高雄市明誠中學 高三(上)平時測驗 日期：93.11.25					
範圍	數學 Book5,chap2	班級	普三　　班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 10 分)

1.設$m \in R$，若二次式$mx^2+(m-1)x+(m-1)<0$對任何實數x恆成立，則下列何者為真？

(A) $m>\frac{2}{3}$　(B) $m<-\frac{2}{3}$　(C) $m>\frac{1}{3}$　(D) $m<-\frac{1}{3}$　(E)以上皆非

【解答】(D)

【詳解】

$\because$ $mx^2+(m-1)x+(m-1)<0$，$\forall x\in R$恆成立

$\Leftrightarrow$ $m<0$，$(m-1)^2-4m(m-1)<0$　$\Rightarrow$　$m<0$，$3m^2-2m-1>0$

$\Rightarrow$ $m<0$，$(3m+1)(m-1)>0$　$\Rightarrow$　$m<0$，$m>1$ 或$m<-\frac{1}{3}$

$\therefore$ $m<-\frac{1}{3}$，故(D)為真

2.設$f(x)$為二次函數，且不等式$f(x)>0$之解為 $-2<x<4$，則$f(2x)<0$之解為

(A) $-1<x<2$　(B) $x<-1$ 或 $x>2$　(C) $x<-2$ 或 $x>4$　(D) $-4<x<8$

(E) $x<-4$ 或 $x>8$

【解答】(B)

【詳解】

$\because$ $f(x)>0$之解為 $-2<x<4$　$\Leftrightarrow$　$(x+2)(x-4)<0$

$\Leftrightarrow$ $x^2-2x-8<0$　$\Leftrightarrow$　$-x^2+2x+8>0$　$\therefore$　$f(x)=-x^2+2x+8$

則$f(2x)=-(2x)^2+2(2x)+8=-4x^2+4x+8$

$\therefore$ $f(2x)<0$　$\Rightarrow$　$-4x^2+4x+8<0$　$\Rightarrow$　$x^2-x-2>0$

$\Rightarrow$ $(x+1)(x-2)>0$　$\therefore$　$x>2$ 或$x<-1$

3.下列各敘述何者為真？(複選)

(A)函數 $-x^2+3x-4$ 最小值 $-\frac{7}{4}$

(B)函數 $-x^2+3x-4$ 在 $-1\le x\le 2$ 內的最小值為 -8

(C)不等式$x^2-2x+5>0$無實數解

(D)二次式ax^2+3x+2在$a>0$時恆為正　(E) $x>-1$ 時，$x+\frac{2}{x+1}$的值恆大於 1

【解答】(B)(E)

【詳解】

(A) $-x^2+3x-4=-(x-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{4}-4=-(x-\frac{3}{2})^2-\frac{7}{4}$　當$x=\frac{3}{2}$時，最大值 $-\frac{7}{4}$

(B)由(A) $\frac{3}{2}$在 $-1\le x\le 2$ 內　且$x=-1$時，其值為 -8；

$x=2$時，其值為 -2，故最小值為 -8

(C) $x^2-2x+5=(x-1)^2+4>4$，故$x^2-2x+5>0$的解為任意實數

(D) ax^2+3x+2 恆爲正的條件爲$a>0$ 且 $9-8a<0$，即$a>\frac{9}{8}$即原敘述不真

(E) $x>-1$ 時 $x+\frac{2}{x+1}=x+1+\frac{2}{x+1}-1\geq 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{2}{x+1}}-1=2\sqrt{2}\ -1>1$

二、填充題(每題 10 分)

4.不等式$|\,x^2-1\,|\geq 3$ 的解爲__________。

【解答】$x\leq -2$ 或 $x\geq 2$

【詳解】

$|\,x^2-1\,|\geq 3 \quad\Rightarrow\quad x^2-1\geq 3$ 或 $x^2-1\leq -3\Rightarrow\quad x^2\geq 4$ 或$x^2\leq -2$(不合)

$\Rightarrow\quad (x-2)(x+2)\geq 0 \quad\Rightarrow\quad x\leq -2$ 或$x\geq 2$

5.不等式$(2x^2-x+3)(4x^2-5x+1)<0$ 之解爲__________。

【解答】$\frac{1}{4}<x<1$

【詳解】

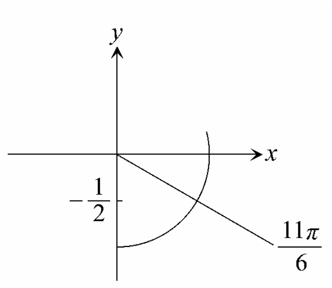
$\because\quad (2x^2-x+3)(4x^2-5x+1)<0$ 且 $2x^2-x+3>0$

$\therefore\quad 4x^2-5x+1<0 \quad\Rightarrow\quad (4x-1)(x-1)<0 \qquad\therefore\quad \frac{1}{4}<x<1$

6.不等式$|\sin x|\leq\frac{1}{2}$ 且 $\frac{3\pi}{2}\leq x\leq 2\pi$ 的解爲__________。

【解答】$\frac{11\pi}{6}\leq x\leq 2\pi$

【詳解】



如右圖 ，所以$\begin{cases}\frac{3\pi}{2}\leq x\leq 2\pi\\ |\sin x|\leq\frac{1}{2}\end{cases}$ 的解爲$\frac{11\pi}{6}\leq x\leq 2\pi$

7.設 $0\leq x\leq\pi$，則函數$y=\sin(x+\frac{4\pi}{3})-\cos(x+\frac{2\pi}{3})$ 的最大值爲__________，最小值爲____。

【解答】$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ ，$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

【詳解】

$y=\sin(x+\frac{4\pi}{3})-\cos(x+\frac{2\pi}{3})$

$=\sin x\cos\frac{4\pi}{3}+\cos x\sin\frac{4\pi}{3}-(\cos x\cos\frac{2\pi}{3}-\sin x\sin\frac{2\pi}{3})$

$=-\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

$=(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2})\sin x-(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2})\cos x$

$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}(\sin x-\cos x)=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$

$0 \le x \le \pi \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{4} \le x - \frac{\pi}{4} \le \frac{3\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin\,(x - \frac{\pi}{4}) \le 1$

故 y 的最大值為 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，最小值為 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

8.設 $0 \le \theta \le 2\pi$，聯立不等式 $\begin{cases} 2\sin\theta - \sqrt{2} \ge 0 \\ \sqrt{3}\tan\theta - 1 < 0 \end{cases}$ 的解為__________。

【解答】$\frac{\pi}{2} < \theta \le \frac{3\pi}{4}$

【詳解】

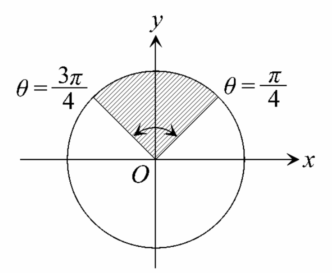
$2\sin\theta - \sqrt{2} \ \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$

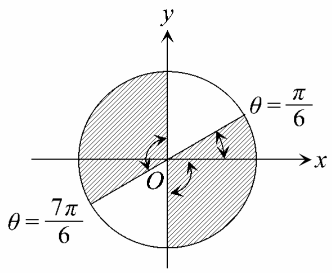
又 $0 \le \theta \le 2\pi \quad \therefore \quad \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}$……①

$\sqrt{3}\tan\theta - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\theta < \frac{1}{\sqrt{3}}$

又 $0 \le \theta \le 2\pi \quad \therefore \quad 0 \le \theta < \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{7\pi}{6}$，或 $\frac{3\pi}{2} < \theta \le 2\pi$……②

①，②的共同解為 $\frac{\pi}{2} < \theta \le \frac{3\pi}{4}$





9.設 $0 \le x \le 2\pi$，不等式 $\cos\,(x - \frac{\pi}{6}) > \sin x$ 的解為__________。

【解答】$0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3} \le x \le 2\pi$

【詳解】

$\cos\,(x - \frac{\pi}{6}) \ > \sin x \quad \Rightarrow \quad \cos x\cos\frac{\pi}{6} + \sin x\sin\frac{\pi}{6} > \sin x$

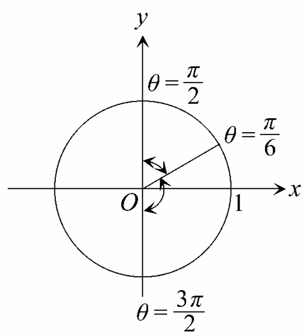
$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x - \sin x > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x > 0$

$\Rightarrow \quad \cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x > 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(x + \frac{\pi}{6}) > 0$

已知 $0 \le x \le 2\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{6} \le x + \frac{\pi}{6} \le 2\pi + \frac{\pi}{6}$

又因為 $\cos(x + \frac{\pi}{6}) > 0$，故 $\frac{\pi}{6} \le x + \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{6} \le 2\pi + \frac{\pi}{6}$

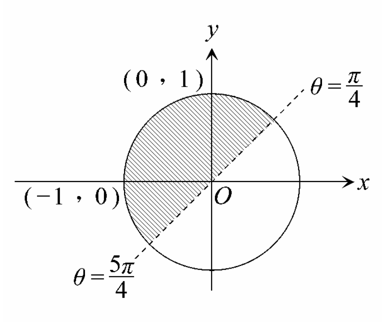
即 $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3} \le x \le 2\pi$



10.x爲任意實數時，$\sin x>\cos x$的解爲__________。

【解答】$2n\pi+\dfrac{\pi}{4}<x<2n\pi+\dfrac{5\pi}{4}$ ，$n\in Z$

【詳解 1】



(1) $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$時，$\sin x>\cos x\quad\Rightarrow\quad\dfrac{\pi}{4}<x\le\dfrac{\pi}{2}$

(2) $\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi$，$\sin x>0>\cos x$ 恆成立

(3) $\pi\le x\le\dfrac{3\pi}{2}$時，$\sin x>\cos x\quad\Rightarrow\quad\pi\le x<\dfrac{5\pi}{4}$

(4) $\dfrac{3\pi}{2}\le x\le 2\pi$ 時，$\sin x<0<\cos x$ 不合

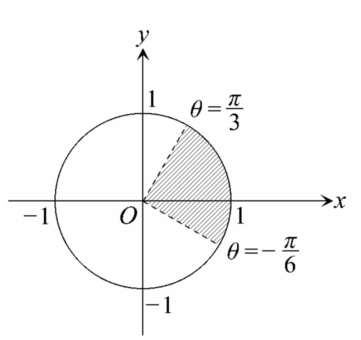
由(1)(2)(3)得知，x 爲任意實數時， $\sin x>\cos x$ 的所有解爲$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{5\pi}{4}$及所有同界角

記爲 $2n\pi+\dfrac{\pi}{4}<x<2n\pi+\dfrac{5\pi}{4}\ (n\in Z)$

11.設$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\tan\theta<\sqrt{3}$ 的解爲__________。

【解答】$-\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{\pi}{3}$

【詳解】

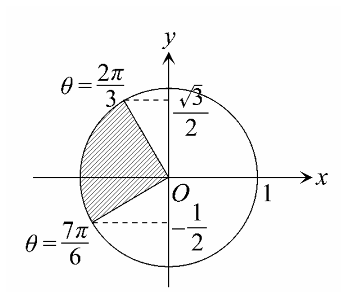


$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ，$\tan(-\dfrac{\pi}{6})=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ 且 $\tan\theta$ 在任何一象限內遞增，故$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\tan\theta<\sqrt{3}$時 ，$-\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{\pi}{3}$

12.若$\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{3\pi}{2}$ ，則$\dfrac{-1}{2}\le\sin x\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的解爲__________。

【解答】$\dfrac{3\pi}{3}\le x\le\dfrac{7\pi}{6}$

【詳解】



如下圖，在$\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{3\pi}{2}$ 內，$\dfrac{-1}{2}\le\sin x\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的解爲$\dfrac{2\pi}{3}\le x\le\dfrac{7\pi}{6}$

13.設$f(x)=(3-a)x^2+ax-2a$對所有實數x，其值恆爲正，則a之範圍爲__________。

【解答】$a<0$

【詳解】

$f(x)=(3-a)x^2+ax-2a$對所有實數x，其值恆爲正的充要條件爲

$3-a>0$ 且判別式$a^2-4(3-a)(-2a)<0$

即$a<3$ 且 $7a^2-24a>0\quad\Leftrightarrow\quad a<3$ 且($a<0$ 或$a>\dfrac{24}{7}$)，故得$a<0$

14.對數不等式$\log_{\frac{3}{2}}(2x-1)>\log_{\frac{9}{4}}(2x^2-3x-5)$的解爲__________。

【解答】$x>\dfrac{5}{2}$

【詳解】

$\log_{\frac{3}{2}}(2x-1) > \log_{\frac{9}{4}}(2x^2-3x-5)$

(1)真數爲正數　$\Rightarrow$　$2x-1>0$ 且 $2x^2-3x-5>0 \Rightarrow$　$x>\frac{1}{2}$ 且($x<-1$ 或$x>\frac{5}{2}$)　$\Rightarrow$　$x>\frac{5}{2}$

(2)$\log_{\frac{9}{4}}(2x^2-3x-5) = \log_{(\frac{3}{2})^2}(2x^2-3x-5)$

$$=\frac{1}{2}\log_{\frac{3}{2}}(2x^2-3x-5) = \log_{\frac{3}{2}}\sqrt{2x^2-3x-5}$$

$\therefore$　原式爲$\log_{\frac{3}{2}}(2x-1) > \log_{\frac{3}{2}}\sqrt{2x^2-3x-5}$　$\Rightarrow$　$2x-1>\sqrt{2x^2-3x-5}$

平方化簡得 $2x^2-x+6>0$ 此式恆成立，即解爲所有實數，由(1)(2)交集得$x>\frac{5}{2}$

15.設$f(x)=4^x-2^{x-1}+1$，則當$x=$__________時，$f(x)$有最小值 $=$________。

【解答】$x=-2$，$M=\frac{15}{16}$

【詳解】

$f(x)=4^x-2^{x-1}+1=2^{2x}-2^{-1}\cdot 2^x+1$

令$t=2^x$，則$t>0$，$f(x)=t^2-\frac{1}{2}t+1=(t-\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}$

當$t=\frac{1}{4}$時，$f(x)$有最小值$\frac{15}{16}$，此時 $2^x=\frac{1}{4}=2^{-2}$　$\Rightarrow$　$x=-2$

16.不等式 $2+\log_{\frac{1}{2}}(5-x)+\log_2\frac{1}{x}>0$ 的解爲__________。

【解答】$0<x<1$ 或 $4<x<5$

【詳解】

$2+\log_{\frac{1}{2}}(5-x)+\log_2\frac{1}{x}>0$

$2+\log_{\frac{1}{2}}(5-x)+\log_{\frac{1}{2}}x>0$

$\log_{\frac{1}{2}}x(5-x)>-2=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^{-2}$

(1) $5-x>0$，$x>0$　$\Rightarrow$　$0<x<5$

(2)由遞減性質得$x(5-x)<(\frac{1}{2})^{-2}=4$

$\Rightarrow$　$x^2-5x+4>0$　$\therefore$　$(x-1)(x-4)>0$　$\Rightarrow$　$x<1$ 或$x>4$

由(1)，(2)的交集得 $0<x<1$ 或 $4<x<5$

17.不等式 $3^{2x}+1<3^{x+2}+3^{x-2}$的解爲__________。

【解答】 $-2<x<2$

【詳解】

$3^{2x}+1<3^{x+2}+3^{x-2}$時，$(3^x)^2+1<9\cdot 3^x+\frac{1}{9}\cdot 3^x$

即$(3^x)^2 - \frac{82}{9} \cdot 3^x + 1 < 0$，可知 $9(3^x)^2 - 82 \cdot 3^x + 9 < 0$

此時$(9 \cdot 3^x - 1)(3^x - 9) < 0$，所以$\frac{1}{9} < 3^x < 9$，因此 $-2 < x < 2$