<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高三(上)平時測驗　　日期：93.12.23</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">數學 Book2
Chap3</td><td>班級</td><td>普三　　班</td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、選擇題(每題 10 分)

1. (複選)$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$，若已知$\triangle=\triangle_x=\triangle_y=\triangle_z=0$，且有(0，0，0)，(1，1，1)兩解，問下列何者爲真？

(A)原始三平面之相交情形有三種　　(B)方程組有(3，2，1)之解

(C)直線$x=y=z$必在三平面上　　(D)方程組有(2，2，2)之解

(E)方程組若有(2，1，4)之解則必有(0，1，0)之解

【解答】(A)(C)(D)

【詳解】

(A)對。$\triangle=\triangle_x=\triangle_y=\triangle_z=0$ 且(0，0，0)及(1，1，1)兩解，亦即無限多解，其幾何意義可能爲三平面重合，二平面重合與另一平面交於一直線及三相異平面交於一直線。

(B)錯。若有A(0，0，0)及B(1，1，1)兩解，則其解可能爲一直線$\overleftrightarrow{AB}$：$x=y=z$，但(3，2，1)$\notin\overleftrightarrow{AB}$

(C)對。由(B)可知

(D)對。由(B)可知

(E)錯。若有A(0，0，0)，B(1，1，1)及C(2，1，4)三解，則其解可能爲平面E_{ABC}：$3x-2y-z=0$，而(0，1，0)$\notin E_{ABC}$

2. (複選)若方程組$\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ a^2x+b^2y+c^2z=0 \end{cases}$有異於(0，0，0)之解，則

(A) $a=b=c$　(B) $a+b+c=1$　(C) a，b，c 均爲 0 或均爲 1　(D) a，b，c 不全相異

(E) $a=b$ 或 $b=c$ 或 $c=a$

【解答】(D)(E)

【詳解】

$$\triangle=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)=0$$

$\Rightarrow$　$a=b$ 或 $b=c$ 或 $c=a$（至少有一成立）　$\Rightarrow$　a，b，c 不全相異

二、填充題(每題 10 分)

3. 方程組$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}=3 \\ \dfrac{x-y}{xy}=1 \end{cases}$的解($x$，$y$) =__________。

【解答】$(1，\frac{1}{2})$

【詳解】

原式 $\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=3 \cdots\cdots ① \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=1 \cdots\cdots ② \end{cases}$，解①② $\Rightarrow$ $\frac{1}{y}=2$，$\frac{1}{x}=1$，則 $x=1$，$y=\frac{1}{2}$

4. 若a，$b\in R$且已知方程組$\begin{cases} x+4y+az=5 \\ 2x+y+3z=b \\ 3x+2y-z=0 \end{cases}$有無限多組解，則$(a，b)=$__________。

【解答】$(-37，-\frac{1}{2})$

【詳解】

方程組有無限多組解 $\Rightarrow$ $\triangle=\begin{vmatrix} 1 & 4 & a \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$ $\Rightarrow$ $a=-37$ 代回原方程組得

$\begin{cases} x+4y-37z=5 \cdots\cdots ① \\ 2x+y+3z=b \quad \cdots\cdots ② \\ 3x+2y-z=0 \quad \cdots\cdots ③ \end{cases}$

② $\times 4-$ ①得 $7x+49z=4b-5$；② $\times 2-$ ③得 $x+7z=2b$

$\because$ 方程組爲無限多組解 $\therefore$ $4b-5=14b$ $\Rightarrow$ $b=-\frac{1}{2}$ $\therefore$ $(a，b)=(-37，-\frac{1}{2})$

5. 設$\begin{cases} (a+3)x+4y=5-3a \\ 2x+(5+a)y=8 \end{cases}$，若方程組無解，則$a=$__________。

【解答】-7

【詳解】

$\frac{a+3}{2}\overset{①}{=}\frac{4}{5+a}\overset{②}{\neq}\frac{5-3a}{8}$，由① $\Rightarrow$ $a^2+8a+7=0$ $\Rightarrow$ $(a+1)(a+7)=0$

$\Rightarrow$ $a=-1$，-7 代入②，得$a=-7$

6. 若$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}=2$，則$\begin{vmatrix} 4b+5c & a+2b-3c & c \\ 4q+5r & p+2q-3r & r \\ 4y+5z & x+2y-3z & z \end{vmatrix}$之值 $=$__________。

【解答】-8

【詳解】

$$\begin{vmatrix} 4b+5c & a+2b-3c & c \\ 4q+5r & p+2q-3r & r \\ 4y+5z & x+2y-3z & z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4b & a+2b & c \\ 4q & p+2q & r \\ 4y & x+2y & z \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} b & a+2b & c \\ q & p+2q & r \\ y & x+2y & z \end{vmatrix}$$

$\times 3$

$\times(-5)$

$\times(-2)$

$= 4\begin{vmatrix} b & a & c \\ q & p & r \\ y & x & z \end{vmatrix} = (-4)\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-4) \times 2 = -8$

7. 平面上三點$A(-1，2)$，$B(1，4)$，$C(4，k)$共線，則k之值 $=$__________。

【解答】7

【詳解】

$A，B，C$ 三點共線 $\Leftrightarrow$ $\triangle ABC$ 面積 $=0$ $\therefore$ $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & k & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & k-2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & k-2 \end{vmatrix} = 0$ $\Rightarrow$ $2k-4-10=0$ $\Rightarrow$ $k=7$

8. 點$A(1，1，2)$，$B(0，2，3)$，$C(-2，4，1)$，$D(0，k，-1)$，若四面體$ABCD$的體積爲 3，則k值爲__________。

【解答】$-\frac{5}{2}$或$\frac{13}{2}$

【詳解】

$\overrightarrow{AB} = (-1，1，1)$，$\overrightarrow{AC} = (-3，3，-1)$，$\overrightarrow{AD} = (-1，k-1，-3)$

四面體 $ABCD$ 的體積 $= \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -1 & k-1 & -3 \end{vmatrix}\right| = 3$

$\Rightarrow$ $|9+1-3(k-1)+3-9-(k-1)| = 18$ $\Rightarrow$ $k = -\frac{5}{2}$或$\frac{13}{2}$

9. 設k爲實數，若方程組$\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ x-2y-3z=1 \\ 3x+2y-z=k \end{cases}$有解，則$k$之值爲__________。

【解答】-1

【詳解】

$\because$ $\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore$ 原方程組有解，必是無限多組解（三平面重合或相交一直線）

$\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $\triangle_x = 0$，$\triangle_y = 0$，$\triangle_z = 0$，由$\triangle_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & k \end{vmatrix} = 0$ $\therefore$ $k=-1$

10. 已知空間中四平面E_1：$x-2y+3z=5$，E_2：$2x+y-3z=-3$，E_3：$3x+y+2z=8$，E_4：$x+3y+4z=k$恰有一交點，則$k=$__________。

【解答】12

【詳解】

三平面$\begin{cases} E_1：x-2y+3z=5 \\ E_2：2x+y-3z=-3 \\ E_3：3x+y+2z=8 \end{cases}$之交點$\left(\dfrac{\triangle_x}{\triangle}，\dfrac{\triangle_y}{\triangle}，\dfrac{\triangle_z}{\triangle}\right)=(1，1，2)$

又四平面交於一點　∴　$(1，1，2)\in E_4$　$\Rightarrow$　$1+3+8=k$　$\Rightarrow$　$k=12$

11.行列式$\begin{vmatrix} 10 & 105 & 45 \\ 8 & -28 & 36 \\ 6 & 7 & 29 \end{vmatrix}$之值 $=$ ＿＿＿＿＿＿。

【解答】-2240

【詳解】

原式 $=2\times 7\times\begin{vmatrix} 5 & 15 & 45 \\ 4 & -4 & 36 \\ 3 & 1 & 29 \end{vmatrix}=(2\times 7)\times(5\times 4)\times\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 9 \\ 3 & 1 & 29 \end{vmatrix}$

$=(2\times 7)\times(5\times 4)\times(-8)=-2240$

12.求$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 7^2 & 8^2 & 9^2 \end{vmatrix}$之值爲＿＿＿＿＿＿。

【解答】-216

【詳解】

$\times(-1)$　　$\times(-1)$　　$\times(-1)$

$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 7^2 & 8^2 & 9^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 5 \\ 4^2 & 5^2 & 11 \\ 7^2 & 8^2 & 17 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 16 & 9 & 11 \\ 49 & 15 & 17 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 16 & 9 & 2 \\ 49 & 15 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 15 & 2 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 16 & 2 \\ 49 & 2 \end{vmatrix}+$

$2\begin{vmatrix} 16 & 9 \\ 49 & 15 \end{vmatrix}$

$=(18-30)-3(32-98)+2(240-441)=-216$

13.若$a\in R$且方程組$\begin{cases} (1-a)x+3y+3=0 \\ x+(3-a)y+3=0 \\ x+3y+(3-a)=0 \end{cases}$恰有一解，則$a$之值=＿＿＿＿＿＿。

【解答】7

【詳解】

方程組恰有一解　$\Rightarrow$　平面上三直線共點

$\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} 1-a & 3 & 3 \\ 1 & 3-a & 3 \\ 1 & 3 & 3-a \end{vmatrix}=0$　$\Rightarrow$　$a^2(7-a)=0$　$\Rightarrow$　$a=0，7$

但當$a=0$時　$\Rightarrow$　三直線重合　$\Rightarrow$　無限多解，不合

14.利用克拉瑪公式解方程組$\begin{cases} 21x+22y+27z=50 \\ 22x+23y+28z=51 \\ 23x+24y+25z=52 \end{cases}$，則$(x，y，z)=$＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(-28，29，0)$

【詳解】

$$\triangle=\begin{vmatrix}21&22&27\\22&23&28\\23&24&25\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-1)\\ \times(-1)\end{matrix}=\begin{vmatrix}21&22&27\\1&1&1\\2&2&-2\end{vmatrix}=4$$

$$\triangle_x=\begin{vmatrix}50&22&27\\51&23&28\\52&24&25\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-1)\\ \times(-1)\end{matrix}=\begin{vmatrix}50&22&27\\1&1&1\\2&2&-2\end{vmatrix}=-112$$

$$\triangle_y=\begin{vmatrix}21&50&27\\22&51&28\\23&52&25\end{vmatrix}=116\qquad\triangle_z=\begin{vmatrix}21&22&50\\22&23&51\\23&24&52\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-1)\\ \times(-1)\end{matrix}=\begin{vmatrix}21&22&50\\1&1&1\\2&2&2\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{\triangle_x}{\triangle}=\dfrac{-112}{4}=-28\\[2mm] y=\dfrac{\triangle_y}{\triangle}=\dfrac{116}{4}=29\\[2mm] z=\dfrac{\triangle_z}{\triangle}=\dfrac{0}{4}=0\end{cases}\qquad\therefore\quad(x，y，z)=(-28，29，0)$$

15.平面上三點$P_1(x_1，y_1)$，$P_2(x_2，y_2)$，$P_3(x_3，y_3)$，已知$\triangle P_1P_2P_3=10$，若$A(3x_1-4y_1，5y_1-6x_1)$，$B(3x_2-4y_2，5y_2-6x_2)$，$C(3x_3-4y_3，5y_3-6x_3)$，求$\triangle ABC$的面積。

【解答】90

【詳解】

$$\triangle P_1P_2P_3=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\\x_3&y_3&1\end{vmatrix}\right|=10\quad\Rightarrow\quad\left|\begin{vmatrix}x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\\x_3&y_3&1\end{vmatrix}\right|=20$$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}3x_1-4y_1&5y_1-6x_1&1\\3x_2-4y_2&5y_2-6x_2&1\\3x_3-4y_3&5y_3-6x_3&1\end{vmatrix}\right|_{\times 2}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}3x_1-4y_1&-3y_1&1\\3x_2-4y_2&-3y_2&1\\3x_3-4y_3&-3y_3&1\end{vmatrix}\right|_{\times(-\frac{4}{3})}$$

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}3x_1&-3y_1&1\\3x_2&-3y_2&1\\3x_3&-3y_3&1\end{vmatrix}\right|=\frac{9}{2}\left|\begin{vmatrix}x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\\x_3&y_3&1\end{vmatrix}\right|=\frac{9}{2}\times 20=90$$

16.展開行列式：$\begin{vmatrix}a+b+2c&a&b\\c&2a+b+c&b\\c&a&a+2b+c\end{vmatrix}$。

【解答】$2(a+b+c)^3$

【詳解】

$$\begin{vmatrix}a+b+2c&a&b\\c&2a+b+c&b\\c&a&a+2b+c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2a+2b+2c&a&b\\2a+2b+2c&2a+b+c&b\\2a+2b+2c&a&a+2b+c\end{vmatrix}$$

$$=(2a+2b+2c)\begin{vmatrix}1 & a & b\\ 1 & 2a+b+c & b\\ 1 & a & a+2b+c\end{vmatrix}=(2a+2b+2c)\begin{vmatrix}1 & a & b\\ 0 & a+b+c & 0\\ 0 & 0 & a+b+c\end{vmatrix}$$

$$=(2a+2b+2c)\begin{vmatrix}a+b+c & 0\\ 0 & a+b+c\end{vmatrix}=2(a+b+c)^3$$

17.若實數 k，使 $\begin{cases}x+4y=4-kx\\ x-2y=1-ky\end{cases}$ 方程組有唯一解爲__________。

【解答】見詳解

【詳解】

$$\begin{cases}x+4y=4-kx\\ x-2y=1-ky\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(k+1)x+4y=4\\ x+(k-2)y=1\end{cases}$$

$\triangle=\begin{vmatrix}k+1 & 4\\ 1 & k-2\end{vmatrix}=(k+1)(k-2)-4=k^2-k-6=(k-3)(k+2)$

$\triangle_x=\begin{vmatrix}4 & 4\\ 1 & k-2\end{vmatrix}=4\,(k-3)$，$\triangle_y=\begin{vmatrix}k+1 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}=k-3$

當 $k\neq 3$ 且 $k\neq -2$ 時，方程組有唯一解爲 $\begin{cases}x=\dfrac{4}{k+2}\\ y=\dfrac{1}{k+2}\end{cases}$

18.若 $\begin{cases}2a_1x+b_1y=c_1\\ 2a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 的解爲 $\begin{cases}x=3\\ y=4\end{cases}$，求 $\begin{cases}3a_1x+4b_1y=5c_1\\ 3a_2x+4b_2y=5c_2\end{cases}$ 的解。

【解答】$x=10$，$y=5$

【詳解】

$\begin{cases}2\cdot a_1\cdot\dfrac{3}{10}x+b_1\cdot\dfrac{4}{5}y=c_1\\ 2\cdot a_2\cdot\dfrac{3}{10}x+b_2\cdot\dfrac{4}{5}y=c_2\end{cases}$ 的解爲 $\begin{cases}\dfrac{3}{10}x=3\\ \dfrac{4}{5}y=4\end{cases}$，即 $x=10$，$y=5$

19.已知 $xyz\neq 0$，若 $9x-4y+3z=-7x+2y+15z=13x-8y-z$，試求 $\dfrac{3x^2-2y^2-z^2-5xy}{4x^2-5y^2-6z^2+2xz}$ 之值。

【解答】$\dfrac{-3}{13}$

【詳解】

由 $\begin{cases}9x-4y+3z=-7x+2y+15z\\ -7x+2y+15z=13x-8y-z\end{cases}$ 得 $\begin{cases}8x-3y-6z=0\\ 10x-5y-8z=0\end{cases}$

則 $x:y:z=\begin{vmatrix}-3 & -6\\ -5 & -8\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-6 & 8\\ -8 & 10\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}8 & -3\\ 10 & -5\end{vmatrix}=3:(-2):5$

設 $x=3k$，$y=-2k$，$z=5k$，則 $\dfrac{3x^2-2y^2-z^2-5xy}{4x^2-5y^2-6z^2+2xz}=\dfrac{24k^2}{-104k^2}=\dfrac{-3}{13}$