高雄市明誠中學 高三(上)平時測驗 日期：94.03.10					
範圍	數學乙矩陣	班級	普三 班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1.化簡$\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=$？(A) 2sin$\theta$ (B) 2cosθ (C) 2secθ (D) 2cscθ (E) 2tanθ

【解答】(D)

【詳解】

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2}{\sin\theta(1+\cos\theta)}=\frac{\sin^2\theta+1+2\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{2(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)}=\frac{2}{\sin\theta}=2\csc\theta$$

2.化簡$\dfrac{\sin(180^\circ-\theta)\cdot\tan^2(360^\circ-\theta)}{\cos(270^\circ+\theta)}-\dfrac{\cos(90^\circ-\theta)\cdot\csc^2(270^\circ-\theta)}{\sin(540^\circ-\theta)}=$

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) sinθ (E) cosθ

【解答】(A)

【詳解】原式 $=\dfrac{\sin\theta\cdot(-\tan\theta)^2}{\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta\cdot(-\sec\theta)^2}{\sin\theta}=\tan^2\theta-\sec^2\theta=-1$

3.$\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=\sqrt{3}$，$\angle B=75^\circ$，$\angle C=45^\circ$，則$\overline{AB}=$

(A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{3}-1$ (D) $\sqrt{2}$ (E) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

【解答】(D)

【詳解】

(1) $\angle A=180^\circ-\angle B-\angle C=60^\circ$ (2)由正弦定理，$\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}$

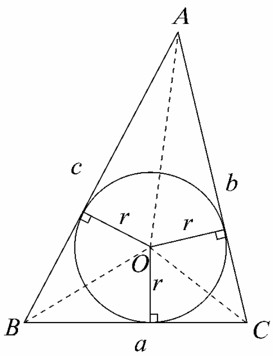
$\therefore\ \dfrac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}\ \Rightarrow\ \overline{AB}=\sqrt{2}$

4.$\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=5$，$\overline{AB}=6$，則$\triangle ABC$ 的內切圓面積 $=$

(A) 5π (B) $\dfrac{7}{2}\pi$ (C) $\dfrac{6}{5}\pi$ (D) $\dfrac{8\pi}{7}$ (E) $\dfrac{4}{3}\pi$

【解答】(D)

【詳解】 設$s=\dfrac{a+b+c}{2}$



(1) $\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA$

$=\dfrac{1}{2}cr+\dfrac{1}{2}ar+\dfrac{1}{2}br=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)=\dfrac{1}{2}r(2s)=r\cdot s$

(2)$\because\ s=\dfrac{a+b+c}{2}=7$

$\therefore\ \triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$（海龍Heron公式）

$=\sqrt{7(4)(2)(1)}=r\cdot 7\ \Rightarrow\ r=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

(3)$\therefore$ $\triangle ABC$內切圓面積$=\pi r^2=\dfrac{8}{7}\pi$

5.$\triangle ABC$ 的三高 $h_a=3$，$h_b=4$，$h_c=5$，則$\triangle ABC$ 是

(A)等腰三角形　(B)鈍角三角形　(C)正三角形　(D)直角三角形　(E)等腰直角三角形

【解答】(B)

【詳解】

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}ah_a=\dfrac{1}{2}bh_b=\dfrac{1}{2}ch_c \quad \Rightarrow \quad a:b:c=\dfrac{1}{h_a}:\dfrac{1}{h_b}:\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{3}:\dfrac{1}{4}:\dfrac{1}{5}=20:15:12$

$\because \quad a^2>b^2+c^2 \quad \therefore \quad \triangle ABC$ 為鈍角三角形

二、填充題(每題 10 分)

6.設$\sec\theta+\tan\theta=3$，則$\sec\theta$之值為__________。

【解答】$\dfrac{5}{3}$

【詳解】

由平方關係$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta \quad \therefore \quad \sec^2\theta-\tan^2\theta=1 \quad \Rightarrow \quad (\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta)=1$

又$\sec\theta+\tan\theta=3 \quad \therefore \quad \sec\theta-\tan\theta=\dfrac{1}{3}$

由$\begin{cases}\sec\theta+\tan\theta=3 \cdots\cdots① \\ \sec\theta-\tan\theta=\dfrac{1}{3}\cdots\cdots②\end{cases}$

①+②得 $2\sec\theta=\dfrac{10}{3} \quad \therefore \quad \sec\theta=\dfrac{5}{3}$

7.設$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{5}{4}$，求$\sin\theta\cdot\cos\theta=$__________。

【解答】$\dfrac{9}{32}$

【詳解】$(\sin\theta+\cos\theta)^2=(\dfrac{5}{4})^2 \quad \Rightarrow \quad (\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{25}{16}$

$\Rightarrow \quad 1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{25}{16} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta\cos\theta=\dfrac{9}{32}$

8.設$\tan\theta=\dfrac{1}{3}$，則$\dfrac{3\cos\theta+4\sin\theta}{\cos\theta+2\sin\theta}$之值為__________。

【解答】$\dfrac{13}{5}$

【詳解】$\dfrac{3\cos\theta+4\sin\theta}{\cos\theta+2\sin\theta}=\dfrac{\dfrac{3\cos\theta}{\cos\theta}+\dfrac{4\sin\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta}+\dfrac{2\sin\theta}{\cos\theta}}=\dfrac{3+4\tan\theta}{1+2\tan\theta}=\dfrac{3+4\cdot\dfrac{1}{3}}{1+2\cdot\dfrac{1}{3}}=\dfrac{13}{5}$

9.$(\sin\theta+\csc\theta)^2+(\cos\theta+\sec\theta)^2-(\tan\theta+\cot\theta)^2$之值為__________。

【解答】5

【詳解】$(\sin\theta+\csc\theta)^2+(\cos\theta+\sec\theta)^2-(\tan\theta+\cot\theta)^2$

$=(\sin^2\theta+2+\csc^2\theta)+(\cos^2\theta+2+\sec^2\theta)-(\tan^2\theta+2+\cot^2\theta)$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2+(\csc^2\theta-\cot^2\theta)+(\sec^2\theta-\tan^2\theta)=1+2+1+1=5$

10.已知$\sin^3\theta+\cos^3\theta=1$，則$\sin\theta+\cos\theta$ 之值爲__________。

【解答】1

【詳解】令$\sin\theta+\cos\theta=t$ $\quad\therefore\quad t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)=1$

$\Rightarrow\quad t^3-3(\frac{t^2-1}{2})t=1\quad\Rightarrow\quad(t-1)^2(t+2)=0$，但$t\neq-2\quad\therefore\quad t=1$

11.已知圓內接四邊形$ABCD$，$\overline{AD}=\overline{BC}=3$，$\overline{CD}=5$，$\overline{DA}=8$，則$\overline{BD}=$__________。

【解答】7

【詳解】利用餘弦定理，則

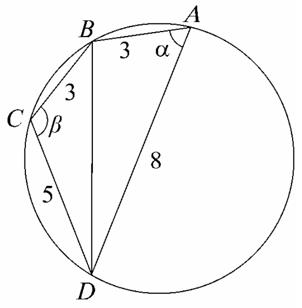
$$\begin{cases}\overline{BD}^2=8^2+3^2-2\times8\times3\times\cos\alpha\ \cdots\cdots①\\ \overline{BD}^2=8^2+3^2-2\times8\times3\times\cos\beta\ \cdots\cdots②\end{cases}$$

$①=②\quad\Rightarrow\quad 64-48\cos\alpha=25-30\cos\beta$

$64-48\cos\alpha=25-30(-\cos\alpha)$（$\because\quad\alpha+\beta=\pi$）

$64-48\cos\alpha=25+30\cos\alpha\quad\Rightarrow\quad\cos\alpha=\frac{1}{2}$代入①

$\overline{BD}^2=8^2+3^2-2\times8\times3\times\frac{1}{2}=49\quad\therefore\quad\overline{BD}=7$



12.sin30°．cos45°．tan60°．cot45° = __________。

【解答】$\frac{\sqrt{6}}{4}$

【詳解】原式 $=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3}\cdot1=\frac{\sqrt{6}}{4}$

13.求下列各值：

(1) $(1+\sin 45°+\sin 60°)(1-\cos 45°+\cos 30°)=$__________。

(2) $\log_6\tan 60°+\log_6\cot 30°+\log_6\sec 45°+\log_6\csc 45°=$__________。

【解答】(1) $\frac{5}{4}+\sqrt{3}$ (2)1

【詳解】

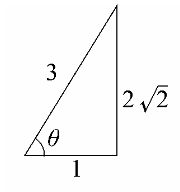
(1)原式 $=(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2})=1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}+\sqrt{3}$

(2)原式 $=\log_6(\tan 60°\cdot\cot 30°\cdot\sec 45°\cdot\csc 45°)=\log_6(\frac{\sqrt{3}}{1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{1})=\log_6 6=1$

14.設θ爲銳角且$\sec\theta=3$，求$\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=$__________。

【解答】6

【詳解】原式 $=\dfrac{\dfrac{1}{3}}{1+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}+\dfrac{1+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}{\dfrac{1}{3}}$



$=\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}+(3+2\sqrt{2})=(3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})=6$

15.設 $2+\cos^2\theta=7\sin\theta\cos\theta$，

(1)若此式可化爲$\tan^2\theta+a\tan\theta+b=0$，則$(a，b)=$__________。 (2) $\tan\theta=$__________。

【解答】(1) $(-\dfrac{7}{2}，\dfrac{3}{2})$ (2)$\dfrac{1}{2}$或 3

【詳解】同除以$\cos^2\theta\Rightarrow\dfrac{2}{\cos^2\theta}+1=7\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\Rightarrow 2\sec^2\theta+1=7\tan\theta$

$\Rightarrow 2(\tan^2\theta+1)+1=7\tan\theta\Rightarrow 2\tan^2\theta-7\tan\theta+3=0$

$\Rightarrow \tan^2\theta-\dfrac{7}{2}\tan\theta+\dfrac{3}{2}=0\Rightarrow(a,b)=\ (-\dfrac{7}{2}，\dfrac{3}{2})$

$\Rightarrow(2\tan\theta-1)(\tan\theta-3)=0\Rightarrow\ \tan\theta=\dfrac{1}{2}$或 3

16.$\triangle ABC$中，$a=2$，$b=3$，$c=4$，h_a表a邊之高，m_c表$c=\overline{AB}$ 邊之中線長，求

(1)$\triangle ABC$之面積 $=$__________。 (2) $h_a=$__________。 (3) $m_c=$__________。

【解答】(1)$\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$ (2)$\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$ (3)$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

【詳解】

(1) $s=\dfrac{2+3+4}{2}=\dfrac{9}{2}$ $\therefore$ $\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{\dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{2}}=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$

(2)$\dfrac{3\sqrt{15}}{4}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot h_a$ $\Rightarrow$ $h_a=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$

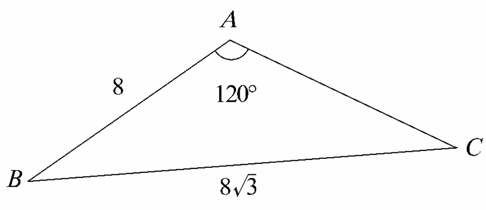
(3) 由中線公式$a^2+b^2=2m_c{}^2+\dfrac{1}{2}c^2$，知 $m_c=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(4+9)-16}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

17.在$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=8\sqrt{3}$，$\angle A=120°$，則$\triangle ABC$面積 $=$__________。

【解答】$16\sqrt{3}$

【詳解】

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{8\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{8}{\sin C}$



$\Rightarrow$ $\sin C=\dfrac{1}{2}$ $\therefore$ $\angle C=30°$或 $150°$（不合）

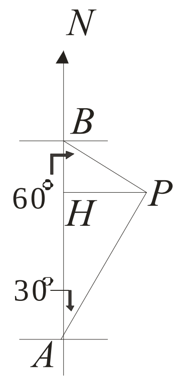
$\angle B=180°-\angle A-\angle C=30°$，

$\therefore \triangle ABC$ 面積 $=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\sin B=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\sqrt{3}\cdot\sin 30^\circ=16\sqrt{3}$

18.有一船向北航行，在北 30°東的方位發現一燈塔後，繼續向北航行 8 公里，此時燈塔方位爲南 60°東，則該船航線與燈塔的最短距離爲＿＿＿＿＿。

【解答】$2\sqrt{3}$ 公里

【詳解】



A 點向北出發，$\overline{PH}\perp\overline{AB}$ 於 H，$\overline{AB}=8\Rightarrow\overline{PA}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\overline{AB}=4\sqrt{3}$

船航線與燈塔的最短距離爲 $\overline{PH}=\frac{1}{2}\overline{PA}=2\sqrt{3}$