高雄市明誠中學 高三(上)平時測驗 日期：93.12.30					
範圍	數學 Book3 Chap4 圓與球	班級 座號	普三 班	姓名	

一、選擇題(每題 10 分)

1.下列五個點，哪一個點與球面S：$x^2+y^2+z^2-2x-2y+4z-3=0$ 距離最遠？

(A) $(-1，-1，1)$ (B) $(1，2，3)$ (C) $(-3，-2，1)$ (D) $(-2，-3，-1)$

(E) $(-3，-1，-2)$

【解答】(C)

五個點代入S的方程式，依次得值爲 8，17，25，17，11

$\therefore$ 五個點都在球面S的外部：$(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2>9$

而$(-3，-2，1)$代入得值最大，即$(-3，-2，1)$到球心最遠

2.下列哪一個平面與球面S：$x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-19=0$ 相交所成的圓面積最大？

(A) $x+y+z=0$ (B) $x-2y=0$ (C) $z+1=0$ (D) $2x-y-2z=5$ (E) $3x+4y-1=0$

【解答】(C)

【詳解】

S：$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=25$，球心爲$Q(1，-2，-1)$，半徑$r=5$

(A) Q到$x+y+z=0$ 之距離 $=\dfrac{|1-2-1|}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}<r$

(B) Q到$x-2y=0$ 之距離 $=\dfrac{|1+4|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}<r$

(C) Q到$z+1=0$ 之距離 $=0$

(D) Q到 $2x-y-2z-5=0$ 之距離 $=\dfrac{1}{3}<r$

(E) Q到 $3x+4y-1=0$ 之距離 $=\dfrac{6}{5}<r$

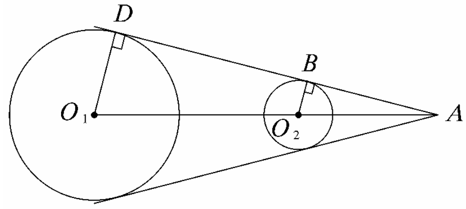
$\therefore$ $z+1=0$ 與球面S截出「大圓」，其面積 25π 爲最大

3. (複選)兩圓C_1：$x^2+y^2-6x-2y+1=0$，C_2：$x^2+y^2+4x+3=0$ 外公切線夾角爲θ

（$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$），則下列敘述何者正確？

(A)外公切線段長爲$\sqrt{22}$ (B)內公切線段長爲$\sqrt{10}$ (C)兩外公切線的交點爲$(-\dfrac{9}{2}，-\dfrac{1}{2})$

(D)兩內公切線的交點爲$(-\dfrac{3}{4}，\dfrac{1}{4})$ (E)$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3}{5}$



【解答】(A)(B)(C)(D)

【詳解】

(1) C_1：$(x-3)^2+(y-1)^2=9$，C_2：$(x+2)^2+y^2=1$，

圓心$O_1(3，1)$，$O_2(-2，0)$，半徑$R=3$，$r=1$

(2)外公切線段長 $=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(R-r)^2}=\sqrt{26-4}=\sqrt{22}$

(3)內公切線段長 $=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(R+r)^2}=\sqrt{26-16}=\sqrt{10}$

(4)在△O_1AD中，$\overline{AO_2}:\overline{AO_1}=\overline{BO_2}:\overline{DO_1}=\dfrac{r}{R}=\dfrac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $A(-\dfrac{9}{2}，-\dfrac{1}{2})$

(5)同(4)，兩內公切線的交點爲$(-\dfrac{3}{4}，\dfrac{1}{4})$

(6)在△O_2AB中，$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\overline{O_2B}}{\overline{O_2A}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{26}{4}}}=\dfrac{2}{\sqrt{26}}$

二、填充題(每題 10 分)

4. 過點$P(-2，8)$作圓$x^2+y^2-6x-6y-7=0$的切線，切點爲A，B，則直線AB的方程式爲_
 。

【解答】$x-y+5=0$

【詳解】$-2x+8y-6(\dfrac{-2+x}{2})-6(\dfrac{8+y}{2})-7=0\Rightarrow$ $x-y+5=0$

5. 設一三角形的三頂點爲$(-1，0)$，$(0，-1)$，$(-2，-1)$，此三角形外接圓爲圓C，

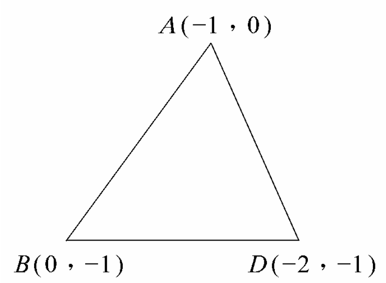
(1)試求圓C之圓心__________。

(2)通過圓外一點$P(-1，3)$且與圓C相切的直線斜率爲__________，P到切點的距離爲__________。

(3)承上，若R爲圓C上任一點，試求$\overline{PR}$的最大值爲__________。

【解答】(1) $(-1，-1)$ (2) $\pm\sqrt{15}$ ，$\sqrt{15}$ (3) 5

【詳解】



(1) $\overline{AB}$中垂線L_1：$x-y=0$，$\overline{BD}$中垂線L_2：$x+1=0$，L_1，L_2交於$(-1，-1)$ ∴ 外接圓圓心$C(-1，-1)$，$\overline{CA}=1$

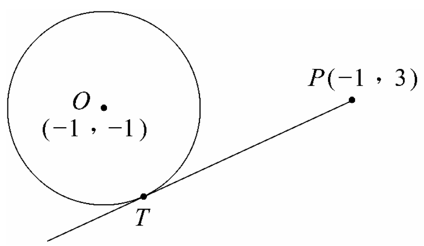
(2)設切線斜率m，切點T，$y-3=m(x+1)$，

即$mx-y+m+3=0$

圓心到切線距離$\dfrac{|-m+1+m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

$\Rightarrow$ $m^2+1=16$ $\Rightarrow$ $m=\pm\sqrt{15}$

$\overline{OP}=4$，$\overline{PT}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$



(3) $\overline{PR}=\overline{PO}+1=5$

6. 一圓過圓$x^2+y^2+2x-4y+1=0$與直線$2x-y+4=0$的交點且半徑爲 3，此圓有兩個，其中圓心在第一象限的圓之方程式爲__________。

【解答】$(x-1)^2+(y-1)^2=9$

【詳解】

過圓$x^2+y^2+2x-4y+1=0$與直線$2x-y+4=0$交點的圓系方程式爲

$(x^2+y^2+2x-4y+1)+k(2x-y+4)=0\Rightarrow x^2+y^2+2(k+1)x-(k+4)y+4k+1=0$……①

$\Rightarrow$ $(x+k+1)^2+(y-\dfrac{k+4}{2})^2=(k+1)^2+\dfrac{1}{4}(k+4)^2-(4k+1)=\dfrac{1}{4}(5k^2+16)$

半徑 3 $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{4}(5k^2+16)=9$ $\Rightarrow$ $k=\pm 2$ 代入①

得$x^2+y^2+6x-6y+9=0$及$x^2+y^2-2x-2y-7=0$

圓心在第一象限者爲$x^2+y^2-2x-2y-7=0$，即$(x-1)^2+(y-1)^2=9$

7. 有一圓的圓心$(-3，4)$，與直線 $3x-4y+5=0$ 相切，其圓方程式為__________。

【解答】$(x+3)^2+(y-4)^2=16$

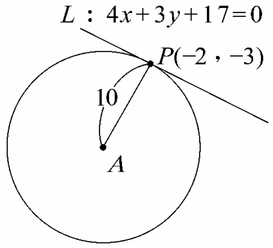
【詳解】

圓C的圓心$A(-3，4)$與直線L：$3x-4y+5=0$ 相切

故半徑$r=d(A，L)=\dfrac{|3\times(-3)-4\times4+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=4$，得圓方程式為$(x+3)^2+(y-4)^2=4^2$

8. 設圓C與直線L：$4x+3y+17=0$ 相切於$P(-2，-3)$，且圓C的半徑是 10，圓心在第一象限，則圓C的方程式為__________。

【解答】$(x-6)^2+(y-3)^2=100$



【詳解】

設圓心為A，$\overleftrightarrow{AP}$ 之參數式：$\begin{cases}x=-2+4t\\y=-3+3t\end{cases}$，$t\in R$，

取$A(-2+4t，-3+3t)$，$\overline{AP}^2=16t^2+9t^2$，$10^2=25t^2$，$t=\pm2$，

取$t=2$（$\because$ 圓心A在第一象限），$A(6，3)$

$\therefore$ C：$(x-6)^2+(y-3)^2=10^2$

9. 坐標平面上，圓C過點$A(1，4)$與$B(0，3)$，圓心在x軸上，則圓C方程式為__________。

【解答】$(x-4)^2+y^2=25$

【詳解】

設圓心P為$(t，0)$，則$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$ $\Rightarrow$ $(t-1)^2+4^2=(t-0)^2+3^2$ $\Rightarrow$ $t=4$

圓心$P(4，0)$，半徑$r^2=\overline{PB}^2=t^2+3^2=25$ $\therefore$ 圓C：$(x-4)^2+y^2=25$

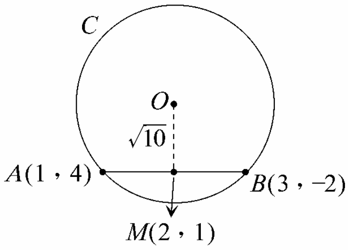
10. 設$A(1，4)$與$B(3，-2)$為坐標平面上兩點，若$\overline{AB}$為圓C的一弦，且距離圓心為$\sqrt{10}$，求圓C的方程式：__________。（兩解）

【解答】$(x+1)^2+y^2=20$ 或$(x-5)^2+(y-2)^2=20$

【詳解】$\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(-2-4)^2}=2\sqrt{10}$ $\therefore$ 圓C半徑 $=\sqrt{10+10}=\sqrt{20}$

設圓心$O(a，b)$，$\overline{AB}$ 中點$M(2，1)$

$\begin{cases}\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\\overline{OM}=\sqrt{10}\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}a-3b=-1\cdots\cdots①\\(a-2)^2+(b-1)^2=10\cdots\cdots②\end{cases}$



①代入②得$b=0$ 或 2，代回①得$a=-1$ 或 5，

故$(a，b)=(-1，0)$或$(5，2)$

$\therefore$ 圓C：$(x+1)^2+y^2=20$ 或$(x-5)^2+(y-2)^2=20$

11. 求過$P(1，1)$且與圓$x^2+(y-3)^2=1$ 相切的直線方程式：__________。（兩解）

【解答】$x=1$ 或 $y-1=-\dfrac{3}{4}(x-1)$

【詳解】$P(1，1)$代入圓方程式得 $1^2+(1-3)^2=5>1$ $\therefore$ P在圓外

設切線為$y-1=m(x-1)$，即$mx-y-m+1=0$

$\dfrac{|m\cdot0-3-m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$ $\Rightarrow$ $m=-\dfrac{3}{4}$ $\Rightarrow$ 切線$y-1=-\dfrac{3}{4}(x-1)$，另一無斜率，即$x=1$

12.若圓$x^2+y^2-6x+ky+\ell=0$ 切直線 $3x-4y=8$ 於點(4，1)，則 $2k+\ell$的值爲__________。

【解答】$\dfrac{7}{3}$

【詳解】圓$x^2+y^2-6x+ky+\ell=0$ 切直線 $3x-4y=8$ 於點(4，1)

故圓在點(4，1)的切線方程式 $4x+y-6\cdot\dfrac{4+x}{2}+k\dfrac{1+y}{2}+\ell=0$

$\Rightarrow\quad 2x+(2+k)y+k+2\ell-24=0$，此即爲 $3x-4y-8=0$

$\therefore\quad \dfrac{2}{3}=\dfrac{2+k}{-4}=\dfrac{k+2\ell-24}{-8}$，解得$k=\dfrac{-14}{3}$，$\ell=\dfrac{35}{3}$，所求 $2k+\ell=\dfrac{-28}{3}+\dfrac{35}{3}=\dfrac{7}{3}$

13.若$x^2+y^2+z^2-2kx-4ky+2z+4k^2+2k+4=0$ 之圖形爲球面，求k的範圍__________。

【解答】$k>3$ 或 $k<-1$

【詳解】$x^2+y^2+z^2-2kx-4ky+2z+4k^2+2k+4=0$

$\Rightarrow\quad (x-k)^2+(y-2k)^2+(z+1)^2=-4k^2-2k-4+k^2+4k^2+1=k^2-2k-3$

圖形爲球面 $\therefore\quad k^2-2k-3>0\quad\Rightarrow\quad(k-3)(k+1)>0\quad\Rightarrow\quad k>3$ 或$k<-1$

14.球心在y軸上且通過兩點(0，2，2)及(4，0，0)的球面方程式爲__________。

【解答】$x^2+(y+2)^2+z^2=20$

【詳解】球心在y軸上，設球心$Q(0，b，0)$，因球過兩點$A(0，2，2)$及$B(4，0，0)$

$\therefore\quad \overline{QA}=\overline{QB}$，得$(b-2)^2+4=4^2+b^2\quad\Rightarrow\quad b=-2$

球心$Q(0，-2，0)$，半徑$r=\overline{QA}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$，故球面方程式爲$x^2+(y+2)^2+z^2=20$

15.若過空間中四點(0，0，0)，(1，0，0)，(0，2，0)，(0，0，3)的球面方程式爲$x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$，則$d+e+f+g=$__________。

【解答】-6

【詳解】

球面S：$x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$

$$\begin{cases}(0,0,0)\\(1,0,0)\\(0,2,0)\\(0,0,3)\end{cases}\text{代入}S\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}g=0\\1+d+g=0\\4+2e+g=0\\9+3f+g=0\end{cases}，\text{得}\begin{cases}d=-1\\e=-2\\f=-3\\g=0\end{cases}$$

故$d+e+f+g=(-1)+(-2)+(-3)=-6$

16.求平面E：$x+3y+z=1$ 與球面S：$x^2+y^2+z^2+2x-4y=11$ 所交之圓的圓心坐標_______。

【解答】$(\dfrac{-15}{11}，\dfrac{10}{11}，\dfrac{-4}{11})$

【詳解】

球面S：$x^2+y^2+z^2+2x-4y=11\quad\Rightarrow\quad(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=16$，球心$A(-1，2，0)$

平面E：$x+3y+z=1$，法向量$\vec{n}=(1，3，1)$

設圓心$B(x，y，z)$，則$\overrightarrow{AB}=(x+1，y-2，z)\,//\,(1，3，1)$

$\therefore\quad(x+1，y-2，z)=t(1，3，1)，t\in R\quad\Rightarrow\quad(x，y，z)=(t-1，3t+2，t)$代入平面$E$

$\Rightarrow\quad t-1+3(3t+2)+t=1\quad\therefore\quad t=\dfrac{-4}{11}\quad\therefore\quad(x，y，z)=(\dfrac{-15}{11}，\dfrac{10}{11}，\dfrac{-4}{11})$

17.求直線L：$\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{4}$與球面$S$：$x^2+y^2+z^2-12z+27=0$的交點坐標__________。

【解答】$(2，1，4)$及$(1，2，8)$

【詳解】設交點坐標為$(-t+3，t，4t)$，代入S得$(-t+3)^2+t^2+(4t)^2-12(4t)+27=0$

$\Rightarrow\quad t^2-3t+2=0\quad\Rightarrow\quad t=1$ 或 $2\quad\therefore\quad$ 二交點為$(2，1，4)$及$(1，2，8)$

18.已知球面S：$x^2+y^2+z^2-2x-2y-7=0$，求過點$P(2，-1，-2)$且與球面S相切的平面方程式為__________。

【解答】$x-2y-2z-8=0$

【詳解】

球面S：$x^2+y^2+z^2-2x-2y-7=0\quad\Rightarrow\quad(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=9$，球心$(1，1，0)$

又$(2-1)^2+(-1-1)^2+(-2)^2=9\quad\therefore\quad P(2，-1，-2)$在球面上

所求之切平面方程式為$(2-1)(x-1)+(-1-1)(y-1)+(-2)z=9$，即$x-2y-2z-8=0$

19.通過點$A(2，1，0)$與$B(\dfrac{1}{2}，0，1)$的平面E，若與球面S：$x^2+y^2+z^2=1$相切，則平面E的方程式為__________。

【解答】$2x-y+2z=3$ 或 $2x+3y+6z=7$

【詳解】

$\overleftrightarrow{AB}$：$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-2}\quad\Leftrightarrow\quad\overleftrightarrow{AB}$：$\begin{cases}2x-3y-1=0\\y+z-1=0\end{cases}$

設E：$(2x-3y-1)+t(y+z-1)=0$，即E：$2x+(t-3)y+tz-(1+t)=0$

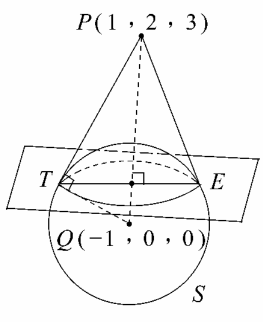
$\because\quad E$與S：$x^2+y^2+z^2=1$相切$\quad\therefore\quad$球心$O(0，0，0)$到E的距離 = 半徑

$\Rightarrow\quad\dfrac{|t+1|}{\sqrt{4+(t-3)^2+t^2}}=1\quad\Rightarrow\quad t=2$ 或 $t=6\quad\therefore\quad E$：$2x-y+2z=3$ 或 $2x+3y+6z=7$

20.點$P(1，2，3)$到球面S：$(x+1)^2+y^2+z^2=10$的切線段長為__________，所有切點形成一個圓，此圓所在平面方程式為__________，圓的圓心坐標為__________。

【解答】(1) $\sqrt{7}$　(2) $2x+2y+3z=8$　(3) $(\dfrac{3}{17}，\dfrac{20}{17}，\dfrac{30}{17})$

【詳解】



S：$(x+1)^2+y^2+z^2=10$的球心$Q(-1，0，0)$，過$P(1，2，3)$作球的切線，一切點T

(1)切線段長$\overline{PT}=\sqrt{\overline{PQ}^2-r^2}=\sqrt{(4+4+9)-10}=\sqrt{7}$

(2)所有切點所成的圓即以P為中心，$\overline{PT}$為半徑的球面S'與球面S的交圓，此圓所在平面E即為兩球的根平面，

S'的方程式為$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=7$

平面E的方程式為$[(x+1)^2+y^2+z^2-10]-[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-7]=0$

即 $2x+2y+3z=8$

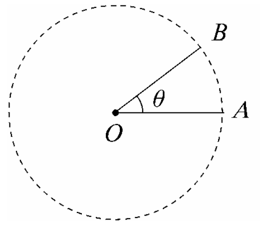
(3)兩球面交圓的圓心為球心連線PQ與平面E的交點，直線PQ的方程式：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$

設圓心$R(-1+2t，2t，3t)$代入E：$2x+2y+3z=8$ 得 $2(-1+2t)+2(2t)+3(3t)=8$

$\Rightarrow\quad t=\dfrac{10}{17}$，故$R(\dfrac{3}{17}，\dfrac{20}{17}，\dfrac{30}{17})$

21.球面S：$x^2+y^2+z^2=10$ 上有兩點$A(1，0，-3)$，$B(-2，\sqrt{5}，1)$，一隻螞蟻沿著球面由A爬行至B，其最小的路程爲＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{2\sqrt{10}}{3}\pi$



【詳解】

球心爲 $O(0，0，0)$，半徑爲$\sqrt{10}$，

$\overrightarrow{OA}=(1，0，-3)$，$\overrightarrow{OB}=(-2，\sqrt{5}，1)$

$\because\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cos\theta \quad\Rightarrow\quad -5=\sqrt{10}\sqrt{10}\cos\theta \quad\Rightarrow\quad \cos\theta=-\dfrac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \theta=120^\circ$

$\overset{\frown}{AB}$長 $=2\pi(\sqrt{10})\cdot\dfrac{120^\circ}{360^\circ}=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}\pi \quad\therefore\quad$ 螞蟻爬行的最小路程爲$\dfrac{2\sqrt{10}}{3}\pi$

22.給定球面S：$x^2+y^2+z^2-4x+6y=0$，

(1)試求通過點$(5，-3，2)$且與S相切的平面方程式爲＿＿＿＿＿＿。

(2)若直線L：$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$與球面$S$相交於$A$，$B$兩點，求線段$\overline{AB}$長 $=$＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $3x+2z=19$　(2) $\sqrt{14}$

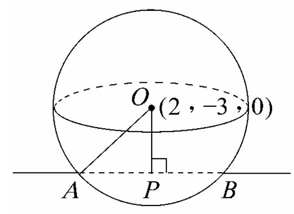
【詳解】

S：$(x-2)^2+(y+3)^2+z^2=13 \quad\Rightarrow\quad$ 圓心$O(2，-3，0)$，半徑$\sqrt{13}$

(1) $Q(5，-3，2)$代入S方程式得$(5-2)^2+(-3+3)^2+2^2=13 \quad\therefore\quad Q$在$S$上

$\Rightarrow\quad$ 平面E切S於$Q(5，-3，2)$。$\overrightarrow{OQ}=(3，0，2) \quad\therefore\quad E$：$3x+2z=19$

(2)設L上一點$P(2+3t，t，2+2t)$



$\overline{OP}^2=(3t)^2+(t+3)^2+(2+2t)^2=14t^2+14t+13=14(t+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{19}{2}$

$\therefore\quad \overline{OP}$最小值 $=d(O，L)=\sqrt{\dfrac{19}{2}}$，$\overline{AB}=2\sqrt{13-\dfrac{19}{2}}=2\cdot\dfrac{\sqrt{14}}{2}=\sqrt{14}$

23.求過圓$x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 與直線 $2x-y+4=0$ 之交點，且與y軸相切的圓方程式。（兩解）

【解答】$x^2+y^2+6x-6y+9=0$ 或$x^2+y^2+14x-10y+25=0$

【詳解】

設所求的方程式爲$x^2+y^2+2x-4y+1+k(2x-y+4)=0$……①

令$x=0$ 得$y^2-(k+4)y+4k+1=0$……②

因①與y軸相切，故②有等根　$\therefore\quad (k+4)^2-4(4k+1)=0$

即$k^2-8k+12=0 \quad\therefore\quad k=2，6$，

故$x^2+y^2+6x-6y+9=0$ 與$x^2+y^2+14x-10y+25=0$ 爲所求

24.三直線 $x-y-9=0$，$x+2y=0$，$3x-y-7=0$ 圍成一個三角形，求此三角形之外接圓方程式。

【解答】$x^2+y^2-4x+12y+15=0$

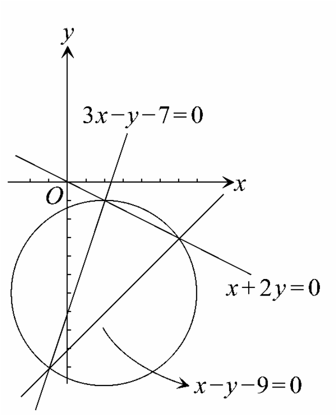
【詳解】

$x-y-9=0$……①；$x+2y=0$……②；$3x-y-7=0$……③

解①②得$(6，-3)$，解①③得$(-1，-10)$，解②③得$(2，-1)$

設此三角形的外接圓爲$x^2+y^2+dx+ey+f=0$，因過$(6，-3)$，$(-1，-10)$，$(2，-1)$

$\therefore \begin{cases} 6-3+f+45=0 \\ -d-10e+f+101=0 \\ 2d-e+f+5=0 \end{cases}$，解之得$d=-4$，$e=12$，$f=15$



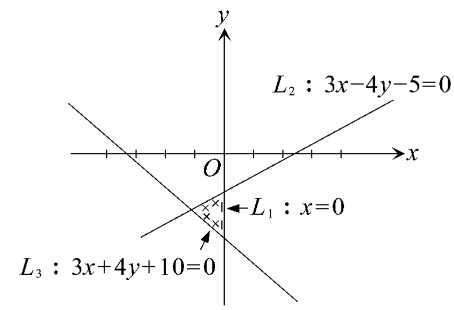
25.三直線$x=0$，$3x-4y-5=0$ 及 $3x+4y+10=0$ 所圍成三角形內切圓的方程式爲________。

【解答】$(x+\frac{5}{16})^2+(y+\frac{15}{8})^2=(\frac{5}{16})^2$

【詳解】

設L_1：$x=0$，L_2：$3x-4y-5=0$，L_3：$3x+4y+10=0$

L_1，L_2，L_3圍成三角形如下圖，設內心$I(a，b)$，則



(1) I在L_1，L_2之一交角平分線上 $\Rightarrow$ $-a=\frac{3a-4b-5}{5}$ $\Rightarrow$ $8a-4b=5$……①

(2) I在L_1，L_3之一交角平分線上 $\Rightarrow$ $-a=\frac{3a+4b+10}{5}$ $\Rightarrow$ $8a+4b=-10$……②

解①，②得$a=-\frac{5}{16}$，$b=-\frac{15}{8}$ $\therefore$ 內心$I(-\frac{5}{16}，-\frac{15}{8})$

又圓之半徑$r=d(I，L_1)=\frac{5}{16}$，故內切圓之方程式爲$(x+\frac{5}{16})^2+(y+\frac{15}{8})^2=(\frac{5}{16})^2$