

範圍	3-3 期望值(1)	班級	普二 班	姓名	
		座號		名	

一、單一選擇題 (每題 10 分)

1、(C) 一次丟二粒公正的骰子，其點數和的期望值為 (A) $\frac{7}{3}$  (B) $\frac{7}{2}$  (C)7 (D) $\frac{49}{4}$  (E)21

解析：

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} \times 2 = 7$$

2、(D) 一袋中有 100 元鈔票 5 張，500 元鈔票 3 張，1000 元鈔票 2 張，每張大小均相同，自其中任取兩張，其數學期望值為 (A)160 (B)320 (C)400 (D)800 (E) $\frac{3200}{3}$  元

解析：

$$\frac{100 \times 5 + 500 \times 3 + 1000 \times 2}{10} \times 2 = 800$$

3、(C) 擲三個公正的銅板，共出現  $K$  個正面，約定獎金如下：當  $K$  為奇數時可得  $K^2$  元，當  $K=0$  時要賠 6 元，當  $K=2$  時要賠  $a$  元，若希望此遊戲之期望值為 0 元，則  $a =$  (A)-2 (B)0 (C)2 (D)4 (E)6

解析：

$K$	0	1	2	3
機率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$1^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} + (-6) \times \frac{1}{8} + (-a) \times \frac{3}{8} = 0 \quad \therefore a = 2$$

二、填充題 (每題 10 分)

4、一次擲出 3 粒公正的骰子，則點數和的期望值為\_\_\_\_\_。

答案： $\frac{21}{2}$

解析：

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} \times 3 = \frac{21}{2}$$

5、投擲二粒公正骰子，出現最小點數為 3 的機率為\_\_\_\_\_，又設其出現最小點數為  $X$ ，則  $X$  的期望值為\_\_\_\_\_。

答案： $\frac{7}{36}$ ， $\frac{91}{36}$

解析：

(最小點數為 3)即(點數為 3,4,5,6 減去 4,5,6)  $\Rightarrow 4^2 - 3^2$

$$\text{最小點數為 3 的機率為 } \frac{4^2 - 3^2}{6^2} = \frac{7}{36}$$

X	1	2	3	4	5	6
機率	$\frac{6^2-5^2}{6^2}$	$\frac{5^2-4^2}{6^2}$	$\frac{4^2-3^2}{6^2}$	$\frac{3^2-2^2}{6^2}$	$\frac{2^2-1}{6^2}$	$\frac{1}{6^2}$

$$1 \times \frac{11}{36} + 2 \times \frac{9}{36} + 3 \times \frac{7}{36} + 4 \times \frac{5}{36} + 5 \times \frac{3}{36} + 6 \times \frac{1}{36} = \frac{91}{36}$$

6、將 4 個球任意分配到 3 個箱子中，則均無空箱之機率為\_\_\_\_\_，又對空箱個數的數學期望值為\_\_\_\_\_。

**答案**：  $\frac{4}{9}$ ，  $\frac{16}{27}$

**解析**：

$$4 = (2,1,1), \quad \frac{C_2^4 C_1^2 C_1^1 \times 3!}{3^4} = \frac{4}{9}$$

空箱數	2	1	0
機率	$\frac{C_1^3 \times 1^4}{3^4}$	$\frac{C_1^3 (2^4 - 2)}{3^4}$	$\frac{4}{9}$

$$2 \times \frac{1}{27} + 1 \times \frac{14}{27} = \frac{16}{27}$$

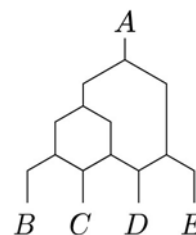
7、一袋中藏有 3 個紅球，7 個白球。今從袋中每取一球，取後即放回，連取三次，則取得的紅球數之期望值為\_\_\_\_\_，若改為從袋中一次任取二球，則取得的紅球數之期望值為\_\_\_\_\_。

**答案**：  $\frac{9}{10}$ ，  $\frac{3}{5}$

**解析**：

$$(1) \frac{3}{10} \times 3 = \frac{9}{10}, \quad (2) \frac{C_2^3 \times 2 + C_1^3 C_1^7}{C_2^{10}} \times 1 = \frac{3}{5}, \quad \text{即 } \frac{3}{10} \times 2 = \frac{3}{5}$$

8、一球由入口 A 投入，若在每個交叉處，球道選擇機率相等，且球由 B, C, D, E 處出口，依次可得「-800元」、「-240元」、「+200元」、「+600元」，則投入一球的期望值是\_\_\_\_\_元。



**答案**： 65

**解析**：

$$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \quad P(C) = \left( \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4},$$

$$P(D) = \left( \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8}, \quad P(E) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{期望值} = \frac{1}{8} \times (-800) + \frac{1}{4} \times (-240) + \frac{3}{8} \times 200 + \frac{1}{4} \times 600 = 65 \text{ (元)}。$$

9、投擲四粒公正的骰子，發生兩種點數各兩粒之機率為\_\_\_\_\_，又若出現四粒骰子點數相同時，可得獎金 2160 元，若出現四粒骰子點數相連時，可得獎金 648 元，若出現兩種點數各兩粒時，可得獎金 216 元，則其獎金的期望值為\_\_\_\_\_元。

答案：  $\frac{5}{72}, 61$

解析：

$$\frac{C_4^6 \times \frac{4!}{2!2!}}{6^4} = \frac{5}{72}$$

骰子	四同	四粒相連	兩兩相同
機率	$\frac{6}{6^4}$	$\frac{3 \times 4!}{6^4}$	$\frac{C_2^6 \times \frac{4!}{2!2!}}{6^4}$

$$2160 \times \frac{1}{216} + 648 \times \frac{12}{216} + 216 \times \frac{15}{216} = 61,$$

10、投擲三枚公正的硬幣，若出現三枚同一面時，可獲得 10 元，若出現二正面一反面時，可獲得 2 元，若出現二反面一正面時，要賠 6 元，則其報酬的期望值為\_\_\_\_\_元。

答案： 1

解析：

$$10 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{3}{8} + (-6) \times \frac{3}{8} = 1$$

11、一次擲出 3 粒公正的骰子，若不出現么點，得 -1 元；若出現 1 個么點，得 1 元；若出現兩個么點，得 3 元；若出現 3 個么點，得 5 元。則此一試驗的數學期望值為\_\_\_\_\_元。

答案： 0

解析：

$$(-1) \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 + 1 \times C_1^3 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 3 \times C_2^3 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right) + 5 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{0}{216} = 0$$

12、一袋中有大小相同的 8 個代幣，其中 5 個為 6 元代幣，而其他 3 個為  $K$  元代幣，若由袋中一次取出 2 個代幣之期望值為 15 元，則  $K =$ \_\_\_\_\_。

答案： 10

解析：

$$\frac{5 \times 6 + 3K}{8} \times 2 = 15 \Rightarrow K = 10$$

13、保險公司售出一年期的住宅房屋火險，設其保險額為 100 萬元，保險費為 2000 元，依過去資料顯示，住宅房屋發生火災的機率為 0.0015，則保險公司的利潤期望值為？元。

答案： 500

解析：

$X$	2000	$-(1000000 - 2000)$
$P(X)$	$1 - 0.0015$	0.0015

$$2000 \times 0.9985 + (-998000) \times 0.0015 = 1997 - 1497 = 500$$

$$\text{即 } 1000000 \times 0.0015 = 1500, \quad 2000 - 1500 = 500$$

14、 $A$ 、 $B$ 兩箱中分別放入 5000 元， $A$ 箱中放入 2 張 1000 元、6 張 500 元， $B$ 箱中放入 1 張

1000 元，4 張 500 元，20 張 100 元，在 A 箱中任取 1 張的期望值為  $K_1$  元，在 B 箱中任取 3 張其金額總和的期望值為  $K_2$  元，則  $K_2 =$  \_\_\_\_\_，又  $K_1, K_2$  之大小關係為 \_\_\_\_\_。

**答案**：600,  $K_1 > K_2$

**解析**：

$$K_1 = \frac{1000 \times 2 + 500 \times 6}{8} = \frac{5000}{8} = 625, \quad K_2 = 3 \times \left( \frac{1000 \times 1 + 500 \times 4 + 100 \times 20}{25} \right) = 600$$

$$\Rightarrow K_1 > K_2$$

15、複選題，每題有 5 個選項，其中可能沒有任何一個答案是正確的。若一題 8 分，且欲使瞎猜的考生得分期望值為 0，則答錯應倒扣 \_\_\_\_\_ 分才合理。

**答案**： $\frac{8}{31}$

**解析**：

$X$	8	$-x$
$P(X)$	$\frac{1}{2^5}$	$1 - \frac{1}{2^5}$

$$\therefore \text{期望值} = 0 = \frac{1}{32} \times 8 + \frac{31}{32} (-x) \Rightarrow x = \frac{8}{31}$$

16、某次測驗考複選題，每題有五個選項，其中正確選項不止一個（即至少有二個正確選項），若完全答對可得 5 分，否則倒扣  $K$  分，欲使完全不會隨意瞎猜的考生得分的期望值為 0，則  $K =$  \_\_\_\_\_，又正確選項恰有三個的機率為 \_\_\_\_\_。

**答案**： $\frac{1}{5}, \frac{5}{13}$

**解析**：

$$\text{已知至少有 2 個正確選項之情形有 } C_2^5 + C_3^5 + C_4^5 + C_5^5 = 26$$

$$\text{故猜對機率 } \frac{1}{26}, \text{ 猜錯機率 } \frac{25}{26}, \quad 5 \times \frac{1}{26} + (-K) \times \frac{25}{26} = 0 \quad \therefore K = \frac{1}{5}$$

$$\text{正確選項恰有 3 個的機率為 } \frac{C_3^5}{26} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$

17、設一袋中裝有 1 號球 1 個，2 號球 2 個，3 號球 3 個……， $n$  號球  $n$  個，……，25 號球 25 個 ( $1 \leq n \leq 25$ )。現自袋中任取一球，如果每一球被取得的機會皆相等，且取得  $n$  號球可得  $(100 - n)$  元，則任取一球的期望值是 \_\_\_\_\_ 元。

**答案**：83

**解析**：期望值 =  $\frac{1 \times (100 - 1) + 2 \times (100 - 2) + \dots + n \times (100 - n) + \dots + 25 \times (100 - 25)}{1 + 2 + \dots + 25}$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{25} k(100 - k)}{\sum_{k=1}^{25} k} = \frac{\sum_{k=1}^{25} (100k - k^2)}{\sum_{k=1}^{25} k} = \frac{100 \sum_{k=1}^{25} k - \sum_{k=1}^{25} k^2}{\sum_{k=1}^{25} k}$$

$$= \frac{100 \cdot \frac{25 \cdot 26}{2} - \frac{25 \cdot 26 \cdot 51}{6}}{\frac{25 \cdot 26}{2}} = 100 - \frac{2 \times 25 + 1}{3} = 83$$

18、一屋於一年內失火被燒毀的機率是 $\frac{1}{50000}$ ，失火殃及鄰屋的機率是 $\frac{1}{60}$ ，今有甲、乙兩屋相鄰，其中甲保火險 480 萬元，則甲一年最少應付\_\_\_\_\_元保費才合理。

**答案**：98

**解析**：

$$\text{期望值} = 4800000 \times \left( \frac{1}{50000} + \frac{1}{60} \times \frac{1}{50000} \right) = 97.6 \text{ (元)}, \therefore \text{保費至少 98 元才合理。}$$

19、一次擲出 6 枚公正的骰子，若出現點數為五同一異時，可得 162000 元，其餘不給錢，試求其數學期望值。

**答案**：625 元

**解析**：

五同一異如  $aaaaab$ ，其中之  $a, b$  取自 1, 2, 3, 4, 5, 6，取法有  $6 \times 5 = 30$  種。例如 111112 為其中的一種，把它分配給 6 枚骰子的方法有  $\frac{6!}{5!} = 6$  種。故五同一異出現的機率為

$$\frac{30 \times 6}{6^6} = \frac{5}{6^4}, \text{ 故其數學期望值為 } 162000 \times \frac{5}{6^4} = 625 \text{ (元)。}$$

20、一袋中藏有 3 個紅球，5 個白球。今從袋中任取兩球，試求取得的紅球數之期望值。

**答案**： $\frac{3}{4}$  個

**解析**：

$$\frac{3}{8} \times 2 = \frac{3}{4} \text{ 個紅球值。}$$