高雄市明誠中學 高二數學平時測驗					日期：94.06.X
範圍	3-3 期望值(2)	班級	普二　　班	姓名	
		座號			

一、單一選擇題 (每題 10 分)

1、(C) 二枚公正的銅板分別在其正面貼上“2”，反面貼上“1”，投擲此二枚公正的銅板一次，則兩銅板上數字乘積的期望值為 (A)$\frac{3}{2}$ (B)$\frac{7}{4}$ (C)$\frac{9}{4}$ (D)3 (E)6

解析：

乘積	1	2	4
機率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$，即$\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$

2、(A) 袋中有大小相同的 1 到 4 號球各一個，一次由袋中取二球，其球號乘積的期望值為 (A)$\frac{35}{6}$ (B)$\frac{5}{2}$ (C)$\frac{13}{2}$ (D)$\frac{25}{4}$ (E)5

解析：$C_2^4=6$，積為 2 的有(1,2)，積為 3 的有(1,3)，積為 4 的有(1,4)，積為 6 的有(2,3)，積為 8 的有(2,4)，積為 12 的有(3,4)，

$2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}+8\times\frac{1}{6}+12\times\frac{1}{6}=\frac{35}{6}$

3、(D) 袋中有大小相同的 1 到 4 號球各一個，一次由袋中取二球，其球號差的期望值為 (A)6 (B)0 (C)$\frac{5}{4}$ (D)$\frac{5}{3}$ (E)$\frac{5}{2}$

解析：$C_2^4=6$，差 1 的有(1,2)，(2,3)，(3,4)，差 2 的有(1,3)，(2,4)，差 3 的有(1,4)，

$1\times\frac{3}{6}+2\times\frac{2}{6}+3\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$

4、(B) 袋中有大小相同的 1 到 4 號球各 1 個，自袋中每次取 1 球，取後即放回，連取 2 次，兩次球號差的期望值為 (A)0 (B)$\frac{5}{4}$ (C)$\frac{5}{3}$ (D)$\frac{5}{2}$ (E)5

解析：$4^2=16$，差 1 的有(1,2)，(2,3)，(3,4)，(2,1)，(3,2)，(4,3)，
差 2 的有(1,3)，(2,4)，(3,1)，(4,2)，
差 3 的有(1,4)，(4,1)

球號差	0	1	2	3
機率	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$

$1\times\frac{6}{16}+2\times\frac{4}{16}+3\times\frac{2}{16}=\frac{5}{4}$

二、填充題 (每題 10 分)

5、 袋中有 50 元硬幣 3 個，10 元硬幣 9 個，5 元硬幣 8 個，今由袋中一次取出 2 個硬幣，則期望值是______元。

答案：28

解析：$\dfrac{50\times3+10\times9+5\times8}{3+9+8}\times2=28$（元）。

6、 一袋中有大小相同的 3 白球，2 紅球，每次取一球，記錄後再放回袋中，如此反覆進行，設在第 K 次首次取到白球，則 K 的期望值爲______。

答案：$\dfrac{5}{3}$

解析：

K	1	2	3	4	$\cdots$
機率	$\dfrac{3}{5}$	$(\dfrac{2}{5})\times\dfrac{3}{5}$	$(\dfrac{2}{5})^2\times\dfrac{3}{5}$	$(\dfrac{2}{5})^3\times\dfrac{3}{5}$	$\cdots$

$$1\times\frac{3}{5}+2\times(\frac{2}{5})\times(\frac{3}{5})+3\times(\frac{2}{5})^2\times\frac{3}{5}+4\times(\frac{2}{5})^3\times(\frac{3}{5})+\cdots$$
$$=\frac{3}{5}\times[1+2\times(\frac{2}{5})+3\times(\frac{2}{5})^2+4\times(\frac{2}{5})^3+\cdots]=\frac{3}{5}\times[\frac{5}{3}\times\frac{1}{1-\frac{2}{5}}]=\frac{5}{3}$$

7、 甲、乙二人進行乒乓球比賽，已知每場甲獲勝之機率爲乙的 2 倍，且比賽均不得有和局，約定先勝三場者可獲得獎金 540 元，今比賽了二場，甲、乙各勝乙場，但卻因故停止比賽並決定不再比賽，則獎金依獲勝機率分配，甲應獲得______元。

答案：400

解析：甲乙$\begin{cases}\text{甲甲}\\\text{乙甲甲}\end{cases}$，甲勝之機率爲 $(\dfrac{2}{3})^2+2\times\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{2}{3})^2=\dfrac{20}{27}$

$540\times\dfrac{20}{27}=400$，甲得 400 元

8、 投擲一公正的骰子，若出現點數爲質數，則可得到三倍點數的報酬（以元爲單位），若出現其他點數，則要付出與點數相同數目的賠償金，則此遊戲報酬之期望值爲______元，若玩此遊戲之前要先付出 4 元現金，則玩這個遊戲划算嗎？______

答案：$\dfrac{19}{6}$, 不划算

解析：

點數	1	2	3	4	5	6
報酬	–1	6	9	–4	15	–6

$\dfrac{1}{6}\times(-1+6+9-4+15-6)=\dfrac{19}{6}<4$，不划算

9、 擲一公正骰子 3 次，則出現 2 點之次數的期望值爲______。

答案：$\dfrac{1}{2}$

解析：

次數	1	2	3	0
機率	$C_1^3(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^2$	$C_2^3(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})$	$C_3^3(\frac{1}{6})^3$	$\frac{125}{216}$

$1\times C_1^3(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^2+2\times C_2^3(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})+3\times(\frac{1}{6})^3=\frac{1}{2}$，即$3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

10、擲 3 個硬幣，若出現 3 個正面可得 12 元，2 個正面可得 8 元，1 個正面可得 4 元，爲了公平起見，那麼出現 3 個反面時應賠______元。

答案：48

解析：$P(3正面)=\frac{1}{8},\ P(2正面)=\frac{3}{8},\ P(1正面)=\frac{3}{8},\ P(3反面)=\frac{1}{8}$

令出現 3 個反面應賠 x 元，$\therefore$期望值$=0=\frac{1}{8}\times 12+\frac{3}{8}\times 8+\frac{3}{8}\times 4+\frac{1}{8}\times(-x)\Rightarrow x=48$。

11、將大小相同的 3 個黑球，2 個白球排成一列，觀察其顏色由左而右恰變色兩次的機率爲_______，又求其變色次數的期望值爲_______。

答案：$\frac{3}{10},\ \frac{12}{5}$

解析：變色兩次：(白黑黑黑白)或(黑黑白白黑)，(黑白白黑黑) $\Rightarrow\dfrac{1+2}{\frac{5!}{3!2!}}=\frac{3}{10}$

變色一次：(白白黑黑黑)，(黑黑黑白白)$\Rightarrow 2$

變色三次：(白黑黑白黑)，(白黑白黑黑)，(黑白黑黑白)，(黑黑白黑白)$\Rightarrow 4$

變色四次：(黑白黑白黑)$\Rightarrow 1$

變色次數	1	2	3	4
機率	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$

$1\times\frac{2}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{4}{10}+4\times\frac{1}{10}=\frac{24}{10}=\frac{12}{5}$

12、某人擲二枚公正的硬幣，若擲出兩個正面時，可得 300 元，並可繼續再投擲，若第二回又擲出兩個正面時，則又可得 300 元，並可繼續再投擲，如此規則反覆進行，則此人所得之期望值爲_______。

答案：100

解析：$300\times\frac{1}{4}+300\times(\frac{1}{4})^2+\cdots=300\times\dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=300\times\frac{1}{3}=100$

13、阿志出資 105 元，阿憲出資 95 元，共同進行一遊戲，約定阿志與阿憲輪流擲一公正的骰子，以先擲出 5 點者獲勝，獲勝者可獲此 200 元，今由阿志先擲，

(1)試問對誰較有利？_______，(2)應改爲阿志出_______元才公平。

答案：阿志, $109\frac{1}{11}$

解析：阿志勝的機率$\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}+(\frac{5}{6})^4\times\frac{1}{6}+\cdots=\dfrac{\frac{1}{6}}{1-\frac{25}{36}}=\frac{6}{11}$，阿憲勝的機率爲$\frac{5}{11}$

阿志的期望值$(\frac{6}{11}\times 200+\frac{5}{11}\times 0)-105=\frac{45}{11}$，

阿憲的期望值爲$(\frac{5}{11}\times 200+\frac{6}{11}\times 0)-95=-\frac{45}{11}$，對阿志較有利，對阿憲較不利。

設應改爲阿志出x元，則$(200-x)\times\frac{6}{11}+(-x)\times\frac{5}{11}=0\Rightarrow x=\frac{1200}{11}$，即$109\frac{1}{11}$元才公平

14、甲、乙兩人輪流擲一骰子，先擲出么點可得 660 元。今由甲先擲，則乙的期望值是______元。

答案：300

解析：$P(\text{乙勝})=(\frac{5}{6})\times\frac{1}{6}+(\frac{5}{6})^3\times\frac{1}{6}+(\frac{5}{6})^5\times\frac{1}{6}+\cdots=\dfrac{\frac{5}{36}}{1-(\frac{5}{6})^2}=\frac{5}{11}$

$\therefore$期望值$=660\times\frac{5}{11}=300$（元）。

15、在測驗中，欲使完全不會隨意瞎猜的考生得分的期望值爲 0，因此採用答錯倒扣之計分方式，(1)是非題答對得 4 分，答錯應倒扣______分，(2)單一選擇題，題中有 5 個選項，其中只有 1 個是正確的選項，若答對得 5 分，答錯應倒扣______分。

答案：4, $\frac{5}{4}$

解析：(1)是非題倒扣K分，$\frac{1}{2}\times 4+\frac{1}{2}\times(-K)=0\quad\therefore K=4$

(2)單一選擇題倒扣K分，$\frac{1}{5}\times 5+\frac{4}{5}\times(-K)=0\quad\therefore K=\frac{5}{4}$

16、有五個選項的單一選擇題，每題答對可得 5 分，則答錯應倒扣______分才公平。

答案：$\frac{5}{4}$

解析：答對的機率爲$\frac{1}{5}$，答錯的機率爲$\frac{4}{5}$，設答錯倒扣x分，則$\frac{1}{5}\times 5+\frac{4}{5}\cdot(-x)=0,\ \therefore x=\frac{5}{4}$，

即答錯應倒扣$\frac{5}{4}$分。

17、一次擲出 6 粒公正的骰子，若出現點數爲五同一異時，可得 6^6元，其餘不給錢，則其數學期望值爲______元。

答案：180

解析：$\dfrac{C_1^6C_1^5\times\frac{6!}{5!}}{6^6}\times 6^6=180$（元）

18、根據過去資料顯示，一個 60 歲的人在一年內死亡的機率爲 0.08%，生病住院之機率爲 6%，佳怡 60 歲投保 100 萬元之人壽保險 1 年期，於保險期間若死亡，則保險公司給付 100 萬元，若生病住院，則給付 1 萬元，今保險公司欲得利潤之期望值爲 600 元，

則應收保費多少元？

答案：

保險公司支出	100 萬元	1 萬元
機率	0.08%	6%

$1000000\times 0.08\%+10000\times 6\%=800+600=1400$，$1400+600=2000$

19、一袋中有 1 號球 n 個，2 號球(n–1)個，3 號球(n–2)個，……，n 號球 1 個，今自袋中任取一球，若取得 r 號球，就可得 r 元，試求其數學期望值。

答案：共有 $n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{(n+1)\times n}{2}$ 個

$$1\times\frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}}+2\times\frac{(n-1)}{\frac{n(n+1)}{2}}+3\times\frac{(n-2)}{\frac{n(n+1)}{2}}+\cdots+n\times\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}[1\times n+2\times(n-1)+3\times(n-2)+\cdots+n\times 1]$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\times[\sum_{K=1}^{n}K(n+1-K)]=\frac{2}{n(n+1)}\times[(n+1)\sum_{K=1}^{n}K-\sum_{K=1}^{n}K^2)]$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\times[(n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}]$$

$$=(n+1)-\frac{2n+1}{3}=\frac{n+2}{3}$$

20、投擲一枚公正的硬幣，一直到正反面至少各出現一次爲止，試求投擲次數的數學期望值。

答案：投擲到第 k 次出現正反面至少各一次的情形爲：

(1)連續 k–1 次正面，接著第 k 次爲反面，

或(2)者連續 k–1 次反面，接著第 k 次爲正面。

其機率爲 $(\frac{1}{2})^{k-1}\cdot\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^{k-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2^{k-1}}$　　$k\geq 2$ ，

所求之數學期望值爲 $\sum_{k=2}^{\infty}k\cdot\frac{1}{2^{k-1}}$

令 $S_n=\sum_{k=2}^{n}k\times\frac{1}{2^{k-1}}=2\times\frac{1}{2^1}+3\times\frac{1}{2^2}+4\times\frac{1}{2^3}+\cdots+(n-1)\times\frac{1}{2^{n-2}}+n\times\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots\cdots$①

① $\times\frac{1}{2}$ 得　$\frac{1}{2}S_n=\qquad 2\times\frac{1}{2^2}+3\times\frac{1}{2^3}+4\times\frac{1}{2^4}+\cdots+(n-1)\times\frac{1}{2^{n-1}}+n\times\frac{1}{2^n}+\cdots\cdots$②

①–②得　$\frac{1}{2}S_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots\cdots=1+\dfrac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

則所求之數學期望值爲 $S_n=\frac{3}{2}\times\frac{2}{1}=3$