高雄市明誠中學 高二數學平時測驗					日期：94.05.5
範圍	2-5 二項式定理	班級	普二　　班	姓名	
		座號			

一、單一選擇題 (每題 10 分)

1、(E)　將$(10.2)^5$展開後，百位數字為x，個位數字為y，小數點後第二位為z，則 (A)$x=0$ (B)$y=0$ (C)$z=0$ (D)$x=8$ (E)$z=8$

解析：$(10+0.2)^5=1\times10^5+5\times10^4\times0.2+10\times10^3\times(0.2)^2+10\times10^2\times(0.2)^3+5\times10\times(0.2)^4+(0.2)^5$

$=10^5+10^4+400+8+0.08+(0.2)^5$

$\therefore x=4,\ y=8,\ z=8$

2、(B)　$(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})^{120}$展開式中，有理數的項共有 (A)20 (B)21 (C)41 (D)61 (E)121 項

解析：$(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})^{120}=\sum_{r=0}^{120}C_r^{120}(\sqrt{3})^{120-r}(\sqrt[3]{2})^r=\sum_{r=0}^{120}C_r^{120}(3)^{\frac{120-r}{2}}(2)^{\frac{r}{3}}$，

當$2\mid 120-r$，$3\mid r$時，其為有理數的項，設$\dfrac{120-r}{2}=\alpha$，$\dfrac{r}{3}=\beta$　　$\alpha,\beta\in Z$

$\therefore 2\alpha+3\beta=120$，其非負整數解共有 21 組

二、填充題 (每題 10 分)

3、 $(2x-3y^2)^5$展開式中，x^3y^4項的係數是______。

答案：720

解析：一般項為$C_r^5\cdot(2x)^{5-r}\cdot(-3y^2)^r=C_r^5\cdot(2)^{5-r}\cdot(-3)^r xy^2$，$x^3y^4$項，$r=2$代入，

係數為$\dfrac{5!}{3!2!}\cdot2^3\cdot(-3)^2=720$。

4、 以$(x+1)^2$除x^{10}，餘式是______。

答案：$-10x-9$

解析：$x^{10}=[(x+1)-1]^{10}=(x+1)^{10}-C_1^{10}(x+1)^9+\cdots+C_8^{10}(x+1)^2-C_9^{10}(x+1)+C_{10}^{10}$

$\therefore x^{10}$除以$(x+1)^2$的餘式$=-C_9^{10}(x+1)+1=-10x-9$。

5、 $(0.98)^4$取到小數點後第六位的近似值是______。

答案：0.922368

解析：$(0.98)^4=(1-0.02)^4=1^4+C_1^4\cdot1^3\cdot(-0.02)+C_2^4\cdot1^2\cdot(-0.02)^2+C_1^4\cdot1\cdot(-0.02)^3+(-0.02)^4$

$\fallingdotseq 0.922368$。

6、 $[x+(y-z)^2]^8$展開式中，共有______項；其中$x^3y^7z^3$項的係數是______。

答案：81；-6720

解析：(1)$[x+(y-z)^2]^8=\sum_{r=0}^{8}x^{8-r}[(y-z)^2]^r$，$\therefore$項數有$=1+3+5+\cdots+17=81$（項）。

(2)一般項為$\dfrac{8!}{r!(8-r)!}\cdot x^{8-r}\cdot[(y-z)^2]^r$，$\therefore x^3y^7z^3$項即將$r=5$代入，

得$\dfrac{8!}{3!5!}\cdot x^3\cdot(y-z)^{10}$，$\therefore x^3y^7z^3$項的係數為$\dfrac{8!}{3!5!}\times\dfrac{10!}{7!3!}\times(-1)^3=-6720$。

7、 設$(ax-1)^9$與$(x-\dfrac{2}{3})^8$之展開式中的x^3項係數相等，則$a=$ _______，又$(ax-1)^9$展開式中x^3項係數為_______。

答案：$C_6^9(ax)^3(-1)^6=C_5^8x^3(-\frac{2}{3})^5 \quad \therefore 9a^3=6\times(-\frac{2}{3})^5 \quad \therefore a=-\frac{4}{9}$

x^3 項係數為 $C_3^8(-\frac{2}{3})^5=-\frac{1792}{243}$

8、 (1)設 $2000<C_0^n+2C_1^n+4C_2^n+\cdots+2^nC_n^n<2500$ ，則 $n=$________。

(2) $C_3^5+C_4^6+C_5^7+\cdots+C_{16}^{18}=$________。

答案：(1) $C_0^n+2C_1^n+4C_2^n+\cdots+2^nC_n^n=(2+1)^n=3^n$，$2000<3^n<2500$ ，$n=7$，$3^7=2187$

(2) $(C_0^2+C_1^3+C_2^4)+(C_3^5+C_4^6+\cdots+C_{16}^{18})=C_{16}^{19}=C_3^{19}=969$

$\therefore (C_3^5+C_4^6+\cdots\cdots+C_{16}^{18})-(C_0^2+C_1^3+C_2^4)=969-10=959$

9、 $(2x-\frac{1}{3x})^6$ 展開式中，常數項是_______。

答案：$-\frac{160}{27}$

解析：一般項為 $\frac{6!}{r!(6-r)!}\cdot(2x)^{6-r}\cdot(-\frac{1}{3x})^r=\frac{6!}{r!(6-r)!}\cdot 2^{6-r}\cdot(-\frac{1}{3})^r\cdot x^{2r-6}$

$\therefore$常數項即 $2r-6=0$ ，$\therefore r=3$ 代入，$\therefore$係數為 $\frac{6!}{3!3!}\cdot 2^3\cdot(-\frac{1}{3})^3=-\frac{160}{27}$ 。

10、試求 $1+(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+\cdots+(x+1)^{19}$ 之展開式中，x^{18} 項的係數為________，x^5 項的係數為________。

答案：$1+(x+1)+(x+1)^2+\cdots+(x+1)^{19}=\frac{(1+x)^{20}-1}{x}$

x^{18} 項的係數即為 $(1+x)^{20}$ 展開後 x^{19} 之係數 $C_{19}^{20}=20$ ，

x^5 項的係數即為 $(1+x)^{20}$ 展開後 x^6 之係數 $C_6^{20}=38760$

11、試求在 $(2x^3-\frac{3}{x})^{10}$ 的展開式中的

(1)第六項為________。(2) $\frac{1}{x^{10}}$ 項的係數為________。

答案：$(2x^3-\frac{3}{x})^{10}=\sum_{r=0}^{10}C_r^{10}(2x^3)^{10-r}\cdot(-\frac{3}{x})^r=\sum_{r=0}^{10}C_r^{10}\cdot(2)^{10-r}\cdot(-3)^r\cdot x^{30-3r-r}$

(1)第六項 $C_5^{10}(2)^5(-3)^5x^{10}=-2^7\times3^7\times7\times x^{10}=-1959552x^{10}$

(2) $30-4r=-10 \quad \therefore r=10$，$C_{10}^{10}(2)^0(-3)^{10}=3^{10}$

12、 $(1+2x-x^2)^{10}$ 展開式中， x^2 項的係數是_______。

答案：170

解析：一般項為 $\frac{10!}{a!b!c!}\cdot1^a\cdot(2x)^b\cdot(-x^2)^c=\frac{10!}{a!b!c!}\cdot2^b\cdot(-1)^c\cdot x^{b+2c}$ ，其中 $a+b+c=10$

$\therefore x^2$ 項即 $\begin{cases}a+b+c=10\\ b+2c=2\end{cases} \Rightarrow$

a	8	9
b	2	0
c	0	1

$\therefore$係數為 $\frac{10!}{8!2!}\times2^2+\frac{10!}{9!}\times(-1)=170$ 。

13、已知$\log 2=0.3010$，$\log 3=0.4771$，則滿足$1-\frac{1}{3}C_1^n+(-\frac{1}{3})^2C_2^n+\cdots+(-\frac{1}{3})^nC_n^n<\frac{1}{5000}$的最小正整數$n=$______。

答案：22

解析：$1-\frac{1}{3}C_1^n+(-\frac{1}{3})^2C_2^n+\cdots+(-\frac{1}{3})^nC_n^n=[1+(-\frac{1}{3})]^n=(\frac{2}{3})^n$

$\therefore(\frac{2}{3})^n<\frac{1}{5000}$（同取 log），

$\therefore n(\log 2-\log 3)<-\log 5000$，$n(0.3010-0.4771)<-3.699$

$\therefore n>\frac{3.699}{0.1761}=21.\cdots$，$\therefore n=22$。