)$是空間中兩點，P是x軸上一點，求$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$的最小值爲_
。

【解答】$\frac{103}{2}$

【詳解】

$\because\ P\in x$軸　$\therefore$　設$P(t，0，0)$

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=[(t-1)^2+(-3)^2+5^2]+[(t-2)^2+1^2+(-4)^2]$

$=2t^2-6t+56=2(t-\frac{3}{2})^2+\frac{103}{2}$

當$t=\frac{3}{2}$時，$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$有最小值爲$\frac{103}{2}$

2. 空間中三點$A(3，0，0)$，$B(0，4，0)$，$C(0，0，5)$，則$\triangle ABC$的形狀是__________三角形。
（請填直角，等腰，銳角，鈍角，…等等）

【解答】銳角

【詳解】三邊長分別爲$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=\sqrt{41}$，$\overline{CA}=\sqrt{34}$

$(\sqrt{41})^2<5^2+(\sqrt{34})^2$，即$\overline{BC}^2<\overline{AB}^2+\overline{CA}^2\Rightarrow$最大角$\angle A$爲銳角，$\triangle ABC$爲銳角三角形

3. 設$P(x，y，z)$爲第一卦限上的點，已知P到$x，y，z$軸之距離分別爲$\sqrt{41}$，$\sqrt{65}$，$\sqrt{74}$，
則P之坐標爲__________。

【解答】$(7，5，4)$

【詳解】$\begin{cases} y^2+z^2=41\cdots\cdots① \\ x^2+z^2=65\cdots\cdots② \\ x^2+y^2=74\cdots\cdots③ \end{cases}$，$\frac{①+②+③}{2}$　$\Rightarrow$　$x^2+y^2+z^2=90$　$\cdots\cdots④$

④$-$①，④$-$②，④$-$③分別得$x^2=49$，$y^2=25$，$z^2=16$　$\therefore$　$P(7，5，4)$

4. 設$A(-1，1，9)$，$B(5，4，7)$，則$\overline{AB}=$__________。

【解答】7

【詳解】 $\overline{AB}=\sqrt{(5+1)^2+(4-1)^2+(7-9)^2}=\sqrt{36+9+4}=7$

5. 設$A(3，-1，2)$，$B(2，1，1)$，若點P在zx平面上使$\triangle ABP$爲正三角形，則P點坐標爲__________或__________。

【解答】$(1，0，3)$或$(4，0，0)$

【詳解】

$\because$ P在zx平面上 $\therefore$ 設$P(x，0，z)$，由$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{AB}$得

$\sqrt{(x-3)^2+1+(z-2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+1+(z-1)^2}=\sqrt{1+4+1}$

$\Rightarrow \begin{cases}(x-3)^2+1+(z-2)^2=6\\(x-2)^2+1+(z-1)^2=6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2+z^2-6x-4z=-8 \cdots\cdots ①\\x^2+z^2-4x-2z=0 \quad \cdots\cdots ②\end{cases}$

①$-$②得 $-2x-2z=-8$ $\Rightarrow$ $x+z=4$ $\therefore$ $z=4-x$代入②得

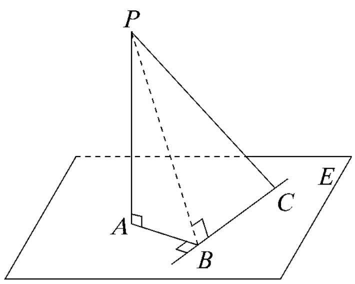
$x^2+(4-x)^2-4x-2(4-x)=0$ $\Rightarrow$ $x^2-5x+4=0$ $\Rightarrow$ $x=1$ 或$x=4$

$\therefore$ $z=3$ 或$z=0$，故$P(1，0，3)$或$P(4，0，0)$

6. 設點A，B，C在平面E上，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$，$\overline{PA}$垂直平面$E$於點$A$，若$\overline{PA}=3$，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=12$，則$\overline{PC}=$__________。

【解答】13

【詳解】



$\overline{PA}\perp\overline{AB}$，$\overline{AB}\perp\overline{BC}$ $\therefore$ $\overline{PB}\perp\overline{BC}$（三垂線定理）

$\therefore$ $\overline{PB}=\sqrt{\overline{PA}^2+\overline{PB}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

又$\overline{PC}=\sqrt{\overline{PB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{25+144}=13$

7. 設點$A(3，4，5)$，$B(-1，2，1)$，而點P在xy平面上移動，則$\triangle ABP$的最小周長爲__________。

【解答】$6+2\sqrt{14}$

【詳解】

xy平面的方程式爲$z=0$ $\therefore$ 點$A(3，4，5)$，$B(-1，2，1)$在xy平面的同側

$\because$ $A(3，4，5)$對於xy平面的對稱點爲$A'(3，4，-5)$

$\therefore$ $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{P'A}+\overline{PB}\geq\overline{A'B}=2\sqrt{14}$

$\therefore$ $\triangle ABP$的周長 $=\overline{AB}+\overline{PA}+\overline{PB}\geq\overline{AB}+2\sqrt{14}=6+2\sqrt{14}$

$\therefore$ $\triangle ABP$的最小周長爲$6+2\sqrt{14}$

8. 平面E與平面F所夾銳角θ，E上一個三角形的邊長分別爲5，12，13，且此三角形在平面F上的正射影也是一個三角形，其面積爲$15\sqrt{3}$，則$\theta=$__________。

【解答】$\theta=30°$

【詳解】

邊長 5，12，13 的三角形爲直角三角形，其面積 $=\frac{1}{2}\times 5\times 12=30$

$\therefore\quad 30\cos\theta=15\sqrt{3}\quad\Rightarrow\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，知$\theta=30°$

9. 不共面三射線$\overrightarrow{OX}$，$\overrightarrow{OY}$，$\overrightarrow{OZ}$兩兩夾成 30°角，點 $P\in\overrightarrow{OX}$，$\overline{OP}=2$，P 至平面 YOZ 的投影爲 Q，Q 到$\overrightarrow{OY}$的垂足爲 R，$\overleftrightarrow{QR}$交$\overleftrightarrow{OZ}$於點 S，求$\overline{OR}$與$\overline{PS}$的長。

【解答】$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}-\sqrt{2}$

【詳解】

$\overline{PQ}\perp\overline{RQ}$，$\overline{QR}\perp\overline{OY}\quad\Rightarrow\quad\overline{PR}\perp\overline{OR}$（三垂線定理）

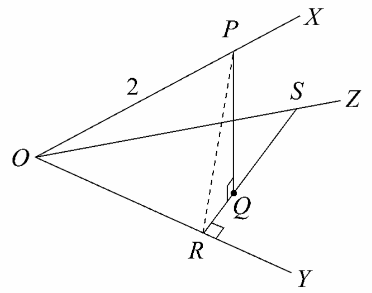
在△OPR 中，$\overline{OP}=2$，$\angle POR=30°$，$\angle PRO=90°\quad\Rightarrow\quad\overline{OR}=\sqrt{3}$

在△ORS 中，$\overline{OR}=\sqrt{3}$，$\angle ROS=30°$，$\angle SRO=90°\quad\Rightarrow\quad\overline{OS}=2$

在△POS 中，由餘弦定理

$\therefore\quad \overline{PS}^2=\overline{OS}^2+\overline{OP}^2-2\overline{OS}\cdot\overline{OP}\cos30°=4+4-2(2)(2)(\frac{\sqrt{3}}{2})=8-4\sqrt{3}$

$\therefore\quad \overline{PS}=\sqrt{8-2\sqrt{12}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$



10.長方體相鄰三邊$\overline{OA}$，$\overline{OB}$，$\overline{OC}$的長分別爲 2，4，3，

(1)作$\overline{CH}\perp\overline{AB}$於 H，求$\overline{OH}=$__________與$\overline{CH}=$__________。

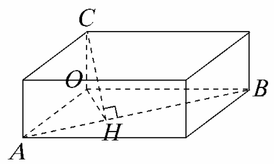
(2)求△ABC 的面積____________。

(3)求點 O 到平面 ABC 的距離______________。

【解答】(1)$\overline{OH}=\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{\overline{AB}^2}=\frac{4}{\sqrt{5}}$，$\overline{CH}=\sqrt{\overline{OC}^2+\overline{OH}^2}=\sqrt{\frac{61}{5}}=\frac{\sqrt{305}}{5}$　(2)△$ABC=\sqrt{61}$

(3)$\frac{12}{\sqrt{61}}$

【詳解】



右圖中

(1) △OAB 中，$\angle AOB=90°$，$\overline{OA}=2$，$\overline{OB}=4$

因$\overline{OC}\perp\overline{OA}$，$\overline{OC}\perp\overline{OB}\quad\Rightarrow\quad\overline{OC}\perp$ 平面 OAB

又$\overline{CH}\perp\overline{AB}$，故$\overline{OH}\perp\overline{AB}$（三垂線定理之另一形式－逆定理）

$\therefore\quad\overline{OH}\cdot\overline{AB}=\overline{OA}\cdot\overline{OB}\quad\Rightarrow\quad\overline{OH}\cdot\sqrt{2^2+4^2}=2\times4\quad\Rightarrow\quad\overline{OH}=\frac{8}{2\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$

又$\overline{CH}=\sqrt{\overline{CO}^2+\overline{OH}^2}=\sqrt{3^2+\frac{16}{5}}=\sqrt{\frac{61}{5}}=\frac{\sqrt{305}}{5}$

(2) $\triangle ABC$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}\,\overline{AB}\cdot\overline{CH}=\dfrac{1}{2}\sqrt{20}\cdot\sqrt{\dfrac{61}{5}}=\sqrt{61}$

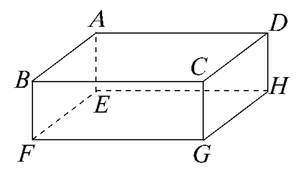
(3)設點 O 到平面 ABC 的距離為 d，三角錐 $OABC$ 的體積 $=\dfrac{1}{3}\triangle ABC\cdot d=\dfrac{1}{3}\triangle OAB\cdot\overline{OC}$

$\therefore\ \sqrt{61}\,d=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot 3$，故 $d=\dfrac{12}{\sqrt{61}}$

11.如下圖，一長方體 $ABCD$ - $EFGH$，已知 $\overline{AE}=1$，$\overline{AB}=3$，$\overline{AD}=5$，求

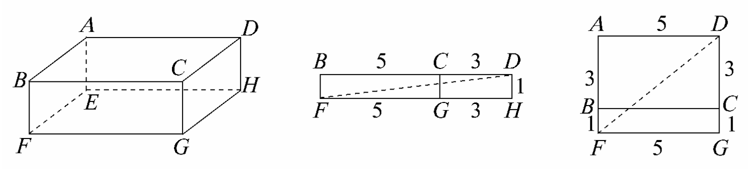
(1)一隻螞蟻從 F 點爬到 D 點，其爬行所經最短的距離。

(2)一隻蚊子從 A 點飛到 G 點，其飛行所經最短的距離。



【解答】(1) $\sqrt{41}$　(2) $\sqrt{35}$

【詳解】



(1)考慮把平面 $BCGF$ 與 $CGHD$ 攤平；$FGCB$ 與 $CDAB$ 攤平，如上圖

則爬行側面之最短路線長為 $\sqrt{1+(5+3)^2}=\sqrt{65}$

爬行向上之最短路線長為 $\sqrt{5^2+(1+3)^2}=\sqrt{41}$

$\therefore$　所求最短路線長為 $\sqrt{41}$

(2)飛行所經最短路線長就是對角線 $\overline{AG}$ 之長 $=\sqrt{1^2+3^2+5^2}=\sqrt{35}$