高雄市明誠中學 高三(上)平時測驗 日期：93.09.23					
範圍	數學 Book1-CH3,4	班級	普三 班	姓名	
		座號			

一、單選題(每題 8 分)

1.試計算：$7^7-50\times7^5+6\times7^4+4\times7^3+25\times7^2-30\times7-12$ 的值為

(A) – 26 (B) 2 (C) – 22 (D) 20 (E) – 18

【解答】(A)

【詳解】

設 $f(x)=x^7-50x^5+6x^4+4x^3+25x^2-30x-12$

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l} 1 & +0 & -50 & +6 & +4 & +25 & -30 & -12 & 7 \\ & +7 & +49 & -7 & -7 & -21 & +28 & -14 & \\ \hline 1 & +7 & -1 & -1 & -3 & +4 & -2 & -26 & \end{array}$$

所求 $=f(7)=-26$

2.級數 $1+\underbrace{2+2}_{2個}+\underbrace{3+3+3}_{3個}+\underbrace{4+4+4+4}_{4個}+\cdots+\underbrace{n+n+\cdots+n}_{n個}+\cdots$，其前 100 項的和為

(A) 945 (B) 932 (C) 919 (D) 906 (E) 893

【解答】(A)

【詳解】

設第 100 項為 k，則 $1+2+3+4+\cdots+13=\dfrac{13(1+13)}{2}=91\Rightarrow 91+9=100$

$\therefore\ k=14$

前 100 項的和為 $1+\underbrace{2+2}_{2個}+\underbrace{3+3+3}_{3個}+\cdots+\underbrace{13+\cdots+13}_{13個}+\underbrace{14+\cdots+14}_{9個}$

$=1^2+2^2+\cdots+13^2+14\times9=819+126=945$

【公式】$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

3. 列無窮數列，何者收斂？(複選)

(A) $<\dfrac{n^2+n+1}{n^2+3}>$ (B) $<\dfrac{2n-5}{3n^2+n+1}>$ (C) $<\dfrac{n^2+999}{3n-1000}>$ (D) $<(\dfrac{101}{100})^n>$ (E) $<(-1)^n>$

【解答】(A)(B)

【詳解】

(A)$\because\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+1}{n^2+3}=1$（定數） $\therefore$ 收斂

(B)$\because\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-5}{3n^2+n+1}=0$ $\therefore$ 收斂

(C)$\because\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+999}{3n-1000}=\infty$，不存在 $\therefore$ 發散

(D)$\because\ \lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{101}{100})^n=\infty$，不存在 $\therefore$ 發散

(E)$\because\ \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n=\begin{cases}-1，n為奇數\\ 1，n為偶數\end{cases}$，不是定數 $\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在 $\therefore$ 數列發散

二、填充題(每題 10 分)

4. 每個月月初存入 1 萬元，年利率 1.2%，每月以複利計息，則一年後結算本利和爲_____。（已知$(1.001)^{12}=1.01206622$）

【解答】120783

【詳解】

$\because$ 年利率 1.2% $\therefore$ 月利率$r=0.1\%$

本利和$S=1(1+r)^{12}+(1+r)^{11}+\cdots+1(1+r)$

$$=(1+r)+(1+r)^2+\cdots+(1+r)^{12}=\frac{(1+r)[(1+r)^{12}-1]}{(1+r)-1}=(\frac{1+r}{r})[(1+r)^{12}-1]$$

$$=(\frac{\frac{1001}{1000}}{\frac{1}{1000}})[(1.001)^{12}-1]=1001\times(1.01206622-1)=12.0783\text{（萬元）}=120783\text{（元）}$$

5. 已知無窮等比級數和爲 9，前兩項和爲 8，則此等比級數公比爲__________。

【解答】$\pm\frac{1}{3}$

【詳解】

設首項爲a_1，公比爲r，則$\begin{cases}\dfrac{a_1}{1-r}=9\\ a_1+a_1r=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1(\dfrac{1}{1-r})=9\cdots\cdots①\\ a_1(1+r)=8\cdots\cdots②\end{cases}$

$\frac{②}{①}$ 得$(1+r)(1-r)=\frac{8}{9}\Rightarrow 1-r^2=\frac{8}{9}\Rightarrow r^2=\frac{1}{9}\Rightarrow r=\pm\frac{1}{3}$

6. 集合序列{1}，{2，3}，{4，5，6}，{7，8，9，10}，…，若S_n表第n個集合內之元素各數值總和，求$S_{21}=$__________。

【解答】4641

【詳解】

$1+2+3+\cdots+20=\frac{(1+20)\times 20}{2}=210$，$1+2+3+\cdots+21=\frac{(1+21)\times 21}{2}=231$

$\therefore\ S_{21}=211+212+\cdots+231=\frac{(211+231)\times 21}{2}=4641$

7.求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3^n+(-4)^{n+2}]}{7^n}=$__________。

【解答】$\frac{-223}{44}$

【詳解】$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3^n+(-4)^{n+2}]}{7^n}=\sum_{n=1}^{\infty}[(\frac{3}{7})^n+(-4)^2\cdot(\frac{-4}{7})^n]=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{7})^n+16\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{-4}{7})^n$

$$=\frac{\frac{3}{7}}{1-\frac{3}{7}}+16\times\frac{(\frac{-4}{7})}{1-(\frac{-4}{7})}=\frac{-223}{44}$$

8. 下列各級數之和：

(1) $\sum_{n=1}^{10}(2^n+3n+4)=$__________ 。 (2) $\sum_{n=0}^{\infty}3(\frac{4}{5})^n=$__________ 。

(3) 0.3 + 0.033 + 0.00333 + 0.0003333 +⋯= __________ 。

【解答】(1) 2251 (2) 15 (3) $\frac{100}{297}$

【詳解】

(1) $\sum_{n=1}^{10}(2^n+3n+4)=\sum_{n=1}^{10}2^n+3\times\sum_{n=1}^{10}n+\sum_{n=1}^{10}4$

$=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}+3\times\frac{10\,(1+10)}{2}+4\times10=2046+165+40=2251$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}3(\frac{4}{5})^n=3\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{4}{5})^n=3\times\frac{1}{1-\frac{4}{5}}=15$

(3) $0.3+0.033+0.00333+0.0003333+\cdots=\frac{3}{9}(0.9+0.099+0.00999+0.0009999+\cdots)$

$=\frac{3}{9}[\,(1-\frac{1}{10})+(\frac{1}{10}-\frac{1}{10^3})+(\frac{1}{10^2}-\frac{1}{10^5})+\cdots]\ =\frac{3}{9}[\,(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots)-(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^5}+\cdots)]$

$=\frac{3}{9}(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}-\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10^2}})=\frac{3}{9}\times\frac{100}{99}=\frac{100}{297}$

9. 等比數列$\{a_n\}$的第四項爲 6，第六項爲 24，而且數列的每一項都是正數，求這個數列的前 10 項總和爲__________ 。

【解答】$\frac{3069}{4}$

【詳解】

$\begin{cases}6=a_1r^3 & \cdots\cdots① \\ 24=a_1r^5 & \cdots\cdots②\end{cases}$ ， $\frac{②}{①}$ $\Rightarrow$ $r^2=4$，得$r=2$，-2（不合）

$r=2$ 代入①，得$a_1=\frac{3}{4}$ ，所求$=\frac{\frac{3}{4}(2^{10}-1)}{2-1}=\frac{3069}{4}$

10.S_n表數列$\langle a_n\rangle$的前n項的和，若$S_n=2n^2+n$，則此數列的第n項$a_n=$__________ 。

【解答】$a_n=4n-1$，$\forall n\in N$

【詳解】

因爲$a_1=S_1=2\cdot1^2+1=3$

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n^2+n)-[2(n-1)^2+(n-1)]=(2n^2+n)-(2n^2-3n+1)=4n-1$，$n\geq2$

而$a_1=3=4\cdot1-1$。所以對任意自然數n都有$a_n=4n-1$

11.(1) $\langle a_n\rangle$爲一個等差數列，$a_{10}=23$，$a_{25}=-22$，則$a_n=$__________ 。

(2)接上題，若$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$爲最大時，$n$之值爲__________ 。

【解答】(1) $53-3n$ (2) 17

【詳解】

(1)設公差爲d，由$a_{25}-a_{10}=15d$ ∴ $15d=(-22)-23$ ∴ $d=-3$

$\therefore\quad a_n = a_{25} + (n-25)d = -22 + (n-25)(-3) = 53 - 3n$

(2) $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(50 + 53 - 3n) = \frac{n}{2}(103 - 3n) = -\frac{3}{2}(n - \frac{103}{6})^2 + \frac{3}{2}(\frac{103}{6})^2$

$\because\quad \frac{103}{6} = 17 + \frac{1}{6}$ 且公差 $d < 0$ $\quad\therefore\quad$ 當 $n = 17$ 時，S_n 之值爲最大

12.等差數列 -1，2，5，8，⋯，$(3n+2)$，⋯，至少要加到第幾項總和才會超過 75。

答：__________。

【解答】8

【詳解】

$a_1 = -1$，$d = 3 \quad\Rightarrow\quad S_n = \frac{n}{2}[2(-1) + (n-1)(3)] > 75 \quad\Rightarrow\quad n(3n-5) > 150$

$\Rightarrow\quad 3n^2 - 5n - 150 > 0 \quad\Rightarrow\quad n > \frac{5 + \sqrt{25 + 12\cdot 150}}{2\cdot 3} = \frac{5 + 5\sqrt{73}}{6} \doteqdot 7.95\cdots$

$\therefore\quad n \ge 8$

13.有兩個等差數列，其第 n 項的比爲 $(3n+1):(7n-11)$，則其前 9 項和的比爲__________。

【解答】$\frac{2}{3}$

【詳解】

設此二等差數列各爲 $<a_n>$，$<b_n>$，其公差各爲 d，d'，前 n 項和各爲 S_n，S_n'，則

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + (n-1)d}{b_1 + (n-1)d'} = \frac{3n+1}{7n-11}$$

$$\therefore\quad \frac{S_9}{S_9'} = \frac{\frac{9}{2}(2a_1 + 8d)}{\frac{9}{2}(2b_1 + 8d')} = \frac{a_1 + 4d}{b_1 + 4d'} = \frac{3(5)+1}{7(5)-11} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}\quad（令 n-1=4）$$

14.觀察下圖中數字排列的規律，試求出第一列到第 40 列所有數字總和 =__________。

第 1 列	1
第 2 列	1 2 1
第 3 列	1 2 3 2 1
第 4 列	1 2 3 4 3 2 1
	...

【解答】22140

【詳解】

設 a_n 爲第 n 列所有數字和

$a_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = 2[1 + 2 + \cdots + (n-1)] + n = n(n-1) + n = n^2$

$$\sum_{n=1}^{40} a_n = \sum_{n=1}^{40} n^2 = \frac{40\cdot 41\cdot 81}{6} = 22140$$

15.一個球從 81 公尺自由落下，每次著地後又跳回原高度的 $\frac{1}{3}$ 再落下，當它第五次著地時，共經過__________公尺。

【解答】161

【詳解】

球最先落下經過 81 公尺，因每次反彈的高度爲前高度的$\dfrac{1}{3}$

第一次著地所經過的距離爲 81 公尺

第二次著地所經過的距離爲 $2\times 81\times\dfrac{1}{3}$ 公尺

第三次著地所經過的距離爲 $2\times 81\times(\dfrac{1}{3})^2$公尺

第四次著地所經過的距離爲 $2\times 81\times(\dfrac{1}{3})^3$公尺

第五次著地所經過的距離爲 $2\times 81\times(\dfrac{1}{3})^4$公尺

所求距離和$= 81+2\times 81\times\dfrac{1}{3}\ +2\times 81\times(\dfrac{1}{3})^2+2\times 81\times(\dfrac{1}{3})^3+2\times 81\times(\dfrac{1}{3})^4$

$= 81+162\,[\dfrac{1}{3}+(\dfrac{1}{3})^2+(\dfrac{1}{3})^3+(\dfrac{1}{3})^4]=81+162\times\dfrac{40}{81}=81+80=161$

16.設a，$b\in R$，若$x^4-x^3+ax^2+7x+b=0$ 有一根爲 $1+2i$，則$a+b=$__________。

【解答】-3

【詳解】

此方程式爲實係數方程式，有一根 $1+2i$，必有另一根 $1-2i$

$\therefore\quad [x-(1+2i)][x-(1-2i)]=x^2-2x+5$ 爲$x^4-x^3+ax^2+7x+b=0$ 之因式

$$\begin{array}{r|l}
 & 1+1-1 \\
\hline
1-2+5 & 1-1\quad +a\quad +7+b \\
 & 1-2\quad +5 \\
\hline
 & \quad 1+(a-5)+7+b \\
 & \quad 1-\quad 2\quad +5 \\
\hline
 & \qquad (a-3)+2+b \\
 & \qquad\quad -1\quad +2-5 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$\therefore\quad a-3=-1$，$b=-5\quad\Rightarrow\quad a=2$，$b=-5$，故$a+b=2+(-5)=-3$

17.設$f(x)$與$g(x)$爲實係數多項式，以x^2-3x+2 除$f(x)$得餘式爲 $3x-4$，以$x-1$ 除$g(x)$得餘式爲 5，則以$x-1$ 除$f(x)+g(x)$的餘式爲__________。

【解答】4

【詳解】

$f(x)=(x^2-3x+2)\,q(x)+3x-4\quad\Rightarrow\quad f(1)=0\cdot q(1)+3-4=-1$

以$x-1$ 除$g(x)$之餘式爲 5 $\quad\Rightarrow\quad g(1)=5$

以$x-1$ 除$f(x)+g(x)$之餘式爲$f(1)+g(1)=(-1)+5=4$

18.用$x-1$ 除$(x-2)^{2003}+2003$ 所得的餘式爲__________。

【解答】2002

【詳解】

令$f(x)=(x-2)^{2003}+2003$

由餘式定理　$\Rightarrow$　餘式$r = f(1) = (1-2)^{2003} + 2003 = 2002$

19.將一多項式$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3$ 表示成$a(x-3)^3 + b(x-2)^2 + c(x-2) + d$的形式，其中$a$，$b$，$c$，$d$皆為實數。

(1)求$(a，b，c，d) =$ ____________。

(2)利用(1)之結果計算$f(1.99)$之近似值至小數第四位為__________。

【解答】(1) (1，3，1，1)　(2) 0.9903

【詳解】

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3 = a(x-2)^3 + b(x-2)^2 + c(x-2) + d$

$$\begin{array}{rrrrl}
1 & -3 & +1 & +3 & \lfloor 2 \\
 & +2 & -2 & -2 & \\
\hline
1 & -1 & -1 & +1 & \longrightarrow d \\
 & +2 & +2 & & \\
\hline
1 & +1 & +1 & \longrightarrow c & \\
 & +2 & & & \\
\hline
1 & +3 & \longrightarrow b & & \\
\uparrow & & & & \\
a & & & &
\end{array}$$

$\Rightarrow$　$(a，b，c，d) = (1，3，1，1)$，即$f(x) = 1 + (x-2) + 3(x-2)^2 + (x-2)^3$

(2) $f(1.99) = 1 + (1.99-2) + 3(1.99-2)^2 + (1.99-2)^3 \fallingdotseq 1 - 0.01 + 3 \times 0.0001 \fallingdotseq 0.9903$

20.一數列寫成 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{1}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{3}{1}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{4}{1}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{4}{2}$，$\frac{5}{1}$，…，按此規則推算下去，則$\frac{7}{10}$應是第__________項。

【解答】127

【詳解】

數列的分子與分母之和為 2，3，4，…者各有 1，2，3，…個，而$\frac{7}{10}$的分子與分母之和為 17，此數列至分子分母之和為 16 者共有 $1 + 2 + 3 + \cdots + 15 = 120$ 項

第 121 項起，依序為$\frac{1}{16}$，$\frac{2}{15}$，$\frac{3}{14}$，$\frac{4}{13}$，$\frac{5}{12}$，$\frac{6}{11}$，$\frac{7}{10}$，$\frac{8}{9}$，$\frac{9}{8}$，…，$\frac{7}{10}$為第 127 項

21.設二多項式$f(x)$，$g(x)$其次數均大於 2，已知$f(x)$與$g(x)$除以$x^2 - x - 1$ 之餘式分別為 $2x + 1$ 與$x - 3$，則

(1) $f(x) + g(x)$除以$x^2 - x - 1$ 之餘式為__________。

(2) $2f(x) - 3g(x)$除以$x^2 - x - 1$ 之餘式為__________。

【解答】(1) $3x - 2$　(2) $x + 11$

【詳解】

由除法定理，令$f(x) = (x^2 - x - 1)\, q_1(x) + 2x + 1$，$g(x) = (x^2 - x - 1)\, q_2(x) + x - 3$

(1) $f(x) + g(x) = (x^2 - x - 1)[\, q_1(x) + q_2(x)] + 3x - 2$

　$\therefore$　$f(x) + g(x)$除以$x^2 - x - 1$ 的餘式為 $3x - 2$

(2) $2f(x) - 3g(x) = [\,2(x^2 - x - 1)\, q_1(x) + 4x + 2] - [\,3(x^2 - x - 1)\, q_2(x) + 3x - 9]$

$= (x^2 - x - 1)\,[\,2q_1(x) - 3q_2(x)\,] + x + 11$

　$\therefore$　$2f(x) - 3g(x)$除以$x^2 - x - 1$ 的餘式為$x + 11$

22.多項式x^3-4x^2+5x-3除以 $f(x)$的商式爲$x-2$，餘式爲 $2x-5$，則$f(x)=$__________。

【解答】x^2-2x-1

【詳解】$x^3-4x^2+5x-3=f(x)(x-2)+2x-5 \quad \Rightarrow \quad f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+3x+2}{x-2}=x^2-2x-1$

23.分解 $4x^4-4x^3-x^2+x-6$ 爲整係數一次式或二次式的乘積 ________________。

【解答】$(x+1)(2x-3)(2x^2-x+2)$

【詳解】

令$f(x)=4x^4-4x^3-x^2+x-6$，若$f(x)$有整係數一次因式$ax-b$，則必$a\,|\,4$，$b\,|\,-6$

由因式定理知：$ax-b\,|\,f(x) \quad \Rightarrow \quad f(\dfrac{b}{a})=0$

而$\dfrac{b}{a}$可能值爲±1，±2，±3，±6，$\pm\dfrac{1}{2}$，$\pm\dfrac{3}{2}$，$\pm\dfrac{1}{4}$，$\pm\dfrac{3}{4}$

逐一代入$f(x)$，得$f(-1)=0$，$f(\dfrac{3}{2})=0 \quad \therefore \quad f(x)=(x+1)(2x-3)(2x^2-x+2)$

$$\begin{array}{r|l}
4-4-1+1-6 & -1 \\
-4+8-7+6 & \\ \hline
4-8+7-6,+0 & \\
+6-3+6 & \dfrac{3}{2} \\ \hline
2\ \ \ 4-2+4,\ \ 0 & \\ \hline
2-1+2 &
\end{array}$$