高雄市明誠中學 高三(上) 數學平時測驗 日期：93.09.30					
範圍	Book1CH4& Book2CH1	班級	普三 班	姓名	
		座號			

一、選擇題(每題 8 分)

1.設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，則下列何者正確？

(A) $a^0=0$ (B) $a^2\cdot a^3=a^6$ (C) $(a^3)^2=a^9$ (D) $a^{-2}=\dfrac{1}{a^2}$ (E) $\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{3}{2}}$

【解答】(D)

【詳解】

$a>1$ 且 $a\neq 1$

(A) $a^0=1\neq 0$ (B) $a^2\cdot a^3=a^{2+3}=a^5\neq a^6$

(C) $(a^3)^2=a^{3\times 2}=a^6\neq a^9$ (D) $a^{-2}\cdot a^2=1$ (E) $\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}\neq a^{\frac{3}{2}}$

2.設某一項新試驗中，細菌數目一天後增加 a 倍，且已知 3 天後細菌數為 200,000 個，$4\dfrac{1}{2}$ 天後細菌數為 1,600,000 個，則 5 天後細菌數為

(A)2,000,000 (B)2,500,000 (C)3,200,000 (D)3,500,000 (E)3,600,000 個

【解答】(C)

【詳解】

設原有細菌數為 A，1 天後為 $A(1+a)$

3 天後為 $A(1+a)^3=200,000\cdots\cdots$①，$4\dfrac{1}{2}$ 天後為 $A(1+a)^{\frac{9}{2}}=1,600,000\cdots\cdots$②

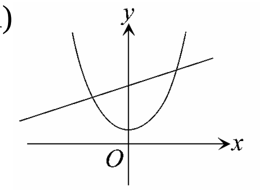
$\dfrac{②}{①}$ 得 $(1+a)^{\frac{3}{2}}=8 \quad\Rightarrow\quad (1+a)^{\frac{1}{2}}=2 \quad\therefore\quad a=3$

$\therefore$ 5 天後細菌數為 $A(1+a)^5=A(1+a)^3\cdot(1+a)^2$

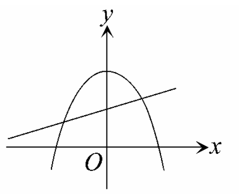
$=(200,000)(1+a)^2=(200,000)(1+3)^2=3,200,000$

3.下列何者可能是直線 $y=ax+b$ 與拋物線 $y=ax^2+b$ 圖形的聯集？

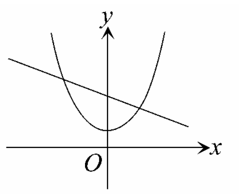
(A)



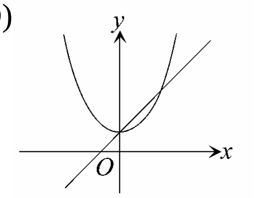
(B)



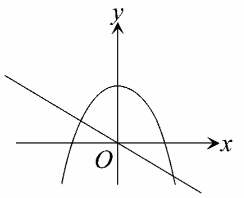
(C)



(D)



(E)



【解答】(D)

【詳解】

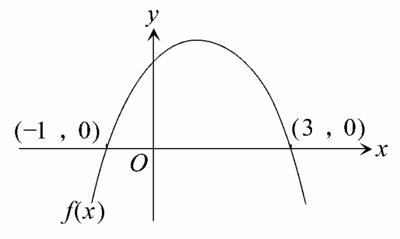
直線 $y=ax+b$，拋物線 $y=ax^2+b$ 與 y 軸交點均為 $(0，b)$

又 $a>0$ 時，$y=ax+b$ 的斜率為正，直線向右上升，而拋物線 $y=ax^2+b$ 開口向上

故選(D)

4.若函數$f(x)=ax^2+bx+c$的圖形如下圖，則下列敘述何者正確？(複選)

(A) $a<0$　(B) $b>0$　(C) $c<0$　(D) $b^2-4ac<0$　(E) $9a+4b+2c>0$



【解答】(A)(B)(E)

【詳解】

(A)∵　圖形向下凹　∴　$a<0$

(B)∵　$f(x)=0$ 二根和為 $-\dfrac{b}{a}>0$　∴　$b>0$ 或頂點為$\left(-\dfrac{b}{2a}，-\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$在第一象限

∴　$-\dfrac{b}{2a}>0$　⇒　$b>0$

(C)∵　圖形交y軸於$(0，c)$　∴　$c>0$

(D)∵　圖形交x軸於相異兩點　∴　$f(x)=0$ 有二不等實根

∴　$D=b^2-4ac>0$ 或利用頂點的y坐標$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}>0$　∴　$b^2-4ac>0$

(E) $9a+4b+2c=(9a+3b+c)+(b+c)=f(3)+(b+c)=0+(b+c)>0$

5. (複選)設$a^{1.4}=2.1017\cdots\cdots$①，$a^{1.8}=2.5984\cdots\cdots$②，$a^{2.8}=4.4169\cdots\cdots$③，$a^{4.6}=11.4774\cdots$④

（均取四位小數，以下四捨五入），四式中恰有一式為錯誤，下列何者正確？

(A)①②③有一個錯誤　(B)②③有一個錯誤　(C)①②均正確　(D)③④有一個錯誤

(E)②④均正確

【解答】(A)(B)(C)(D)(E)

【詳解】

$(a^{1.4})^2=(2.1017)^2=4.4171\neq a^{2.8}$　∴　$a^{1.4}$與$a^{2.8}$有一為錯誤

又$a^{1.8}\cdot a^{2.8}=11.4769\neq a^{4.6}$　∴　$a^{1.8}$、$a^{2.8}$與$a^{4.6}$有一為錯誤，由題意知，$a^{2.8}$為錯誤

三、填充題(每題 10 分)

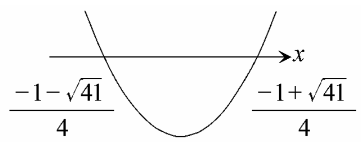
6.不等式 $2x^2+x-5>0$ 的解為__________。

【解答】$x<\dfrac{-1-\sqrt{41}}{4}$ 或 $x>\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4}$

【詳解】

$2x^2+x-5=0$ 二根為$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+40}}{4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{41}}{4}$

$y=2x^2+x-5$ 之圖形如下



故 $2x^2+x-5>0$ 的解爲 $x<\dfrac{-1-\sqrt{41}}{4}$ 或 $x>\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4}$

7.整係數方程式 $x^4-5x^3+mx^2+nx+14=0$ 有四相異有理根，則最大根爲__________。

【解答】7

【詳解】

利用整係數一次因式檢驗法

若有有理根 $\dfrac{q}{p}$，則 $p\,|\,1$ 且 $q\,|\,14$，即 $p=1$，$q=\pm1$，±2，±7，±14

設四相異有理根爲 α，β，γ，$\delta\in\{\pm1$，±2，±7，$\pm14\}$

又 $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma+\delta=5\\ \alpha\beta\gamma\delta=14\end{cases}$ $\therefore$ 四根爲 1，-1，-2 及 7，最大根爲 7

8.若 x 爲正整數，滿足 $\dfrac{(x-1)(x+1)^2(x^2-3x-4)}{x^2-x+1}<0$，則 $x=$__________。

【解答】2 或 3

【詳解】

$\because$ $x^2-x+1>0$，$\forall x\in R$，又 $(x+1)^2\geq 0$

$\Rightarrow$ $(x-1)(x^2-3x-4)<0$ $\Rightarrow$ $(x-1)(x-4)(x+1)<0$ $\Rightarrow$ $x<-1$ 或 $1<x<4$

$\therefore$ $x=2$ 或 3

9.$ax^2+(a-1)x-8=0$ 有一根介於 1 和 2 之間，另一根介於 -2 和 -1 之間，則 a 值的範圍爲__________。

【解答】$3<a<\dfrac{9}{2}$

【詳解】

利用勘根定理 $\begin{cases}f(1)f(2)<0\\ f(-2)f(-1)<0\end{cases}$，$\begin{cases}(2a-9)(6a-10)<0\\ (2a-6)(-7)<0\end{cases}$，$\begin{cases}\dfrac{5}{3}<a<\dfrac{9}{2}\cdots\cdots①\\ a>3\cdots\cdots②\end{cases}$

$①\cap②$ $\Rightarrow$ $3<a<\dfrac{9}{2}$

10.設不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解爲 $-2<x<5$，則不等式 $ax^2+3bx-2c>0$ 之解爲________。

【解答】$4<x<5$

【詳解】

$-2<x<5$ $\Rightarrow$ $(x+2)(x-5)<0$ $\Rightarrow$ $x^2-3x-10<0$ $\Rightarrow$ $-x^2+3x+10>0$

$ax^2+bx+c>0$ 與 $-x^2+3x+10>0$ 爲同義不等式

（有相同解）

$\therefore$ $a=-t$，$b=3t$，$c=10t$，$t>0$

故 $ax^2+3bx-2c>0$，即 $-tx^2+9tx-20t>0$

$\Rightarrow$ $-x^2+9x-20>0$ $\Rightarrow$ $x^2-9x+20<0$ $\Rightarrow$ $(x-4)(x-5)<0$ $\Rightarrow$ $4<x<5$

11.若二次函數 $y=ax^2+6x+(a+11)$ 之圖形均在直線 $y=-2x+5$ 的下方，則 a 的範圍爲_____。

【解答】$a<-8$

【詳解】

題意表$ax^2+6x+(a+11)<-2x+5$恆成立，即$ax^2+8x+(a+6)<0$恆成立

故$\begin{cases} a<0 \\ D=8^2-4a(a+6)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<0 & \cdots\cdots① \\ a<-8 \text{ 或 } a>2 & \cdots\cdots② \end{cases}$

由①∩②得$a<-8$

12.不等式$\dfrac{2x}{x-1}\le x+2$的解爲__________。

【解答】$-1\le x<1$ 或 $x\ge 2$

【詳解】

$\dfrac{2x}{x-1}\le x+2$

$\Rightarrow\quad (x+2)-\dfrac{2x}{x-1}\ge 0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{(x+2)(x-1)-2x}{x-1}\ge 0$

$\Rightarrow\quad \dfrac{x^2-x-2}{x-1}\ge 0 \quad\Rightarrow\quad (x^2-x-2)(x-1)\ge 0$，但$x\ne 1$

$\Rightarrow\quad (x-2)(x+1)(x-1)\ge 0$，但$x\ne 1 \quad\Rightarrow\quad -1\le x\le 1$ 或$x\ge 2$，但$x\ne 1$

得 $-1\le x\le 1$ 或$x\ge 2$

13.若$f(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$，已知$f(x)=0$有一根爲$\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$，又$a+bi$亦爲其根（$a<0$，$b\ne 0$），則數對$(a，b)=$__________。

【解答】$(-\dfrac{1}{2}，\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

【詳解】

$\because\quad (x-\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2})(x-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2})=x^2+x+1$

又$f(x)=(x^2+x+1)(x^3+1) \quad\Rightarrow\quad f(x)=(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$

$\therefore\quad f(x)=0$之五根爲$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$，$-1$，$\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\quad (a，b)=(-\dfrac{1}{2}，\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

14.設一拋物線$y=x^2+ax+b$，其中a，b皆爲實數，若通過$(3，2)$且頂點在直線$L：x-y-1=0$上，求數對$(a，b)=$__________。（有兩組解）

【解答】$(-4，5)$，$(-6，11)$

【詳解】

$(3，2)$代入$y=x^2+ax+b \quad\Rightarrow\quad b=-3a-7 \quad\cdots\cdots①$

則$y=x^2+ax+b=x^2+ax+(-3a-7)=(x+\dfrac{a}{2})^2-3a-7-\dfrac{a^2}{4}$

頂點$(\dfrac{-a}{2}，-3a-7-\dfrac{a^2}{4})$代入$x-y-1=0 \quad\Rightarrow\quad a^2+10a+24=0$

即$(a+4)(a+6)=0$，$a=-4$或-6代入①得$b=5$或11

$\therefore\ (a，b) = (-4，5)$或$(-6，11)$

15.二次函數$y = ax^2 + bx + 5$ 在$x = 2$ 時有最小值 3，則數對$(a，b) =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$(\frac{1}{2}，-2)$

【詳解】

$y = ax^2 + bx + 5 = a(x-2)^2 + 3$

$y = ax^2 + bx + 5 = ax^2 - 4ax + 4a + 3 \Rightarrow \begin{cases} 4a + 3 = 5 \\ b = -4a \end{cases}$

$\therefore\ (a，b) = (\frac{1}{2}，-2)$

16.若整係數多項方程式$ax^2 + bx + 41 = 0$ 之兩根爲相異整數，且已知$a > 0$，$b < 0$，則$b =$＿＿＿。

【解答】-42

【詳解】

已知a，b爲整數，且方程式$ax^2 + bx + 41 = 0$ 之兩根爲相異整數

由有理根檢驗法，知此二根必爲 41 的因數，可能爲± 1，± 41

由根與係數關係，二根乘積=$\frac{41}{a}$爲整數且$a > 0$ $\therefore$ $a = 1$ 或$a = 41$

①若$a = 1$，而二根爲 1，41 或-1，-41，又二根和=$\frac{-b}{a} = -b > 0$

$\therefore$ 二根必爲 1 與 41，而$-b = 1 + 41 = 42$ $\therefore$ $b = -42$

②若$a = 41$，則二根乘積= 1，而二根必爲 1，1，此與已知二根爲相異整數不合

17.設$a > 0$，且$a^{2x} = 3$，求$\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x - a^{-x}} =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\frac{14}{3}$

【詳解】原式$= \frac{a^{4x} + a^{-2x}}{a^{2x} - 1} = \frac{(a^{2x})^2 + (a^{2x})^{-1}}{a^{2x} - 1} = \frac{3^2 + 3^{-1}}{3 - 1} = \frac{9 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{28}{3}}{2} = \frac{14}{3}$

18.解方程式$3(4^x + 4^{-x}) - 16(2^x + 2^{-x}) + 26 = 0$：＿＿＿＿＿＿＿＿。

【解答】$x = \log_2 \frac{1}{3}$或$\log_2 3$或 0

【詳解】

$3(4^x + 4^{-x}) - 16(2^x + 2^{-x}) + 26 = 0$

令$2^x + 2^{-x} = t$，$(2^x + 2^{-x})^2 = 4^x + 4^{-x} + 2 = t^2 \quad \Rightarrow \quad 4^x + 4^{-x} = t^2 - 2$，$t \geq 2$

$\therefore\ 3(t^2 - 2) - 16(t) + 26 = 0$，$3t^2 - 16t + 20 = 0$，$(3t - 10)(t - 2) = 0$，$t = \frac{10}{3}$或 2

①$t = \frac{10}{3} \Rightarrow 2^x + 2^{-x} = \frac{10}{3} \Rightarrow 3(2^x)^2 - 10(2^x) + 3 = 0 \Rightarrow 2^x = \frac{1}{3}$或 3

$\Rightarrow x = \log_2 \frac{1}{3}$或$\log_2 3$

②$t = 2 \Rightarrow 2^x + 2^{-x} = 2 \Rightarrow (2^x)^2 - 2(2^x) + 1 = 0 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0$

19.解方程式：

(1) $4^{x+1}-5\cdot 2^{x+2}+16=0 \Rightarrow x=$＿＿＿＿＿＿。

(2) $6^{x}-4\cdot 3^{x}-3\cdot 2^{x}+12=0 \Rightarrow x=$＿＿＿＿＿＿。

【解答】(1) 0，2　(2) 1，2

【詳解】

(1)原式 $\Rightarrow 4\cdot (2^{x})^{2}-20\cdot 2^{x}+16=0$

$\Rightarrow (2^{x})^{2}-5\cdot 2^{x}+4=0 \Rightarrow (2^{x}-1)(2^{x}-4)=0 \Rightarrow 2^{x}=1$ 或 $2^{x}=4 \Rightarrow x=0$ 或 2

(2)原式 $\Rightarrow 2^{x}\cdot 3^{x}-4\cdot 3^{x}-3\cdot 2^{x}+12=0$

$\Rightarrow (2^{x}-4)(3^{x}-3)=0 \Rightarrow 2^{x}=4$ 或 $3^{x}=3 \Rightarrow x=2$ 或 1

20.指數不等式$(0.125)^{x}<0.25<2^{-2x}$的解爲＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{2}{3}<x<1$

【詳解】

$(0.125)^{x}<0.25<2^{-2x} \Rightarrow (\dfrac{1}{8})^{x}<\dfrac{1}{4}<2^{-2x} \Rightarrow 2^{-3x}<2^{-2}<2^{-2x} \Rightarrow -3x<-2<-2x$

$\Rightarrow 1>x>\dfrac{2}{3}$

21.已知 $3388^{x}=(33.88)^{y}=1000$，求$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$之值 $=$＿＿＿＿＿＿。

【解答】$\dfrac{2}{3}$

【詳解】

$$\text{原式} \Rightarrow \begin{cases} 3388=10^{\frac{3}{x}} \cdots\cdots ① \\ 33.88=10^{\frac{3}{y}} \cdots\cdots ② \end{cases}$$

$\dfrac{①}{②} \Rightarrow 100=10^{\frac{3}{x}-\frac{3}{y}} \quad \therefore \dfrac{3}{x}-\dfrac{3}{y}=2$，即$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{3}$