

高雄市明誠中學 高三(上)平時測驗					日期：93.09.16
範圍	數學 Book1	班級	普三	班	姓名
		座號			

一、單選題(每題 5 分)

1. 設 $a_n = (n+1) + (\frac{n}{2} + 2) + (\frac{n}{4} + 3) + (\frac{n}{8} + 4)$, $n \in N$, 下列各敘述何者正確?

- (A) $\langle a_n \rangle$ 為等差數列, 公差為 10 (B) $\langle a_n \rangle$ 為等差數列, 公差為 $\frac{15}{8}$ (C) $\langle a_n \rangle$ 為等比數列, 公比為 $\frac{1}{8}$ (D) $\langle a_n \rangle$ 為等比數列, 公比為 $\frac{1}{2}$ (E) $\langle a_n \rangle$ 既非等差亦非等比

【解答】(B)

【詳解】

因為 $a_n = (n+1) + (\frac{n}{2} + 2) + (\frac{n}{4} + 3) + (\frac{n}{8} + 4) = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) \cdot n + (1 + 2 + 3 + 4) = \frac{15}{8}n + 10$

而且 $d = a_n - a_{n-1} = (\frac{15}{8}n + 10) - [\frac{15}{8}(n-1) + 10] = \frac{15}{8}$ (定數)

故 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列, 公差為 $d = \frac{15}{8}$

2. 下列何者為方程式： $5x^5 + 11x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 11x + 6 = 0$ 的有理根？

- (A) $-\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $-\frac{3}{5}$ (D) $\frac{3}{5}$ (E) $-\frac{6}{5}$

【解答】(E)

【詳解】

若 α 為 $f(x) = 5x^5 + 11x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 11x + 6 = 0$ 之有理根, 則 $f(\alpha) = 0$

而選項(E) $\alpha = -\frac{6}{5}$ 使得 $f(-\frac{6}{5}) = 0$, 故選(E)

3. 下列何者是質數？

- (A) 1953 (B) 1903 (C) 391 (D) 1781 (E) 1987

【解答】(E)

【詳解】

(A): $\because 3 \mid 1953 \therefore 1953$ 不是質數

(B): $\because 11 \mid (9+3) - (0+1) \therefore 11 \mid 1903 \therefore 1903$ 不是質數

(C): $\because 17 \mid 391 \therefore 391$ 不是質數

(D): $\because 13 \mid 1781 \therefore 1781$ 不是質數

(E): $\because 44^2 < 1987 < 45^2$, 則小於 45 的質數, 均非 1987 之因數 $\therefore 1987$ 為質數

4. 設 a, b 均為非零的實數, 下列何者成立？

- (A) $\sqrt{a^2} = a$ (B) $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ (C) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (D) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ (E) $i^{83} = -i$ (其中 $i = \sqrt{-1}$)

【解答】(E)

【詳解】

(A) $\because \sqrt{a^2} = |a| \therefore \sqrt{a^2} = a$ 不恆真

(B) \because 當 $a < 0$ 時, $\sqrt{a}i = (\sqrt{-a}i)i = -\sqrt{-a} \therefore \sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ 不恆真

(C) 當 $a < 0, b < 0$ 時, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = -\sqrt{ab} \therefore \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 不恆真

(D) 當 $a > 0, b < 0$ 時, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}} \therefore \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 不恆真

(E) $\because i^4 = 1 \therefore i^{83} = i^3 = -i$ 為真

5. 化簡 $\frac{i + i^3 + i^5 + \dots + i^{101}}{i \cdot i^3 \cdot i^5 \cdot \dots \cdot i^{101}} = ?$

(A) 1 (B) i (C) -1 (D) $-i$ (E) 0

【解答】(A)

【詳解】

$$\text{原式} = \frac{[i(1-i^{102})]}{i^{1+3+5+\dots+101}} = \frac{i[1-(-1)]}{i^{2601}} = \frac{i}{i} = 1$$

6. 設 A, B 為二集合, $x \notin A - B$, 則下列何者正確?

(A) $x \notin A$ (B) $x \notin B$ (C) $x \notin A, x \in B$ (D) $x \notin A$ 或 $x \in B$ (E) $x \in B - A$

【解答】(D)

【詳解】

$\because x \in A - B \Leftrightarrow x \in A, x \notin B \therefore x \notin A - B \Leftrightarrow x \notin A$ 或 $x \in B$

注意: $x \notin A$ 未必正確 \therefore 不可選(A)

$x \in B$ 未必正確 \therefore 不可選(C), (E)

二、多重選擇題(每題 8 分)

7. 設 $f(x) = (x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x - 2) \cdot (3x^6 + 2x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 1)$, 則 $f(x)$ 的

(A) x^7 係數為 -2 (B) x^9 係數為 2 (C) 各項係數和為 -13 (D) 各奇次項係數和為 -9
(E) 領導係數為 3

【解答】(A)(B)(C)(D)(E)

【詳解】

(A) x^7 係數為 $2 + 2 - 1 + 4 - 9 = -2$

(B) x^9 係數為 $1 + 4 - 3 = 2$

(C) $f(x)$ 的各項係數和為 $= f(1) = (-1) \cdot 13 = -13$

(D) $f(x)$ 的各奇次項係數和為 $\frac{f(1) - f(-1)}{2} = \frac{(-13) - (5)}{2} = -9$

(E) $f(x)$ 的領導係數 $= 3x^{11}$ 的係數 $= 3$

8. (1) 二次式 $ax^2 + bx - 4$ 以 $x + 1$ 除之得餘式為 3 , 以 $x - 1$ 除之得餘式為 1 , 則

(A) $a = 6$ (B) $b = -6$ (C) $b = -1$ (D) $a + b = 5$ (E) $a - b = 6$

(2) 承接上題, 如以 $x - 2$ 除之得餘式為

(A) 20 (B) 18 (C) 16 (D) 14 (E) 12

【解答】(1) (A)(C)(D) (2) (B)

【詳解】

(1) 令 $f(x) = ax^2 + bx - 4$ ，則 $f(-1) = a - b - 4 = 3 \quad \therefore a - b = 7 \dots\dots ①$

又 $f(1) = a + b - 4 = 1 \quad \therefore a + b = 5 \dots\dots ②$

解①，②得 $a = 6, b = -1$

(2) 以 $x - 2$ 除 $f(x) = 6x^2 - x - 4$ 之餘式為 $f(2) = 6 \times 4 - 2 - 4 = 18$

9. 下列敘述何者正確？

- (A) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots < \frac{2}{3}$ (B) $\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^n} + \dots < 1$ (C) $\frac{3}{5} + \frac{3}{5^2} + \dots + \frac{3}{5^n} + \dots < 1$
 (D) $\frac{4}{5} + \frac{4}{5^2} + \dots + \frac{4}{5^n} + \dots < 1$ (E) $\frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \dots + \frac{7}{10^n} + \dots < \frac{4}{5}$

【解答】(A)(C)(E)

【詳解】

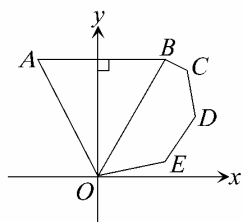
(A) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ (B) $\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^n} + \dots = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1$

(C) $\frac{3}{5} + \frac{3}{5^2} + \dots + \frac{3}{5^n} + \dots = \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{3}{4} < 1$ (D) $\frac{4}{5} + \frac{4}{5^2} + \dots + \frac{4}{5^n} + \dots = \frac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = 1$

(E) $\frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \dots + \frac{7}{10^n} + \dots = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9} < \frac{4}{5}$

10. 觀察下圖中線段的敘述，試問下列選項何者為對？

- (A) \overline{AB} 的斜率最小 (B) \overline{OB} 的斜率最大 (C) \overline{CD} 的斜率最小 (D) \overline{BC} 的斜率介於 $0, -1$ 之間
 (E) \overline{OA} 斜率的絕對值大於 \overline{OB} 斜率的絕對值



【解答】(B)(C)(D)(E)

【詳解】

由圖可知斜率之大小為： $\overline{CD} < \overline{OA} < \overline{BC} < \overline{AB} < \overline{OE} < \overline{DE} < \overline{OB}$

且 \overline{OA} 比 \overline{OB} 陡，故 \overline{OA} 斜率的絕對值大於 \overline{OB} 斜率的絕對值

11. 設 R 表全部實數的集合且 $f(x)$ 為 R 映至 R 的函數，若 $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq -3 \\ x^2+1, & -3 < x \leq 5 \\ 7x, & x > 5 \end{cases}$ ，則下列

敘述何者正確？

- (A) $f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$ (B) $f(-4) = f(4)$ (C) $f(6) > f(a), \forall a \leq 5$ (D) $f(x)$ 為 $1-1$ 函數 (E) $f(x)$

為映成函數

【解答】(A)(C)

【解 1】

$$(A) f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4}$$

$$(B) f(-4) = -5, f(4) = 17 \quad \therefore f(-4) \neq f(4)$$

$$(C) f(6) = 42$$

$$(i) \text{當 } x \leq -3 \text{ 時, } 2x \leq -6 \quad \therefore 2x + 3 \leq -3, \text{ 即 } f(x) \leq -3$$

$$(ii) \text{當 } -3 < x \leq 5 \text{ 時, } 0 \leq x^2 \leq 25 \quad \therefore 1 \leq x^2 + 1 \leq 26, \text{ 即 } 1 \leq f(x) \leq 26$$

$$\therefore f(6) > f(a), \forall a \leq 5$$

$$(D) \because f(-1) = 2 = f(1) \quad \therefore f(x) \text{ 不是 1-1 函數}$$

$$(E) \because \begin{cases} (1) \text{當 } x \leq -3 \text{ 時, } f(x) \leq -3 \\ (2) \text{當 } -3 < x \leq 5 \text{ 時, } 1 \leq f(x) \leq 26 \\ (3) \text{當 } x > 5 \text{ 時, } f(x) > 35 \end{cases} \quad \therefore f(x) \text{ 不是映成函數}$$

三、填充題(每題 10 分)

12. $x, y \in N, xy - 2x + 3y = 0$, 則 $(x, y) =$ _____。

【解答】(3, 1)

【詳解】

$$xy - 2x + 3y = 0 \Rightarrow x(y - 2) + 3(y - 2) = -6 \Rightarrow (x + 3)(y - 2) = -6 (x, y \in N)$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x+3 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ \hline y-2 & -6 & -3 & -2 & -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} x & -2 & -1 & 0 & 3 \\ \hline y & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow (x, y) = (3, 1)$$

13. 已知高一新生介於 700~800 人, 若以每班 40 人, 45 人或 48 人編成一班, 均餘 3 人, 則高一新生共有_____人。

【解答】723

【詳解】

設新生人數為 $n, 700 \leq n \leq 800$

$$\text{由題意 } n - 3 = k[40, 45, 48], k \in N \Rightarrow n - 3 = 720k \Rightarrow n = 720k + 3$$

$$\text{故取 } n = 720 + 3 = 723$$

14.(1) 求 6328 與 18645 之最大公因數_____。

(2) 續上題, 找出一組整數 m, n 使 $6328m + 18645n = (6328, 18645)$, 則數對 $(m, n) =$ _____。

【解答】(1) 113 (2) (56, -19)

【詳解】

(1) 利用輾轉相除法

1	6328	18645	2
	5989	12656	
1	339	5989	17
	226	5763	
	113	226	2
		226	
		0	

$$\therefore (6328, 18645) = 113$$

$$(2) 18645 = 6328 \times 2 + 5989 \cdots \cdots \textcircled{1}; 6328 = 5989 \times 1 + 339 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$5989 = 339 \times 17 + 226 \cdots \cdots \textcircled{3}; 339 = 226 \times 1 + 113 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$226 = 113 \times 2 + 0, \text{ 由 } \textcircled{4} 113 = 339 + 226 \times (-1)$$

$$\text{由 } \textcircled{3} = 339 + (5989 - 339 \times 17)(-1) = 339 \times 18 + 5989 \times (-1)$$

$$\text{由 } \textcircled{2} = (6328 - 5989 \times 1) \times 18 + 5989 \times (-1) = 6328 \times 18 + 5989 \times (-19)$$

$$\text{由 } \textcircled{1} = 6328 \times 18 + (18645 - 6328 \times 2) \times (-19) = 6328 \times 56 + 18645 \times (-19)$$

$$\therefore (m, n) = (56, -19)$$

15. 若七位自然數 $26ab607$ 為 99 之倍數，則 $a + b =$ _____。

【解答】 6

【詳解】

$$(1) 3 \mid 2 + 6 + a + b + 6 + 0 + 7 = a + b + 21 \Rightarrow 3 \mid a + b$$

$$\Rightarrow a + b = 0, 3, 6, 9, 12, 15 \text{ 或 } 18$$

$$(2) 9 \mid a + b + 21 = 21, 24, \underline{27}, 30, 33, \underline{36} \text{ 或 } 39, \text{ 故 } a + b = 6 \text{ 或 } 15$$

$$(3) 11 \mid 2 - 6 + a - b + 6 - 0 + 7 = a - b + 9$$

$$\text{當 } a + b = 6 \Rightarrow b = 6 - a, \text{ 則 } a - b + 9 = a - 6 + a + 9 = 2a + 3, 0 \leq a \leq 9, a \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore 2a + 3 = 3, 5, 7, 9, \underline{11}, 13, 15, 17, 19, 21$$

$$\text{當 } a + b = 15 \Rightarrow b = 15 - a, \text{ 則 } a - b + 9 = a - 15 + a + 9 = 2a - 6, 0 \leq a \leq 9, a \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore 2a - 6 = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 \text{ (均不為 } 11 \text{ 之倍數)}$$

$$\text{故 } a + b = 6$$

16. 若 a, b, q_1, q_2, q_3 均為正整數，且合於下列條件

$$\textcircled{1} a = bq_1 + 8472; \textcircled{2} b = 8472q_2 + 444; \textcircled{3} 8472 = 444q_3 + 36, \text{ 則 } a, b \text{ 的最大公因數為 } \underline{\hspace{2cm}}$$

【解答】 12

【詳解】

$$\therefore a = bq_1 + 8472 \quad \therefore (a, b) = (b, 8472) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\therefore b = 8472q_2 + 444 \quad \therefore (b, 8472) = (8472, 444) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\therefore 8472 = 444q_3 + 36 \quad \therefore (8472, 444) = (444, 36) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\xrightarrow{\text{由 } \textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}} (a, b) = (444, 36) = 12$$

17. 集合 $A = \{x \mid -3 < x < 1, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x \mid -2 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{R}\}$, 若 A, B 的宇集為所有實數

$$\mathbb{R}, A' \text{ 為 } A \text{ 的補集, 則 } A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}, A' \cap B = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【解答】 $\{x \mid -3 < x \leq 4\}, \{x \mid 1 \leq x \leq 4\}$

【詳解】

$$A \cup B = \{x \mid -3 < x < 1\} \cup \{x \mid -2 \leq x \leq 4\} = \{x \mid -3 < x \leq 4\}$$

$$A' \cap B = \{x \mid x \leq -3 \text{ 或 } x \geq 1\} \cap \{x \mid -2 \leq x \leq 4\} = \{x \mid 1 \leq x \leq 4\}$$

18. 設 $\{2x, x+y\} = \{6, 2\}$ ，則數對 $(x, y) =$ _____。

【解答】 $(3, -1)$ 或 $(1, 5)$

【詳解】

$$\text{若 } \{2x, x+y\} = \{6, 2\}, \text{ 則 } \begin{cases} 2x = 6 \\ x+y = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 2x = 2 \\ x+y = 6 \end{cases}$$

$$\text{即 } (x, y) = (3, -1) \text{ 或 } (1, 5)$$

19. 求下列各級數之和：

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} 3 \left(\frac{4}{5}\right)^n = \text{_____}。$$

$$(2) 0.3 + 0.033 + 0.00333 + 0.0003333 + \dots = \text{_____}。$$

【解答】 (1) 15 (2) $\frac{100}{297}$

【詳解】

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} 3 \left(\frac{4}{5}\right)^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 3 \times \frac{1}{1 - \frac{4}{5}} = 15$$

$$(2) 0.3 + 0.033 + 0.00333 + 0.0003333 + \dots = \frac{3}{9} (0.9 + 0.099 + 0.00999 + 0.0009999 + \dots)$$

$$= \frac{3}{9} \left[\left(1 - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{10^3}\right) + \left(\frac{1}{10^2} - \frac{1}{10^5}\right) + \dots \right] = \frac{3}{9} \left[\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots\right) - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^5} + \dots\right) \right]$$

$$= \frac{3}{9} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - \frac{1}{10} \right) = \frac{3}{9} \times \frac{100}{99} = \frac{100}{297}$$

20. 已知 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle a_n' \rangle$ 均為等差數列，且其第 n 項之比 $a_n : a_n' = (n+2) : (2n+1)$ ，設其前 n 項和分別為 S_n 與 S_n' ，則 $S_8 : S_8' =$ _____。

【解答】 13 : 20

【詳解】

設兩等差數列 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle a_n' \rangle$ 的首項分別為 a_1 、 a_1' ，公差為 d 、 d'

$$\therefore \frac{a_n}{a_n'} = \frac{a_1 + (n-1)d}{a_1' + (n-1)d'} = \frac{n+2}{2n+1} \text{ 且 } \frac{S_8}{S_8'} = \frac{\frac{8}{2}[2a_1 + (8-1)d]}{\frac{8}{2}[2a_1' + (8-1)d']} = \frac{2a_1 + 7d}{2a_1' + 7d'} = \frac{a_1 + \frac{7}{2}d}{a_1' + \frac{7}{2}d'}$$

$$\text{取 } n-1 = \frac{7}{2} \Rightarrow n = \frac{9}{2}, \text{ 故 } \frac{S_8}{S_8'} = \frac{a_1 + \frac{7}{2}d}{a_1' + \frac{7}{2}d'} = \frac{\frac{9}{2} + 2}{2 \times \frac{9}{2} + 1} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{20}{2}} = \frac{13}{20}$$

21. 有一等比數列，首項為 7，末項為 448，和為 889，則

(1) 項數為 _____。 (2) 第五項為 _____。

【解答】 (1) 7 (2) 112

22.一等差數列之前 10 項之和為 30，前 30 項之和為 10，則其前 40 項之和為_____。

【解答】-40

【詳解】

設前 n 項之和為 S_n ，且令 $S_{20} = a$ ， $S_{40} = b$ ，則 S_{10} ， $S_{20} - S_{10}$ ， $S_{30} - S_{20}$ ， $S_{40} - S_{30}$ 亦成等差數列

即 30 ， $a - 30$ ， $10 - a$ ， $b - 10$ 成等差數列，公差 $d = (a - 30) - 30 = a - 60$

則 $(b - 10) = (10 - a) + d = (10 - a) + (a - 60) = -50$ ，得 $S_{40} = b = -40$

23.等差數列 $-1, 2, 5, 8, \dots, (3n+2), \dots$ ，至少要加到第幾項總和才會超過 75。

答：_____。

【解答】8

【詳解】

$$a_1 = -1, d = 3 \Rightarrow S_n = \frac{n}{2} [2(-1) + (n-1)(3)] > 75 \Rightarrow n(3n-5) > 150$$

$$\Rightarrow 3n^2 - 5n - 150 > 0 \Rightarrow n > \frac{5 + \sqrt{25 + 12 \cdot 150}}{2 \cdot 3} = \frac{5 + 5\sqrt{73}}{6} \doteq 7.95\dots$$

$\therefore n \geq 8$

24. $x \in \mathbb{R}$ ，若 $|x-2| \leq 5$ 為 $|x+1| \leq k$ 的充分條件，則 k 之最小值 = _____。

【解答】8

【詳解】

$$|x-2| \leq 5 \Rightarrow -3 \leq x \leq 7, |x+1| \leq k \Rightarrow (-k-1) \leq x \leq (k-1)$$

若 $|x-2| \leq 5$ 為 $|x+1| \leq k$ 之充分條件，則 $\{x | -3 \leq x \leq 7\} \subset \{x | (-k-1) \leq x \leq (k-1)\}$

$$\text{即} \begin{cases} -k-1 \leq -3 \\ k-1 \geq 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq 2 \\ k \geq 8 \end{cases}, \text{得 } k \geq 8, \text{所以 } k \text{ 之最小值為 } 8$$

25. $x, y \in \mathbb{R}$ ，若 $(x+yi)^2 = -8-6i$ ，則數對 $(x, y) =$ _____。

【解答】(1, -3)或(-1, 3)

【詳解】

$$\because (x+yi)^2 = (x^2 - y^2) + (2xy)i = -8 - 6i \quad \therefore \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ xy = -3 \end{cases}$$

$$\text{由 } y = -\frac{3}{x} \text{ 代入 } x^2 - y^2 = -8 \quad \therefore x^4 + 8x^2 - 9 = 0$$

$$\therefore x^2 = 1 \text{ 或 } x^2 = -9 \text{ (不合)} \quad \therefore x = 1, y = -3 \text{ 或 } x = -1, y = 3$$

26.直線 $L: mx - y + 3 = 0$ 恆通過一定點 P ，且 L 交 x 軸於 A ，交 y 軸於 B ，以 $A-B-P$ 之順序共線，且 $\overline{AB} : \overline{BP} = 1 : 3$ ，求 L 的方程式_____。

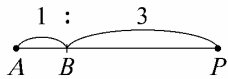
【解答】 $9x - 4y + 3 = 0$

【詳解】

$$L: m(x-1) - (y-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y-3=0 \end{cases}, \text{得定點 } P(x, y) = (1, 3)$$

$$\text{又} \begin{cases} L \text{ 交 } x \text{ 軸於 } A, \text{ 則 } A(1 - \frac{3}{m}, 0) \\ L \text{ 交 } y \text{ 軸於 } B, \text{ 則 } B(0, 3 - m) \end{cases}, \text{ 而 } \begin{cases} 0 = \frac{3(1 - \frac{3}{m}) + 1 \times 1}{1 + 3} \\ 3 - m = \frac{3 \times 0 + 1 \times 3}{1 + 3} \end{cases}, \text{ 得 } m = \frac{9}{4}$$

故 $L: \frac{9}{4}x - y + 3 - \frac{9}{4} = 0$, 即 $L: 9x - 4y + 3 = 0$



27. 設 $A(1, 9), B(6, 2)$,

(1) 在 y 軸上找一點 P 使 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 有最小值, 則 P 點坐標為 _____。又此最小值為 _____。

(2) 在直線 $x - 5y = 12$ 上找一點 Q 使 $|\overline{QA} - \overline{QB}|$ 有最大值, 則 Q 點坐標為 _____, 又此最大值為 _____。

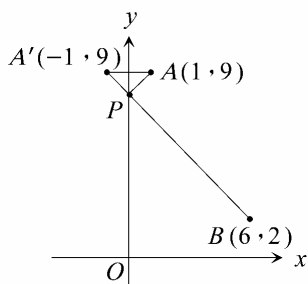
【解答】 (1) $P(0, 8)$; 最小值 $7\sqrt{2}$ (2) $Q(8, -\frac{4}{5})$; 最大值 $\sqrt{74}$

【詳解】

(1) $\because A(1, 9), B(6, 2)$ 在 y 軸之同側 \therefore 先求點 $A(1, 9)$ 對 y 軸的對稱點 $A'(-1, 9)$

直線 $\overleftrightarrow{A'B}$ 之方程式為 $y - 9 = \frac{2 - 9}{6 + 1}(x + 1) \Rightarrow x + y = 8$

令 $x = 0$, 則 $y = 8 \Rightarrow$ 點 $P(0, 8)$, 而 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 之最小值 $\overline{A'B} = \sqrt{49 + 49} = 7\sqrt{2}$



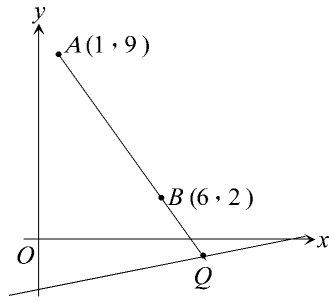
(2) $\because (1 - 45 - 12)(6 - 10 - 12) > 0$

$\therefore A, B$ 在直線 $x - 5y = 12$ 的同側 \Rightarrow 直線 \overleftrightarrow{AB} 與 $x - 5y = 12$ 之交點即所求 Q 點

\therefore 直線 \overleftrightarrow{AB} 方程式為 $y - 9 = \frac{2 - 9}{6 - 1}(x - 1) \Rightarrow 7x + 5y = 52$

解 $\begin{cases} 7x + 5y = 52 \\ x - 5y = 12 \end{cases}$ 得交點 $(8, -\frac{4}{5})$, 即為所求之 Q 點

而 $|\overline{QA} - \overline{QB}|$ 之最大值為 $\overline{AB} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$



28. 設 a 為實數，直線 $L: ax + 7y + 9 = 0$ 通過點 $(2, 1)$ ，試求直線 L 的斜率為_____。

【解答】 $\frac{8}{7}$

【詳解】

$$\because (2, 1) \in L: ax + 7y + 9 = 0 \quad \therefore a = -8$$

$$\text{故斜率 } m = \frac{-a}{7} = \frac{8}{7}$$

29. 設 a, b 均為有理數，若 $(2 + \sqrt{3})a + (1 - \sqrt{3})b = 7 - \sqrt{3}$ ，則 $3a + 4b =$ _____。

【解答】 18

【詳解】

$$(2 + \sqrt{3})a + (1 - \sqrt{3})b = 7 - \sqrt{3}, \quad 2a + \sqrt{3}a + b - \sqrt{3}b - 7 + \sqrt{3} = 0, \quad (2a + b - 7) + (a - b + 1)\sqrt{3} = 0$$

$$\because a, b \text{ 均為有理數} \quad \therefore \begin{cases} 2a + b - 7 = 0 \\ a - b + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 3 \quad \therefore 3a + 4b = 6 + 12 = 18$$