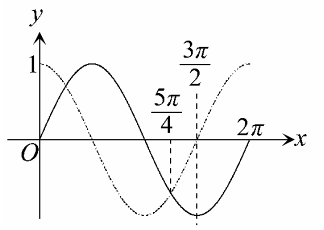
高雄市明誠中學 高三(上)平時測驗 日期：93.11.11					
範圍	數學 Book2 Chap3	班級	普三 班	姓名	
		座號			

一、單選題(每題 10 分)

1.設$\frac{5\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{2}$，則$\sqrt{1+\sin 2\theta}-\sqrt{1-\sin 2\theta}$ =

(A) $2\sin\theta$ (B) $2\cos\theta$ (C) $2\sin2\theta$ (D) $-2\sin\theta$ (E) $-2\cos\theta$



【解答】(E)

【詳解】

(1)∵ $\sqrt{1+\sin 2\theta}-\sqrt{1-\sin 2\theta}$

$=\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta}$

$=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}-\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}=|\sin\theta+\cos\theta|-|\sin\theta-\cos\theta|$

(2)由 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的圖形，知$\frac{5\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{2}$時，$0>\cos\theta>\sin\theta$

∴ $\sin\theta+\cos\theta<0$，$\sin\theta-\cos\theta<0$

(3)∴ 原式 $=-(\sin\theta+\cos\theta)+(\sin\theta-\cos\theta)=-2\cos\theta$

2.化簡 $\sin100°\sin(-160°)+\cos200°\cos(-280°)$得(A) -1 (B) 2 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) -2 (E) $\frac{1}{2}$

【解答】(C)

【詳解】

$\sin100°\sin(-160°)+\cos200°\cos(-280°)=\sin80°(-\sin20°)+(-\cos20°)\cos80°$

$=-(\cos20°\cos80°+\sin20°\sin80°)=-\cos(80°-20°)=-\cos60°=-\frac{1}{2}$

3.$\cos5°\cos10°\cos20°\cos40°=$ (A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{-1}{16}$ (C) $\frac{\cos50°}{8}$ (D) $\frac{\cos10°}{16\sin5°}$ (E)以上皆非

【解答】(D)

【詳解】

令 $P=\cos5°\cos10°\cos20°\cos40°$則

$(2\sin5°)P=2\sin5°(\cos5°\cos10°\cos20°\cos40°)=2(\sin5°\cos5°)\cos10°\cos20°\cos40°$

$=(\sin10°\cos10°)\cos20°\cos40°=(\frac{1}{2}\sin20°)\cos20°\cos40°=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin40°)\cos40°$

$=\frac{1}{4}(\frac{1}{2}\sin80°)=\frac{1}{8}\sin80°$

∴ $P=\frac{\sin80°}{16\sin5°}=\frac{\cos10°}{16\sin5°}$，故選(D)

4.若 $\sin2=a$，則下列何者正確？

(A)$-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<-\frac{1}{2}$ (B)$-\frac{\sqrt{3}}{2}<a<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C)$\frac{1}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E)$\frac{\sqrt{3}}{2}<a<1$

【解答】(E)

【詳解】 $a=\sin 2=\sin(\frac{180^\circ}{\pi}\times 2)=\sin\frac{360^\circ}{\pi}\doteqdot \sin 114.6^\circ=\sin 65.4^\circ$

$\therefore\quad 1>a>\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故選(E)

5.下列哪一個正切函數值最大？

(A) $\tan(-\frac{26\pi}{11})$ (B) $\tan(-\frac{7\pi}{11})$ (C) $\tan\frac{3\pi}{11}$ (D) $\tan\frac{13\pi}{11}$ (E) $\tan\frac{23\pi}{11}$

【解答】(B)

【詳解】

$\tan(-\frac{26\pi}{11})=\tan(-\frac{4\pi}{11})$，$\tan(-\frac{7\pi}{11})=\tan\frac{4\pi}{11}$，$\tan\frac{13\pi}{11}=\tan\frac{2\pi}{11}$，$\tan\frac{23\pi}{11}=\tan\frac{\pi}{11}$

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$時，$\tan x$ 爲遞增函數，$-\frac{4\pi}{11}<\frac{\pi}{11}<\frac{2\pi}{11}<\frac{3\pi}{11}<\frac{4\pi}{11}$

$\therefore\quad \tan(-\frac{4\pi}{11})<\tan\frac{\pi}{11}<\tan\frac{2\pi}{11}<\tan\frac{3\pi}{11}<\tan\frac{4\pi}{11}$

即 $\tan(-\frac{26\pi}{11})<\tan\frac{23\pi}{11}<\tan\frac{13\pi}{11}<\tan\frac{3\pi}{11}<\tan(-\frac{7\pi}{11})$，故 $\tan(-\frac{7\pi}{11})$最大

6.下列各函數的週期，何者是π？(複選)

(A) $y=\sin x$ (B) $y=2\left|\cos x\right|$ (C) $y=\tan x$ (D) $y=\sin\pi x$ (E) $y=3\sin 2x+5$

【解答】(B)(C)(E)

【詳解】(A) $y=\sin x$ 之週期爲 2π (B) $y=2\left|\cos x\right|$之週期爲$\frac{2\pi}{2}=\pi$ (C) $y=\tan x$ 之週期爲π

(D) $y=\sin\pi x$ 之週期爲$\frac{2\pi}{\pi}=2$ (E) $y=3\sin 2x+5$ 之週期爲$\frac{2\pi}{2}=\pi$

7.下列等式何者正確？(複選)

(A) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)$ (B) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$ (C) $\cos^2\alpha-\cos^2\beta=(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\alpha-\cos\beta)$ (D) $\cos^2\alpha-\cos^2\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$ (E) $\sec^2\alpha-\sec^2\beta=(\sec\alpha+\sec\beta)(\sec\alpha-\sec\beta)$

【解答】(A)(B)(C)(E)

【詳解】由$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$知(A)(C)(E)均正確

二、填充題(每題 10 分)

8.設θ是第四象限角，且$\cot\theta=-3$，則$\sin(\theta+\frac{\pi}{6})\sin(\theta-\frac{\pi}{6})$之值爲 $=$ ＿＿＿＿＿。

【解答】$-\frac{3}{20}$

【詳解】$\because\quad \cot\theta=-3$ 且θ是第四象限角 $\therefore\quad \sin\theta=\frac{-1}{\sqrt{10}}$，$\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$

故$\sin(\theta+\frac{\pi}{6})\sin(\theta-\frac{\pi}{6})=(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6})(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{6})$

$=\sin^2\theta\cos^2\frac{\pi}{6}-\cos^2\theta\sin^2\frac{\pi}{6}$

$=(-\frac{1}{\sqrt{10}})^2(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(\frac{3}{\sqrt{10}})^2\cdot(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{4}-\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{4}=-\frac{6}{40}=-\frac{3}{20}$

9.設 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，$\cos\alpha=\frac{7}{5\sqrt{2}}$ ，$\cos\beta=-\frac{3}{5}$ ，則

(1) $\sin(\alpha+\beta)=$ __________ 。 (2) $\alpha+\beta=$ __________ 。

【解答】(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $\frac{3\pi}{4}$

【詳解】

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ，$\cos\alpha=\frac{7}{5\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ $\sin\alpha=\frac{1}{5\sqrt{2}}$ ；$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，$\cos\beta=-\frac{3}{5}$ $\Rightarrow$ $\sin\beta=\frac{4}{5}$

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{5\sqrt{2}}(-\frac{3}{5})+\frac{7}{5\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{5}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(2)$\because$ $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$ $\therefore$ $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$

10.$\alpha+\beta=\frac{1}{4}\pi$，求$(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=$ __________ 。（α，β 爲銳角）

【解答】2

【詳解】$(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=1+\tan\alpha\tan\beta+\tan\alpha+\tan\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=1=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ $\Rightarrow$ $1-\tan\alpha\tan\beta=\tan\alpha+\tan\beta$

$\Rightarrow$ $1=\tan\alpha\tan\beta+\tan\alpha+\tan\beta$

$\therefore$ $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=2$

11.試求$\sin 23°\cos 112°-\sin 292°\sin 67°=$__________ 。

【解答】$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【詳解】原式 $=-\sin 23°\cos 68°+\sin 68°\cos 23°=\sin(68°-23°)=\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$

12.$\triangle ABC$中，$\cos A=\frac{3}{5}$ ，$\cos B=\frac{12}{13}$ ，則$a:b:c=$ __________ 。

【解答】52：25：63

【詳解】$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\frac{4}{5}:\frac{5}{13}:\frac{63}{65}=52:25:63$

13.一時鐘之時針長 3，則由上午 9 時到上午 9 時 30 分，時針掃過之扇形面積爲__________。

【解答】$\frac{9}{24}\pi$

【詳解】設兩時刻時針夾角爲 θ，$\theta=2\pi\times\frac{1}{12}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{12}$ ，故扇形面積 $=\frac{1}{2}\cdot 3^2\cdot\frac{\pi}{12}=\frac{9}{24}\pi$

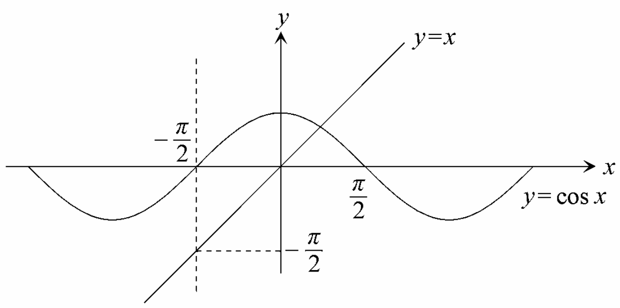
14.$\cos x=x$有__________個實數解。

【解答】1

【詳解】

$\begin{cases} y=x \\ y=\cos x \end{cases}$ 由圖知只有一個交點

$\therefore$ $\cos x=x$ 有一個實數解



15.函數$f(x)=2\sin^2x+\cos x-1$，$x\in R$，(1) $f(x)$之最大值爲______。 (2) $f(x)$之最小值爲____。

【解答】(1) $\frac{9}{8}$ (2) -2

16.設$\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$，$\sin\theta=-\frac{8}{17}$，則(1) $\sin2\theta=$__________。 (2) $\cos2\theta=$__________。

【解答】(1) $\frac{240}{289}$ (2) $\frac{161}{289}$

17.若$\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$且$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，則$\cos\theta=$__________。

【解答】$\frac{4}{5}$

【詳解】因爲$\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$，所以$\sin\theta<0$，$\cos\theta>0$

將$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$平方，得 $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}$ $\therefore$ $2\sin\theta\cos\theta=-\frac{24}{25}$

其次，因爲$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=1+\frac{24}{25}=\frac{49}{25}$ $\therefore$ $\sin\theta-\cos\theta=\pm\frac{7}{5}$（取負號）

將$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$及$\sin\theta-\cos\theta=-\frac{7}{5}$兩式相減，得 $2\cos\theta=\frac{8}{5}$ $\therefore$ $\cos\theta=\frac{4}{5}$

18.設$\tan\frac{\theta}{2}=3$，則$\sin2\theta=$__________。

【解答】$\frac{-24}{25}$

【詳解】$\because\tan\frac{\theta}{2}=3$ $\therefore$ $\sin\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{-4}{5}$

$$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{3}{5}\cdot(-\frac{4}{5})=\frac{-24}{25}$$

19.$\sin^2 27.5°+\sin^2 32.5°+\sin^2 87.5°=$__________。

【解答】$\frac{3}{2}$

【詳解】$\sin^2 27.5°+\sin^2 32.5°+\sin^2 87.5°=\frac{1-\cos55°}{2}+\frac{1-\cos65°}{2}+\frac{1-\cos175°}{2}$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}[(\cos55°+\cos65°)+\cos175°]=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}[2\cos60°\cos5°+(-\cos5°)]$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(2\times\frac{1}{2}\times\cos5°-\cos5°)=\frac{3}{2}-0=\frac{3}{2}$$

20.$\sin20°\sin40°\sin80°$之值爲__________。

【解答】$\frac{\sqrt{3}}{8}$

【詳解】原式 $=\sin20°\cdot\frac{1}{2}(\cos40°-\cos120°)=\sin20°\cdot\frac{1}{2}(\cos40°+\frac{1}{2})$

$$=\frac{1}{2}\cos40°\sin20°+\frac{1}{4}(\sin60°-\sin20°)+\frac{1}{4}\sin20°=\frac{1}{4}\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

21.設$P(\cos\alpha，-\sin\alpha)$，$Q(\cos\beta，-\sin\beta)$，且$\alpha-\beta=\frac{\pi}{3}$，則$\overline{PQ}$ =＿＿＿＿＿＿。

【解答】1

【詳解】$\overline{PQ}=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(-\sin\alpha+\sin\beta)^2}=\sqrt{1+1-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta}$

$=\sqrt{2-2\cos(\alpha-\beta)}=\sqrt{2-1}=1$

22.以$x-\cos40°$除$f(x)=3x-4x^3$之餘式為＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\frac{1}{2}$

【詳解】由餘式定理以$x-\cos40°$除$f(x)=3x-4x^3$的餘式為$f(\cos40°)$

$f(\cos40°)=3\cos40°-4\cos^3 40°=-(4\cos^3 40°-3\cos40°)$

$=-\cos(3\times40°)=-\cos120°=-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

23.計算：

(1) $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}$ 之值為＿＿＿＿＿＿。

(2) $\cos^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}$ 之值為＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) $-\frac{1}{16}$　(2) $\frac{6-\sqrt{2}}{8}$

【詳解】

(1)令$P=\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}$

則$\sin\frac{\pi}{15}\cdot P=\sin\frac{\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}$

$=\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}=\frac{1}{8}\sin\frac{8\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}=\frac{1}{16}\sin\frac{16\pi}{15}=-\frac{1}{16}\sin\frac{\pi}{15}$

$\therefore\ P=-\frac{1}{16}$

(2) $\cos^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}=(\cos^2\frac{5\pi}{16}+\sin^2\frac{5\pi}{16})^2-2\sin^2\frac{5\pi}{16}\cos^2\frac{5\pi}{16}$

$=1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{5\pi}{8}=\frac{1}{4}(1-2\sin^2\frac{5\pi}{8})+\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\cos\frac{5\pi}{4}+\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{2})+\frac{3}{4}=\frac{6-\sqrt{2}}{8}$

24.$\dfrac{1-\tan^2\frac{\pi}{10}}{1+\tan^2\frac{\pi}{10}}=$＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

【詳解】$\because\ \tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$，$\sin2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$，$\cos2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$\Rightarrow\ \dfrac{1-\tan^2\frac{\pi}{10}}{1+\tan^2\frac{\pi}{10}}=\cos\frac{\pi}{5}=\cos36°=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

25.設$\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$，試求$(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)$ 的值＿＿＿＿＿

與$(2+\omega)(2+\omega^2)(2+\omega^3)(2+\omega^4)$的值＿＿＿＿＿。

【解答】5；11

【詳解】

$\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$爲$x^5=1$的一虛根 $\Rightarrow$ $x^5=1$的五個根爲1，ω，ω^2，ω^3，ω^4

$\therefore$ $x^5-1=(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4)$

$\Rightarrow$ $x^4+x^3+x^2+x+1=(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4)$

令$x=1$得$(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)=1^4+1^3+1^2+1+1$

故$(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)=5$

令$x=-2$得$(-2-\omega)(-2-\omega^2)(-2-\omega^3)(-2-\omega^4)=(-2)^4+(-2)^3+(-2)^2+(-2)+1$

$\therefore$ $(-1)^4(2+\omega)(2+\omega^2)(2+\omega^3)(2+\omega^4)=11$，故$(2+\omega)(2+\omega^2)(2+\omega^3)(2+\omega^4)=11$