高雄市明誠中學　高三(上)平時測驗　　日期：93.11.18					
範圍	數學 Book3 Chap1,2 向量	班級	普三　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1.xy 平面上，點 $P(2x-1，3x+5)$，x 為任意實數，則點 P 的圖形為一直線，其方程式是

(A) $3x-2y+13=0$　(B) $3x+2y-13=0$　(C) $3x+2y+13=0$　(D) $2x-3y-13=0$

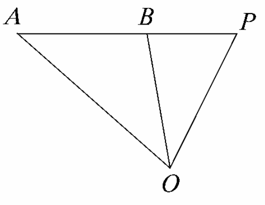
(E) $2x+3y+13=0$。

【詳解】

(1) $P(2x-1，3x+5)，x\in R \quad \Leftrightarrow \quad P(2t-1，3t+5)，t\in R$

(2)令 $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=3t+5 \end{cases}$ ，$t\in R \quad \Rightarrow \quad 3x-2y=-13 \quad \Rightarrow \quad 3x-2y+13=0$

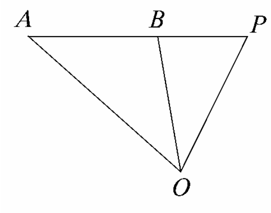
2.如下圖，已知 $\overline{AP}：\overline{BP}=m：n$，則 $\overrightarrow{OP}=$



(A) $\dfrac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}$　(B) $\dfrac{m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}}{m+n}$　(C) $\dfrac{m\overrightarrow{OA}-n\overrightarrow{OB}}{m+n}$

(D) $\dfrac{-n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m-n}$　(E) $\dfrac{n\overrightarrow{OA}-m\overrightarrow{OB}}{m-n}$

【詳解】



(1) $\overline{AB}：\overline{BP}=m-n：n$

(2)$\because \quad \overrightarrow{OB}=\dfrac{n\overrightarrow{OA}+(m-m)\overrightarrow{OP}}{(m-n)+n}=\dfrac{n\overrightarrow{OA}+(m-n)\overrightarrow{OP}}{m}$

$\therefore \quad n\overrightarrow{OA}+(m-n)\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OB} \quad \therefore \quad \overrightarrow{OP}=\dfrac{-n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m-n}$

3.設 $2\overrightarrow{PA}=\alpha\overrightarrow{PB}+\beta\overrightarrow{PC}$，$\alpha，\beta\in R$，若 $A，B，C$ 共線，則 $\alpha+\beta$ 之值為

(A) 1　(B) -1　(C) 2　(D) -2　(E)不能確定。

【詳解】

$2\overrightarrow{PA}=\alpha\overrightarrow{PB}+\beta\overrightarrow{PC} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PA}=\dfrac{\alpha}{2}\overrightarrow{PB}+\dfrac{\beta}{2}\overrightarrow{PC}$

$\because \quad A，B，C$ 共線 $\quad \Rightarrow \quad \dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}=1 \quad \Rightarrow \quad \alpha+\beta=2$

4.設 $|\vec{a}|=1，|\vec{b}|=2，|\vec{c}|=3，\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，則

(A)$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$　(B)$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-7$　(C)$\vec{b}$，$\vec{c}$ 夾角為 $180°$

(D)$\vec{c}$，$\vec{a}$ 夾角為 $0°$　(E)$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$ 夾角為 $60°$。

【詳解】

(A)由 $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$

$\therefore \quad (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=(-\vec{c})\cdot(-\vec{c}) \quad \therefore \quad |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{c}|^2 \quad \therefore \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=2$

(B)$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{0}\cdot\vec{0}=0$

$\therefore \quad |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=0$

$\therefore \quad \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-7$

(C)仿(A) ∴ $\vec{b}\cdot\vec{c}=-6$ ∴ $|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta=-6$ ∴ $\cos\theta=-1$ ∴ $\theta=180°$

(D)仿(A) ∴ $\vec{c}\cdot\vec{a}=-3$ ∴ $|\vec{c}||\vec{a}|\cos\theta=-3$ ∴ $\cos\theta=-1$ ∴ $\theta=180°$

(E)∵ $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1-4+4=1$ ∴ $|\vec{a}-\vec{b}|=1$

又$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}-\vec{b}|\cos\theta$ $|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=|-\vec{c}|\cos\theta$

$1-4=3\cos\theta$ ∴ $\cos\theta=-1$ ∴ $\theta=180°$

5.空間中三點 A，B，C，下列何者使 A，B，C 三點共線？

(A) $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ (B) $3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

(C) $2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ (D) $\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{3}\overrightarrow{OB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ (E) $\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

【詳解】

(A) $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ ∴ A，B，C 共線

(B) $3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ ∵ $-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}\neq 1$ ∴ A，B，C 不共線

(C) $2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ ∴ A，B，C 共線

(D) $\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{3}\overrightarrow{OB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ $\Rightarrow\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{2}\overrightarrow{OB}$ ∵ $\frac{1}{2}+\frac{4}{2}=\frac{5}{2}\neq 1$ ∴ A，B，C 不共線

(E) $\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ ∵ $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$ ∴ A，B，C 共線

【說明】設 A，B，C 為空間中三點，O 為任一點，

(1) $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，則 A，B，C 共線 $\Leftrightarrow$ $x+y=1$

(2) $x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，則 A，B，C 共線 $\Leftrightarrow$ $x+y+z=0$

6.設 $A(6，-4，4)$，$B(2，1，2)$，$C(3，-1，4)$，則下列敘述何者正確？

(A) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=18$ (B) $\cos\angle ABC=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ (C) $\sin\angle ABC=-\frac{2}{\sqrt{5}}$ (D) A 到 $\overleftrightarrow{BC}$ 的距離為 3

(E) $\triangle ABC$ 面積 $=\frac{9}{2}$。

【詳解】

$\overrightarrow{BA}=(4，-5，2)$，$\overrightarrow{BC}=(1，-2，2)$

(A) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(4，-5，2)\cdot(1，-2，2)=4+10+4=18$

(B) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overline{BA}\cdot\overline{BC}\cos\angle ABC$ $\Rightarrow$ $\cos\angle ABC=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}=\frac{18}{3\sqrt{5}\cdot 3}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

(C) $\sin\angle ABC=\frac{1}{\sqrt{5}}$

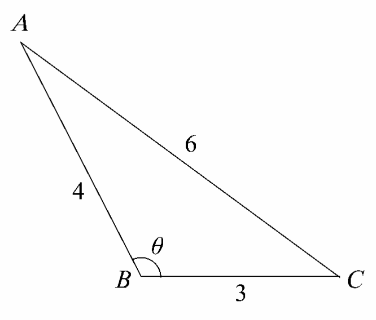
(D)(E) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{\overline{BA}^2\times\overline{BC}^2-(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{45\times 9-18^2}=\frac{9}{2}$。

而$\triangle ABC=\frac{1}{2}(\overline{BC})$ (A 到 $\overleftrightarrow{BC}$ 距離) $=\frac{9}{2}$ $\Rightarrow$ A 到 $\overleftrightarrow{BC}$ 距離 $=3$

二、填充題(每題 10 分)

7.△ABC的三邊長爲 $\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=3$，$\overline{AC}=6$，求

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$ ＿＿＿＿＿＿ 。



【詳解】

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos\theta$$

$$=-4\cdot 3\cdot\frac{4^2+3^2-6^2}{2\cdot 4\cdot 3}=\frac{11}{2}$$

8.設 $\vec{a}=(2，1)$，$\vec{b}=(3，-4)$，則 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的正射影爲＿＿＿ 。

【詳解】

$\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的正射影爲 $\left(\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\right)\cdot\vec{a}=\left(\dfrac{(3，-4)\cdot(2，1)}{(2，1)\cdot(2，1)}\right)\cdot(2，1)=\dfrac{2}{5}\cdot(2，1)=\left(\dfrac{4}{5}，\dfrac{2}{5}\right)$

9.△ABC中，$\overrightarrow{AB}=(4，-3)$，$\overrightarrow{AC}=(5，12)$，則△$ABC$的周長爲＿＿＿＿＿＿ 。

【詳解】

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=(-4，3)+(5，12)=(1，15)$

∴　△ABC 的周長爲 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=5+\sqrt{226}+13=18+\sqrt{226}$

10.設$P(0，1)$，$Q(1，2)$，$R(-3，-4)$，$S(0，2)$爲平面上四點，且 $\overrightarrow{AB}=t\,\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}$，$t$爲實數，

則當 $|\overrightarrow{AB}|$ 有最小值時，$t=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

【詳解】

由已知可得 $\overrightarrow{PQ}=(1，1)$，$\overrightarrow{RS}=(3，6)$

∴　$\overrightarrow{AB}=t\,\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}=t(1，1)+(3，6)=(t+3，t+6)$

$\Rightarrow\quad |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(t+3)^2+(t+6)^2}=\sqrt{2t^2+18t+45}=\sqrt{2(t+\frac{9}{2})^2+\frac{9}{2}}$

故當 $t=-\dfrac{9}{2}$ 時，$|\overrightarrow{AB}|$ 有最小値爲 $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

11.$\overrightarrow{OP}=(-1，b)$，$\overrightarrow{OA}=(5，5)$，$\overrightarrow{OP}$ 在 $\overrightarrow{OA}$ 之正射影爲$(1，1)$，則b之值 ＝ ＿＿＿＿＿＿ 。

【詳解】

$$\frac{(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|^2}=(1，1)\quad\Rightarrow\quad\frac{(-5+5b)\cdot(5，5)}{5^2+5^2}=(1，1)$$

$\Rightarrow\quad(-25+25b)\cdot(1，1)=50(1，1)$

$\Rightarrow\quad -25+25b=50\quad\Rightarrow\quad -1+b=2\quad\Rightarrow\quad b=3$

12.平行四邊形$ABCD$中，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=2$，則 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 之値爲＿＿＿＿＿＿ 。

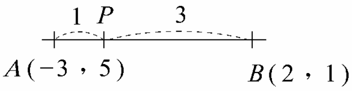
【詳解】

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB})$$

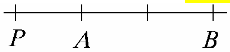
$$=|\overrightarrow{BC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2=4-9=-5$$

13.設$A(-3，5)$，$B(2，1)$，若P在直線AB上且$\overline{AP}$：$\overline{PB}=1：3$，則P的坐標為__________。

【詳解】

(1)內分時，

$\therefore\ P(\dfrac{-9+2}{1+3}，\dfrac{15+1}{1+3})=P(-\dfrac{7}{4}，4)$

(2)外分時，

$\because\ \overline{AP}：\overline{PB}=1：3\ \Rightarrow\ \overline{PA}：\overline{AB}=1：2\Rightarrow\ P(-\dfrac{11}{2}，7)$

14.設$\vec{a}=(3，2)$，$\vec{b}=(-1，5)$，$\vec{c}=(1，-4)$，求$(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c})=$__________。

【詳解】

$(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c})=[2(3，2)-3(-1，5)]\cdot[(-1，5)+(1，-4)]$

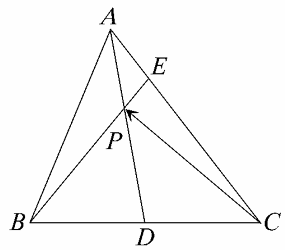
$=(9，-11)\cdot(0，1)=0+(-11)=-11$

15.$\triangle ABC$中，D為$\overline{BC}$的中點，E在$\overline{AC}$上，$\overline{AE}：\overline{EC}=1：3$，$\overline{AD}$與$\overline{BE}$交於$P$，若$\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}$，對數對$(x，y)=$__________。

【詳解】

$\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CA}+(1-x)\overrightarrow{CD}=x\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{2}(1-x)\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CP}=y\overrightarrow{CE}+(1-y)\overrightarrow{CB}=\dfrac{3}{4}y\overrightarrow{CA}+(1-y)\overrightarrow{CB}$



$\therefore\ \begin{cases} x=\dfrac{3}{4}y & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{1}{2}(1-x)=1-y & \cdots\cdots ② \end{cases}$

由①代入②得$y=\dfrac{4}{5}$，故$x=\dfrac{3}{5}$

$\therefore\ \overrightarrow{CP}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{CB}$，即$(x，y)=(\dfrac{3}{5}，\dfrac{1}{5})$

16.設四邊形$ABCD$中，$P\in\overline{AB}$且$\overline{AP}：\overline{PB}=2：3$，$Q\in\overline{CD}$且$\overline{CQ}：\overline{QD}=3：2$，則

$\overrightarrow{PQ}=$__________$\overrightarrow{AD}+$__________$\overrightarrow{BC}$。

【詳解】

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DQ}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{DC}=\dfrac{2}{5}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{AD}+\dfrac{2}{5}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})$

$=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{BC}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AD}$

17.$\triangle ABC$中，$\overline{AB}$之中點$D(5，-2)$，$\overline{BC}$之中點$E(-2，3)$，$\overline{AC}$之中點$F(6，5)$，則$\triangle ABC$之重心$G=$__________。

【詳解】

設$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$C(x_3，y_3)$，$G(x，y)$是$\triangle ABC$之重心

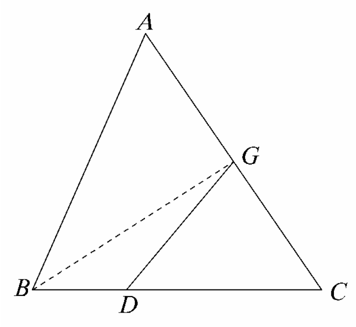
$$\Rightarrow \quad x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_2+x_3}{2}+\frac{x_3+x_1}{2}}{3}=\frac{5-2+6}{3}=3$$

$$y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=\frac{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_2+y_3}{2}+\frac{y_3+y_1}{2}}{3}=\frac{-2+3+5}{3}=2$$

∴ $G(3，2)$

18.△ABC中，D為$\overline{BC}$上一點且$\overline{CD}=2\overline{BD}$，$G$為$\overline{AC}$中點，若$\overrightarrow{GD}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$，$r$，$s\in R$，則數對 $(r，s)=$__________。

【詳解】



$$\overrightarrow{GD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{GB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{GC}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+\frac{1}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})$$

$$=\frac{2}{3}(-\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AB})+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$

∴ $(r，s)=(\frac{2}{3}，-\frac{1}{6})$

19.設$A(4，1，3)$，$B(6，4，3)$，$C(1，-3，3)$為空間中三點

(1)△ABC的重心坐標為__________。

(2)設$P\in\overline{AB}$且$\overline{AP}:\overline{BP}=2:5$，則$P$點坐標為__________。

(3)△ABC的面積為__________。

【詳解】

$A(4，1，3)$，$B(6，4，3)$，$C(1，-3，3)$

(1)設△ABC 的重心 $G(x，y，z)$，則 $x=\frac{4+6+1}{3}=\frac{11}{3}$，$y=\frac{1+4-3}{3}=\frac{2}{3}$，$z=\frac{3+3+3}{3}=3$

∴ $G(\frac{11}{3},\frac{2}{3},3)$

(2)∵ $P\in\overline{AB}$ 且 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:5$，令 $P(a，b，c)$

∴ 由分點公式得 $a=\frac{5\cdot4+2\cdot6}{2+5}=\frac{32}{7}$，$b=\frac{5\cdot1+2\cdot4}{2+5}=\frac{13}{7}$，$c=\frac{5\cdot3+2\cdot3}{2+5}=\frac{21}{7}=3$

∴ $P(\frac{32}{7},\frac{13}{7},3)$

(3)∵ $\overrightarrow{AB}=(2，3，0)$，$\overrightarrow{AC}=(-3，-4，0)\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2(-3)+3(-4)+0=-18$

∴ △ABC 的面積 $=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(2^2+3^2)((-3)^2+(-4)^2)-(-18)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{325-324}=\frac{1}{2}$$