高雄市明誠中學 高二(上)平時測驗 日期：94.10.06					
範圍	2-1 空間基本概念	班級	普二　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. (複選)下列有關空間的直線與平面的關係，哪些命題是正確的？
   (A)若兩直線L_1，L_2分別與直線L平行，則$L_1 // L_2$
   (B)若兩直線L_1，L_2分別與平面E平行，則$L_1 // L_2$
   (C)若兩直線L_1，L_2同時垂直平面E，則$L_1 // L_2$
   (D)設直線L在平面E_1上，若L垂直平面E_2，則$E_1 \perp E_2$
   (E)設兩直線L_1，L_2在E上，若直線L同時垂直L_1，L_2，則$L \perp E$

【解答】(A)(C)(D)

【詳解】

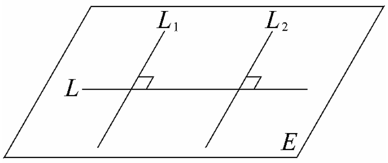
(A)正確，因$L_1 // L$，$L_2 // L$，故L_1，L_2分別與L沒有交點且不歪斜，所以L_1與L_2沒有交點且不歪斜，即$L_1 // L_2$

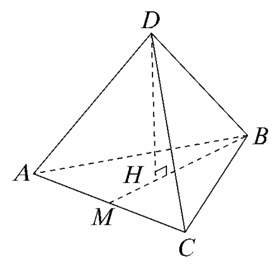
(B)錯誤，畫圖可知L_1與L_2可能相交或歪斜

(C)正確。

(D)正確，若$L \perp E_2$，則包含L的平面E_1也垂直E_2

(E)錯誤，若平面E上的L_1與L_2平行，且$L \perp L_1$，$L \perp L_2$，則L不一定垂直E，見下圖，L可能在E上

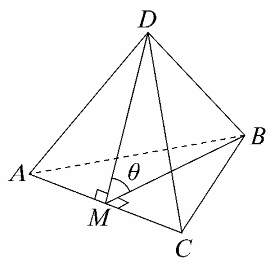




2. (複選)如圖，若 $D-ABC$ 爲一正四面體，邊長爲 10，$\overline{DH}$ 垂直平面 ABC 於 H，則下列何者正確？(A) H 爲△ABC 之內心　(B) $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$ (C) $\overline{DH} = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$　(D)若平面 ABC 與平面 ADC 的夾角爲θ，則 $\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$　(E) $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 的距離爲 $5\sqrt{2}$

【解答】(A)(B)(E)

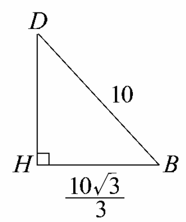
【詳解】



(A)對。若 $D-ABC$ 爲正四面體，則 H 爲△ABC 之內心，外心，重心及垂心

(B)對。M 爲 $\overline{AC}$ 之中點　∴　$\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BM}$，$\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DM}$
∴　$\overrightarrow{AC}$ 爲平面 BDM 之法向量，又 $\overline{BD}$ 在平面 BDM 上，故 $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$

(C)錯。$\overline{BH} = \dfrac{2}{3}\,\overline{BM} = \dfrac{2}{3} \cdot (10 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$

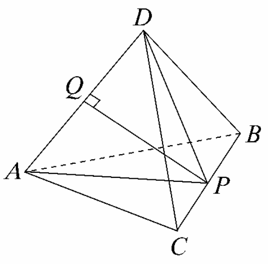


於直角△BDH 中，$\overline{DH}=\sqrt{\overline{BD}^2-\overline{BH}^2}=\sqrt{10^2-(\frac{10\sqrt{3}}{3})^2}=\frac{10\sqrt{6}}{3}$

(D)錯。M 為 $\overline{AC}$ 之中點　∴　$\overline{DM}\perp\overline{AC}$，$\overline{BM}\perp\overline{AC}$

∴　$\angle DMB$ 即為平面 ABC 與平面 ADC 之夾角θ

則 $\cos\theta=\frac{\overline{BM}^2+\overline{DM}^2-\overline{BD}^2}{2\overline{BM}\cdot\overline{DM}}=\frac{(5\sqrt{3})^2+(5\sqrt{3})^2-10^2}{2\cdot5\sqrt{3}\cdot5\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$



(E)對。設 P，Q 分別為 $\overline{BC}$ 及 $\overline{AD}$ 之中點△APD 中

∵　$\overline{PD}=\overline{PA}$ 且 Q 為 $\overline{AD}$ 之中點　∴　$\overline{PQ}\perp\overline{AD}$，

同理 $\overline{PQ}\perp\overline{BC}$，　故 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 之距離為 $\overline{PQ}$，即

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{PD}^2-\overline{DQ}^2}=\sqrt{(5\sqrt{3})^2-5^2}=5\sqrt{2}$

3. (複選)在空間中，下列敘述何者正確？

(A)任意兩相異平面一定有公垂面　　(B)任意兩相異直線一定有公垂線

(C)相交於一點的兩直線可決定唯一平面　(D)兩直線不相交必平行

(E)相異三點可決定唯一平面

【解答】(A)(B)(C)

【詳解】

(A)對　(B)對　(C)對　(D)錯。可能歪斜　(E)錯。不共線之相異三點可決定唯一平面

4. (複選)下列敘述何者正確？

(A)在空間中，一線段的垂直平分線只有一條

(B)任意三點可決定一個平面

(C)設平面E與直線L相交於A點，若平面E上有兩條通過A點的相異直線均與L垂直，則$L\perp E$

(D)在空間中，兩直線L_1，L_2若不相交，則$L_1 // L_2$

(E)給定一平面E及其外一點P，有無限多個平面通過P點且與E垂直

【解答】(C)(E)

【詳解】

(A)錯。無限多條

(B)錯。不共線三點可決定一個平面

(C)對。直線垂直平面的判別定理：若平面 E 上存在兩條通過 P 點的相異直線分別與 L 垂直，則 $L\perp E$

(D)錯。可能歪斜

(E)對。一平面 E 及其外一點 P，有無限多個平面過 P 點且與 E 垂直

5. (複選)在空間中，下列敘述何者正確？

(A)過直線外一點恰有一直線垂直於此直線　(B)過直線外一點恰有一直線平行於此直線

(C)過平面外一點恰有一直線垂直於此平面　(D)過平面外一點恰有一直線平行於此平面

【解答】(A)(B)(C)

【詳解】

(A)(B)(C)正確　(D)錯誤：過平面外一點，有無限多條直線平行此平面

6. (複選)下列敘述何者正確？

(A)空間中兩平行線決定一平面　(B)平面上兩相異直線，若不相交則必平行　(C)空間中任意三相異點決定一平面　(D)兩歪斜線恰有一條公垂線

【解答】(A)(B)(D)

【詳解】

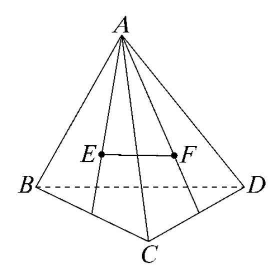
(A)○：設$L_1 // L_2$，則L_1，L_2共平面，記為E_1，L_1與在L_2上一點P決定唯一平面，記為E_2，但L_1，L_2共平面　∴　$E_1 = E_2$，所以兩平行線決定一平面

(B)○：由定義可知

(C)╳：取在同一直線上A，B，C相異三點，它們無法形成一平面

(D)○

二、填充題(每題 10 分)

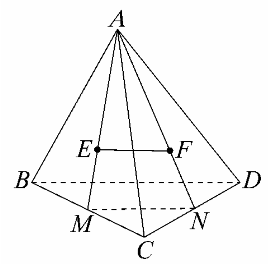


1. 下圖中，正四面體$ABCD$中，E，F分別是△ABC及△ACD之外心，則$\overline{EF}$ ： $\overline{BD}$ =________。

【解答】1：3

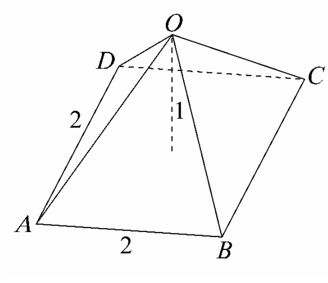
【詳解】

∵　△ABC 及△ACD 均為正△　∴　E，F 亦分別為△ABC 及△ACD 之重心，則$\overline{AE}$ 及$\overline{AF}$ 之延長線分別交$\overline{BC}$ 及$\overline{CD}$ 於中點 M，N，且$\overline{AE}$ ： $\overline{AM} = \overline{AF}$ ： $\overline{AN} = 2：3$，故$\dfrac{\overline{EF}}{\overline{MN}} = \dfrac{2}{3}$ ⋯①



於△BCD 中，$\overline{MN} // \overline{BD}$ 且$\dfrac{\overline{MN}}{\overline{BD}} = \dfrac{1}{2}$ ⋯⋯②

① × ②　⇒　$\dfrac{\overline{EF}}{\overline{MN}} \cdot \dfrac{\overline{MN}}{\overline{BD}} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2}$，即$\overline{EF}$ ： $\overline{BD} = 1：3$



2. 下圖是一個正四角錐，它的底面是一個邊長為 2 的正方形，此正四角錐的高為 1，則兩相鄰側面的夾角之度數為________。

【解答】120°

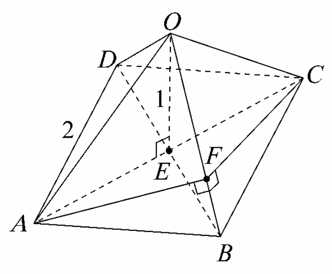
【詳解】

① $\overline{AB} = 2$，則$\overline{AE} = \dfrac{1}{2}\overline{AC} = \sqrt{2}$

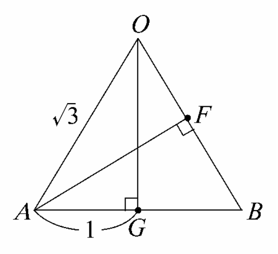
②於直角△AOE 中，$\overline{AO} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{OE}^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

③$F \in \overline{OB}$，使得$\overline{AF} \perp \overline{OB}$ 且$\overline{CF} \perp \overline{OB}$， 則$\angle AFC$ 即為平面 AOB 與平面 COB 之二面角（即為兩相鄰側面的夾角）

如左下圖，$\overline{OG} = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{AG}^2} = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$



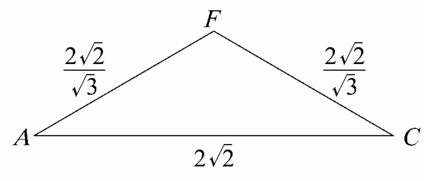
$\triangle AOB$ 之面積 $=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{OG}=\frac{1}{2}\overline{OB}\cdot\overline{AF}$



$\Rightarrow \overline{AF}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{OG}}{\overline{OB}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，同理

$\overline{CF}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

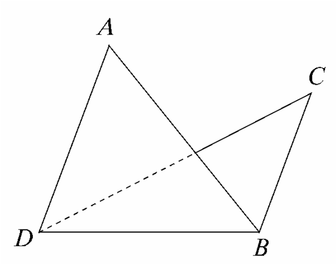
④如右圖，$\cos(\angle AFC)$



$$=\frac{(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^2+(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\frac{-1}{2},$$

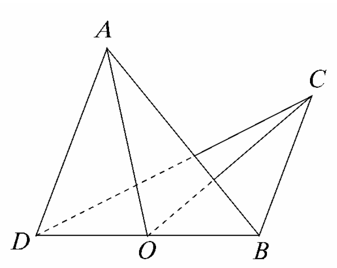
故所求夾角為 120°

3. 如下圖，將一張正方形的紙$ABCD$沿著對角線$\overline{BD}$摺起，使得$\angle ABC=60°$，則二平面ABD與BCD的夾角為__________。



【解答】90°

【詳解】



如左圖，取 O 為 $\overline{BD}$ 中點

$\therefore\ \overline{AO}\perp\overline{BD}$，$\overline{CO}\perp\overline{BD}$，設正方形 $ABCD$ 的邊長為 a

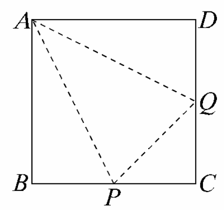
在$\triangle ABD$ 中，$\angle A=90°$，$\angle ABD=45°$ $\therefore\ \overline{AO}=\frac{a}{\sqrt{2}}=\overline{OC}$

在$\triangle ABC$ 中 $\because\ \overline{AB}=\overline{BC}=a$，$\angle ABC=60°$ $\Rightarrow\ \overline{AC}=a$

$\therefore\ \cos\angle AOC=\frac{\overline{OA}^2+\overline{OC}^2-\overline{AC}^2}{2\overline{OA}\cdot\overline{OC}}=0 \Rightarrow \angle AOC=90°$

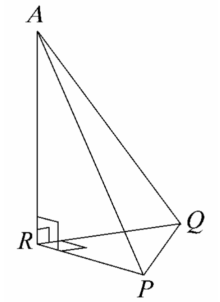
$\therefore$ 二平面 ABD 與 BCD 的夾角為 90°

4. 如右圖，正方形$ABCD$的邊長為a，而P，Q各為$\overline{BC}$，$\overline{CD}$的中點，今將此正方形沿虛線向上摺起，使B，C，D三點重合，令此重合點為R，則四面體A-PQR之體積為________。



【解答】$\frac{a^3}{24}$

【詳解】



所摺得的四面體，如上圖（B，C，D 重合為 R）

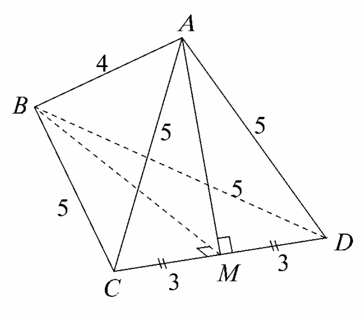
$\therefore\ \overline{AR}=\overline{AB}=a$，$\overline{RP}=\overline{RQ}=\overline{CQ}=\frac{a}{2}$，又 $\overline{RP}\perp\overline{RQ}$，$\overline{AR}\perp\overline{RQ}$，$\overline{AR}\perp\overline{RP}$

$\therefore$ 四面體的體積 $=\frac{1}{3}(\triangle RPQ)\cdot\overline{AR}=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2})\cdot a=\frac{a^3}{24}$

5. 設四面體$ABCD$中，$\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=5$，$\overline{AB}=4$，$\overline{CD}=6$，若平面$ACD$與平面$BCD$

的夾角爲θ，則$\sin\theta$ 之値爲__________。

【解答】$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



【詳解】

如左圖，M 爲$\overline{CD}$中點　∴　$\overline{CM}=\overline{MD}=3$

又$\overline{AM}\perp\overline{CD}$，$\overline{BM}\perp\overline{CD}$且$\overline{AC}=\overline{AD}=5$，$\overline{BC}=\overline{BD}=5$

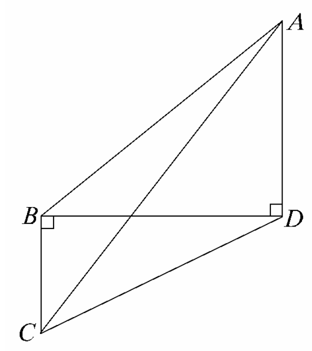
∴　$\overline{AM}=\overline{BM}=4$

在$\triangle ABM$ 中，$\overline{AB}=\overline{AM}=\overline{BM}=4$

∴　$\angle AMB=60°=\theta$　∴　$\sin\theta=\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. 如右圖，四面體$ABCD$，已知$\overline{BC}\perp\overline{BD}$，$\overline{AD}\perp$平面$BCD$，且$\overline{BC}=7$，$\overline{AB}=24$，$\overline{AD}=15$，(1) $\overline{AC}$的長度爲__________。

(2)若平面ABD和平面ACD所夾二面角的度量爲θ，則$\sin\theta$ 的値爲__。



【解答】(1) 25　(2) $\dfrac{7}{20}$

【詳解】

(1) $\overline{AD}\perp$平面BCD　$\Rightarrow$　$\overline{AD}\perp\overline{BD}$，$\overline{AD}\perp\overline{CD}$

已知$\overline{AB}=24$，$\overline{AD}=15$　∴　$\overline{BD}^2=24^2-15^2=351$

又$\overline{BC}\perp\overline{BD}$　$\Rightarrow$　$\overline{CD}^2=\overline{BD}^2+\overline{BC}^2=351+49=400$

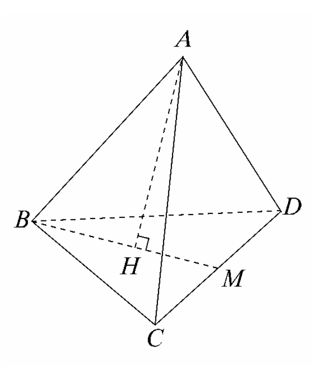
∴　$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2=15^2+400=25^2$　$\Rightarrow$　$\overline{AC}=25$

(2)因$\overline{AD}\perp\overline{BD}$，$\overline{AD}\perp\overline{CD}$　$\Rightarrow$　$\angle BDC$爲二面角B-AD-C的平面角，即$\angle BDC=\theta$

∴　$\sin\theta=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{DC}}=\dfrac{7}{20}$

7.由四個全等正三角形所拼成的立體爲正四面體。設正四面體 $ABCD$ 的各稜長爲 a，求此正四面體的高及體積。

【解答】$\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$，$\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$



【詳解】

正四面體$ABCD$，如右圖

(1)設M爲$\overline{CD}$的中點，並自A作底BCD的垂線，其垂足爲H，

則H是$\triangle BCD$的重心

∴　$\overline{BH}=\dfrac{2}{3}\overline{BM}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

故正四面體的高$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BH}^2}=\sqrt{a^2-(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

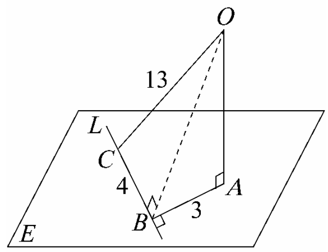
(2)正四面體之體積$V=\dfrac{1}{3}$(底面積)$\times$(高)$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}a=\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$

8.設空間中點 O 在平面 E 外，且在 E 的投影點爲 A，又 A 在 E 上一直線 L 的投影點爲 B，且 L 上一點 C 距 B 點爲 4，若$\overline{OC}=13$，$\overline{AB}=3$，則$\overline{OA}$長之值爲

(A) 9　(B) 10　(C) 11　(D) 12　(E) 13

【解答】(D)

【詳解】



如右圖，由三垂線定理得$\overleftrightarrow{OB}\perp L$

由直角△OBC可知$\overline{OB}^2=\overline{OC}^2-\overline{BC}^2=13^2-4^2=153$

另由直角△OAB可知$\overline{OA}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{153-3^2}=\sqrt{144}=12$