高雄市明誠中學 高三(上)平時測驗 日期：93.12.16					
範圍	數學 Book3Chap2 空間之平面直線	班級	普三 班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1. 空間中有二直線L_1：$\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{4}$，$L_2$：$2x=3y=6z$，則$L_1$與$L_2$之關係爲

(A)二平行線 (B)二重合的直線 (C)歪斜線 (D)交於一點且垂直的二直線

(E)交於一點但不垂直的二直線

【解答】(D)

【詳解】

L_1：$\begin{cases}x=3-2t\\y=2+t\\z=1+4t\end{cases}$，$L_2$：$\begin{cases}x=3s\\y=2s\\z=s\end{cases}$

L_1之方向向量$\overrightarrow{d_1}=(-2，1，4)$，$L_2$之方向向量$\overrightarrow{d_2}=(3，2，1)$

$\begin{cases}3-2t=3s\cdots\cdots①\\2+t=2s\cdots\cdots②\\1+4t=s\cdots\cdots③\end{cases}$ 由①②得$s=1$，$t=0$，代入③合

∴ L_1及L_2交於一點，且$\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}=0$ ∴ $L_1\perp L_2$

2. 兩平面 $2x-y-2z+1=0$，$4x-2y-4z=5$ 的距離爲

(A) 6 (B)$\dfrac{7}{6}$ (C) 3 (D) 2 (E)$\dfrac{1}{2}$

【解答】(B)

∵ 兩平行平面 $ax+by+cz+d=0$，$ax+by+cz+e=0$ 距離爲$\dfrac{|d-e|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

∴ $2x-y-2z+1=0$，$4x-2y-4z=5$ 的距離

即 $2x-y-2z+1=0$，$2x-y-2z-\dfrac{5}{2}=0$ 的距離 ∴ $\dfrac{1+\dfrac{5}{2}}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{7}{6}$爲所求

3. 空間中點 $A(1，2，3)$到直線$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{2}$之距離爲

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

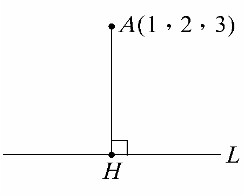
【解答】(D)

【詳解】

設 $H\in L$，則 $H(-1+2t，-2-t，2t)$

$\overline{AH}=\sqrt{(2-2t)^2+(4+t)^2+(3-2t)^2}=\sqrt{9t^2-12t+29}=\sqrt{9(t-\dfrac{2}{3})^2+25}$

當 $t=\dfrac{2}{3}$時，$\overline{AH}$有最小值 5，即 $d(A；L)=5$



4. 在空間坐標系中，下列哪些是正確的？(複選)

(A) $2x-y=3$ 表一直線　　(B) $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 表一直線

(C) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$ 的圖形與 $2x+3y-z=3$ 的圖形爲平行關係

(D) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{1}$ 的圖形與 $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{1}$ 的圖形爲平行關係

(E)向量(0，0，1)可爲 xy 平面的一個法向量

【解答】(B)(E)

【詳解】

(A)錯。表法向量(2，－1，0)的平面

(B)對。表過點(1，2，0)，方向向量(0，0，1)的直線

(C)錯。直線 L 之方向向量與平面 E 之法向量平行，故 $L\perp E$

(D)錯。兩直線之方向向量平行且 L_2： $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{1}$ 上一點

(3，1，4) $\in L_1$： $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{1}$ ，故重合

(E)對。E_{xy}：$z=0$，法向量爲(0，0，1)

二、填充題(每題 10 分)

1. 設 x，y，z 爲實數，若 $x+4y-5z+15=0$，則 $\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2}$ 之最小值爲___。

【解答】$\sqrt{42}$

【詳解】令 E：$x+4y-5z+15=0$，$P(x，y，z)$爲平面上任意點，$A(-1，2，-4)$

則 $\overline{PA}=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)+(z+4)^2}$　∴　$\overline{PA}$ 的最小值就是 A 點到平面 E 的距離 d

而 $d=\dfrac{|-1+8+20+15|}{\sqrt{1+16+25}}=\dfrac{42}{\sqrt{42}}=\sqrt{42}$ 爲所求

2. 給定一點 $A(1，2，3)$，平面 E：$x+y+z=0$，

(1)過 A 點垂直平面 E 的直線參數式爲__________。

(2) A 點在 E 上的正射影坐標爲__________。(3) A 點對 E 的對稱點坐標爲__________。

【解答】(1) $x=1+t$，$y=2+t$，$z=3+t$，$t\in R$　(2) $(-1，0，1)$　(3) $(-3，-2，-1)$

【詳解】(1)垂直 E：$x+y+z=0$ 之直線方向向量即爲 E 的法線向量(1，1，1)

此直線過 A (1，2，3)　∴　直線參數式爲 $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t，t\in R \\ z=3+t \end{cases}$

(2)將(1)的參數式代入 E，$(1+t)+(2+t)+(3+t)=0$　$\Rightarrow$　$t=-2$

$\therefore$　直線與 E 的交點爲 $B(-1，0，1)$，即爲 A 在 E 上的正射影

(3)設 A 對 E 的對稱點 A'，則 $\overline{AA'}$ 中點 B，得 $A'(-2-1，0-2，2-3)=(-3，-2，-1)$

3. 求含$A(2，1，0)$，$B(1，0，2)$，$C(-1，1，1)$的平面E之方程式＿＿＿＿＿。

【解答】$x+5y+3z-7=0$

【詳解】$\overrightarrow{AB}=(-1，-1，2)$，$\overrightarrow{AC}=(-3，0，1)$

$\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-1，-5，-3)=-1(1，5，3)$

令$(x-2)+5(y-1)+3z=0 \quad \Rightarrow \quad x+5y+3z-7=0$

4. 兩平面 $2x-y-3z=5$ 與 $3x+2y-z=8$ 的夾角爲＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$

【詳解】$|\cos\theta|=\dfrac{|2\times3+(-1)\times2+(-3)\times(-1)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{7}{14}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad \cos\theta=\pm\dfrac{1}{2}$　，　　$\therefore \quad \theta=\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$

5. 設直線L：$\begin{cases}2x-y+z=3\\x-2y+2z=2\end{cases}$，試求包含直線$L$及點$P(-1，2，3)$之平面方程式爲＿＿＿＿＿。

【解答】$2x-7y+7z-5=0$

【詳解】

設此平面方程式爲 $2x-y+z-3+k(x-2y+2z-2)=0$；又過 $P(-1，2，3)$

則$(-2-2+3-3)+k(-1-4+6-2)=0 \quad \Rightarrow \quad k=-4$

$\therefore$　平面方程式爲 $2x-y+z-3-4(x-2y+2z-2)=0$，即 $2x-7y+7z-5=0$

6. 若兩直線L_1：$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-4}{4}=z-6$ 和L_2：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-4}{3}=z+k$（其中$k\in R$）都在平面$E$上，則$k=$＿＿＿＿＿。

【解答】-8

【詳解】L_1，L_2都在平面E上，但$L_1\not\parallel L_2$　$\therefore$　L_1，L_2必相交於一點

則$\begin{cases}1+3t=-1+2s\cdots\cdots①\\4+4t=4+3s\cdots\cdots②\\6+t=-k+s\cdots\cdots③\end{cases}$，由①②　$\Rightarrow$　$t=-6$，$s=-8$，代入③得$k=-8$

7. 設三平面E_1：$2x+y-4=0$，E_2：$y+2z=0$，E_3：$3x+2y+3z=6$，若平面E過E_1與E_2之交線，且與平面E_3垂直，則平面E的方程式爲＿＿＿＿＿。

【解答】$x-z-2=0$

【詳解】

$\because$　平面E過平面E_1與E_2的交線　$\therefore$　令平面E的方程式爲 $2x+y-4+k(y+2z)=0$

$\Rightarrow \quad 2x+(1+k)y+2kz-4=0 \quad \because \quad E$與$E_3$：$3x+2y+3z=6$ 垂直

$\therefore \quad (2，1+k，2k)\cdot(3，2，3)=0 \quad \Rightarrow \quad 6+2(1+k)+6k=0 \quad \Rightarrow \quad k=-1$

故平面E的方程式爲 $2x-2z-4=0$，即$x-z-2=0$

8. 空間中，設$A(3，1，-2)$，$B(2，7，0)$，$C(-4，-1，1)$，

(1)△ABC之重心坐標爲＿＿＿＿＿＿。　(2)內積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ ＿＿＿＿＿＿。

(3)外積 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=$ ＿＿＿＿＿＿。　(4)△ABC的面積爲＿＿＿＿＿＿。

(5)線段 $\overline{AB}$ 的垂直平分面方程式爲＿＿＿＿＿＿。

(6)通過A，B，C三點的平面方程式爲＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $(\frac{1}{3}，\frac{7}{3}，-\frac{1}{3})$　(2) 1　(3) $(22，-11，44)$　(4) $\frac{11}{2}\sqrt{21}$　(5) $2x-12y-4z+39=0$

(6) $2x-y+4z+3=0$

【詳解】

(1) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}[(3，1，-2)+(2，7，0)+(-4，-1，1)]=(\frac{1}{3}，\frac{7}{3}，-\frac{1}{3})$

故△ABC 之重心坐標爲 $(\frac{1}{3}，\frac{7}{3}，-\frac{1}{3})$

(2) $\overrightarrow{AB}=(-1，6，2)$，$\overrightarrow{AC}=(-7，-2，3)$，$\overrightarrow{BC}=(-6，-8，1)$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\frac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2}{2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}$$

$$=\frac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2}{2}=\frac{41+62-101}{2}=1$$

(3) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(22，-11，44)$

$$\begin{array}{cccc} 6 & 2 & -1 & 6 \\ -2 & 3 & -7 & -2 \\ \hline & 22 \quad -11 \quad 44 & & \end{array}$$

(4)△$ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2\cdot|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{41\cdot 62-1}=\frac{11\sqrt{21}}{2}$

(5)線段 $\overline{AB}$ 的垂直平分面π之法向量爲 $\overrightarrow{AB}=(-1，6，2)$　∴　設π：$-x+6y+2z=k$

$\overline{AB}$ 之中點 $M(\frac{5}{2}，4，-1)$在平面π上　⇒　$k=-\frac{5}{2}+6\cdot 4+2(-1)=\frac{39}{2}$

∴　π：$2x-12y-4z+39=0$

(6)通過 A，B，C 三點的平面 δ 之法向量爲 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(22，-11，44)$

∴　設 δ：$2x-y+4z=k$

B 點在平面 δ 上　⇒　$k=2\cdot 2-7+4\cdot 0=-3$　∴　δ：$2x-y+4z+3=0$

9. 求過$A(1，0，0)$，$B(0，0，1)$且與平面$x+z=0$ 夾 $\frac{\pi}{4}$ 之平面方程式爲＿＿＿＿＿＿。

【解答】$x\pm\sqrt{2}y+z=1$

【詳解】平面 E：$x+z=0$ 之法向量 $\overrightarrow{n_1}=(1，0，1)$，$\overrightarrow{AB}=(-1，0，1)$

設過 A，B 兩點且與 E 夾角 $\frac{\pi}{4}$ 之平面爲 F，其法向量 $\overrightarrow{n_2}=(a，b，c)$

$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{n_1}=|\overrightarrow{n_2}|\cdot|\overrightarrow{n_1}|\cdot\cos\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a+c=0\cdots\cdots ① \\ (a+c)^2=a^2+b^2+c^2\cdots\cdots ② \end{cases}$

①代入②得 $b=\pm\sqrt{2}a \quad\Rightarrow\quad (a，b，c)=(a，\pm\sqrt{2}a，a)=(1，\pm\sqrt{2}，1)$

$\therefore\quad F：x\pm\sqrt{2}y+z=1$

10.$A(-2，1，-4)$，$B(3，6，4)$，$C(1，1，2)$，$D(-2，5，1)$，

(1)$\triangle ABC$的面積 =__________。 (2)平面ABC的方程式爲__________。

(3)四面體$ABCD$的體積 =__________。

【解答】(1) $\dfrac{3\sqrt{129}}{2}$ (2) $10x-2y-5z+2=0$ (3) $\dfrac{33}{2}$

【詳解】

(1) $\overrightarrow{AB}=(5，5，8)$，$\overrightarrow{AC}=(3，0，6)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{25+25+64}=\sqrt{114}$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{9+0+36}=\sqrt{45}$

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{114\times45-(15+0+48)^2}=\dfrac{3\sqrt{129}}{2}$

(2) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(\begin{vmatrix}5 & 8\\ 0 & 6\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}8 & 5\\ 6 & 3\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}5 & 5\\ 3 & 0\end{vmatrix})=(30，-6，-15)$，取法向量$\vec{n}=(10，-2，-5)$

設$E：10x-2y-5z+d=0$，將$C(1，1，2)$代入$E \quad\Rightarrow\quad d=2$

$\therefore\quad E_{ABC}：10x-2y-5z+2=0$

(3)點D到平面E_{ABC}的距離爲$\dfrac{|10\cdot(-2)-2\cdot5-5\cdot1+2|}{\sqrt{10^2+(-2)^2+(-5)^2}}=\dfrac{33}{\sqrt{129}}$

$\therefore$ 四面體$ABCD$的體積 $=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{129}}{2}\cdot\dfrac{33}{\sqrt{129}}=\dfrac{33}{2}$

11.設$A(-1，2，3)$，$B(2，6，3)$，$C(-2，4，5)$爲空間中的相異三點，E爲$\triangle ABC$所在的平面，則

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ =__________。 (2) $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影爲__________。

(3)$\triangle ABC$之面積 =__________。 (4) E的平面方程式爲__________。

(5)若$\angle BAC$之內角平分線交$\overline{BC}$於D點，設E在$\overleftrightarrow{AD}$上，且$\overrightarrow{AE}=4\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則$\beta$=_____。

【解答】(1) 5 (2) $(\dfrac{3}{5}，\dfrac{4}{5}，0)$ (3) $5\sqrt{2}$ (4) $4x-3y+5z-5=0$ (5) $\dfrac{20}{3}$

【詳解】

(1) $\overrightarrow{AB}=(3，4，0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1，2，2) \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3+8+0=5$

(2) $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影 $=(\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|^2})\overrightarrow{AB}=(\dfrac{5}{25})(3，4，0)=(\dfrac{3}{5}，\dfrac{4}{5}，0)$

(3)$\triangle ABC$ 之面積 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{25\times9-5^2}=5\sqrt{2}$

(4) $P(x，y，z)$為平面 E 上任一點

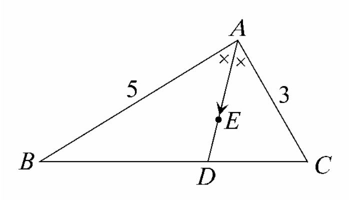
則 $\overrightarrow{AP}=(x+1，y-2，z-3)$，$\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{AC}$ 所張之平行六面體體積 $=0$

即 $\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow E：4x-3y+5z-5=0$

(5) $\overline{AD}$ 為 $\angle BAC$ 之角平分線 $\therefore$ $\overline{BD}：\overline{CD}=\overline{AB}：\overline{AC}=5：3$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{8}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AD}=\frac{3k}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{5k}{8}\overrightarrow{AC}$

又 $\overrightarrow{AE}=4\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ $\therefore$ $\begin{cases}\frac{3k}{8}=4\\ \frac{5k}{8}=\beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k=\frac{32}{3}\\ \beta=\frac{5}{8}\times\frac{32}{3}=\frac{20}{3}\end{cases}$



12.三直線$L：\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+4}{3}$，$M：\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+4}{-1}$，$N：\frac{x-4}{3}=\frac{y-a}{2}=\frac{z-b}{1}$ 相交於一點，則數對$(a，b)=$__________。

【解答】$(5，-3)$

【詳解】$(1，3，-4)$過 L、M，也過 N，

$(4+3t，a+2t，b+t)=(1，3，-4) \Rightarrow t=-1，a=5，b=-3$

13.點$P(1，-1，0)$，直線$L：x=2t，y=1+t，z=1+t，t\in R$，

(1)過P與L之平面方程式為__________。 (2) P在L之投影點為__________。

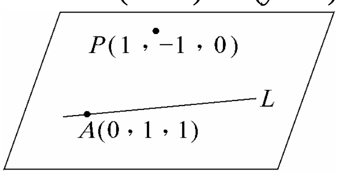
【解答】(1) $x+3y-5z+2=0$ (2) $(-\frac{1}{3}，\frac{5}{6}，\frac{5}{6})$

【詳解】(1) $\overrightarrow{AP}=(1，-2，-1)$及 L 之方向向量$\vec{d}=(2，1，1)$

$\overrightarrow{AP}\times\vec{d}=(\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix})=(-1，-3，5)$

取平面 E 之法向量$\vec{n}=(1，3，-5)$，且 E 過點 $P(1，-1，0)$

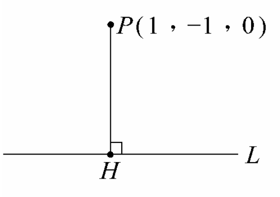
$\therefore$ $E：(x-1)+3(y+1)-5(z-0)=0 \Rightarrow E：x+3y-5z+2=0$



(2)設 P 在 L 之投影點為 H，則 $H(2t，1+t，1+t)$

$\overrightarrow{PH}=(2t-1，2+t，1+t)\perp\vec{d}=(2，1，1)$

$\overrightarrow{PH}\cdot\vec{d}=0 \Rightarrow 4t-2+2+t+1+t=0 \Rightarrow t=\frac{-1}{6}$ $\therefore$ $H(-\frac{1}{3}，\frac{5}{6}，\frac{5}{6})$



14.點 $P(1，-2，3)$，直線 L：$\dfrac{x-1}{2}=y+1=\dfrac{z-1}{3}$，平面 E：$2x+2y-z-3=0$，

(1)直線 L 和平面 E 的交點坐標為何？＿＿＿＿＿＿

(2)含直線 L，且過 P 的平面方程式為何？＿＿＿＿＿＿＿＿

【解答】(1) $(\dfrac{11}{3}，\dfrac{1}{3}，5)$　(2) $5x-4y-2z-7=0$

【詳解】

(1)設交點坐標 $(1+2t，-1+t，1+3t)$，$t\in R$，在平面 E：$2x+2y-z-3=0$ 上

$\Rightarrow\quad 2(1+2t)+2(-1+t)-(1+3t)-3=0\quad\Rightarrow\quad 3t=4\quad\Rightarrow\quad t=\dfrac{4}{3}$

$\therefore$　交點坐標為 $(\dfrac{11}{3}，\dfrac{1}{3}，5)$

(2) $P(1，-2，3)$，$Q(1，-1，1)\in L$，$\overrightarrow{PQ}=(0，1，-2)$，$L$ 方向向量 $\vec{u}=(2，1，3)$

設平面的法向量為 $\vec{n}=(a，b，c)$　$\Rightarrow$　$\vec{n}\perp\overrightarrow{PQ}$，$\vec{n}\perp\vec{u}$　$\Rightarrow$　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$，$\vec{n}\cdot\vec{u}=0$

$\Rightarrow\quad\begin{cases}b-2c=0\\2a+b+3c=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad a=-\dfrac{5}{2}c，b=2c$

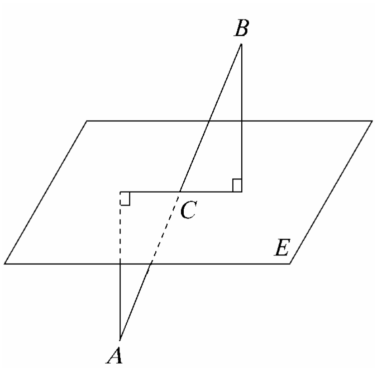
$\Rightarrow\quad a：b：c=(-\dfrac{5}{2})：2：1=5：(-4)：(-2)$

$\therefore$　所求平面方程式為 $5(x-1)-4(y+2)-2(z-3)=0$，即 $5x-4y-2z-7=0$

15.設點 $A(-2，-2，2)$，$B(6，1，-2)$，若 $\overline{AB}$ 交平面 E：$2x+y-2z=5$ 於 C 點，則 $\overline{AC}：\overline{BC}=$？

【解答】5：4

【詳解】



$\overline{AC}：\overline{BC}=d(A，E)：d(B，E)=\dfrac{|-4-2-4-5|}{3}：\dfrac{|12+1+4-5|}{3}=5：4$

16.求平行於平面 $x+y-3z+1=0$ 且 $x，y，z$ 軸截距和 $=10$ 的平面方程式。

【解答】$x+y-3z-6=0$

【詳解】

設所求平面 $x+y-3z=k$，則$\dfrac{x}{k}+\dfrac{y}{k}+\dfrac{z}{-\frac{k}{3}}=1$

截距和 $=k+k-\dfrac{k}{3}=10 \quad\Rightarrow\quad k=10\times\dfrac{3}{5}=6 \quad\therefore\quad x+y-3z-6=0$ 爲所求

17.已知L_1：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$，$L_2$：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-8}{-1}$的公垂線爲$\overleftrightarrow{PQ}$，若$P$在$L_1$上，$Q$在$L_2$上，求$P$，$Q$的坐標及$d(L_1，L_2)$。

【解答】$P(6，4，5)$，$Q(7，2，5)$，$\overline{PQ}=d(L_1，L_2)=\sqrt{5}$

【詳解】

設$P(2t，1+t，2+t)$，$Q(1+2s，-1+s，8-s)$

則 $\overrightarrow{PQ}=(1+2(s-t)，-2+(s-t)，6-(s+t))$

$\because\quad \overrightarrow{PQ}\perp L_1$，$\overrightarrow{PQ}\perp L_2 \quad\therefore\quad \overrightarrow{PQ}\cdot(2，1，1)=0$，$\overrightarrow{PQ}\cdot(2，1，-1)=0$

$\therefore\quad \begin{cases}2[1+2(s-t)]+[-2+(s-t)]+[6-(s+t)]=0\\2[1+2(s-t)]+[-2+(s-t)]-[6-(s+t)]=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}2s-3t+3=0\\3s-2t-3=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad s=t=3$

代入得$P(6，4，5)$，$Q(7，2，5)$

$\therefore\quad d(L_1，L_2)=\overline{PQ}=\sqrt{(6-7)^2+(4-2)^2+(5-5)^2}=\sqrt{5}$

18.求包含直線$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{-2}$且垂直於平面 $2x-y+z=0$ 的平面方程式。

【解答】$x+6y+4z+1=0$

【詳解】

設所求平面 E 的法向量爲$\vec{n}$

則$\vec{n}=(2，1，-2)\times(2，-1，1)=\left(\begin{vmatrix}1&-2\\-1&1\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}-2&2\\1&2\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}2&1\\2&-1\end{vmatrix}\right)$

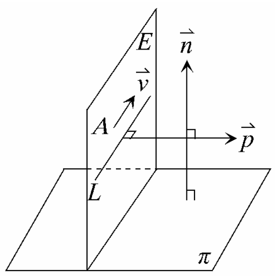
$=(-1，-6，-4)$

$\therefore\quad E：-1(x+1)-6(y-2)-4(z+3)=0 \quad\Rightarrow\quad x+6y+4z+1=0$

19.給定一平面π：$x-3y+2z+4=0$ 及一直線 L：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-6}{3}=\dfrac{z+1}{-5}$，試求在空間中包含 L 而與π垂直的平面方程式。

【解答】$x+y+z-4=0$

【解 1】



(1)設平面 E 包含直線 L 且與平面π垂直。E 的一法線向量 $\vec{p}=(a，b，c)$

(2) π之一法線向量$\vec{n}=(1，-3，2)$，L 之一方向向量$\vec{v}=(2，3，-5)$

則$\vec{n}\cdot\vec{p}=0$ 且 $\vec{p}\cdot\vec{v}=0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} a-3b+2c=0 \\ 2a+3b-5c=0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $a:b:c=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=9:9:9=1:1:1$

(3) L 上一定點 $A(-1,6,-1)$在 E 上，故 E 的方程式為

$1\cdot(x+1)+1\cdot(y-6)+1\cdot(z+1)=0$，即 $x+y+z-4=0$

【解 2】

$L:3(x+1)=2(y-6)$，$5(y-6)=-(z+1)$，設包含 L 且與π垂直之平面 E 之方程式為

$(3x-2y+15)+k(5y+3z-27)=0$ $\Rightarrow$ $3x+(5k-2)y+3kz+15-27k=0$

則$(1,-3,2)\cdot(3,5k-2,3k)=0$ $\Rightarrow$ $k=1$

$\therefore$ $E:3x+3y+3z-12=0$，即 $x+y+z-4=0$