高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：94.03.17					
範圍	1-4 錐線與直線	班級	普二 班	姓名	
		座號			

一. 選擇題 (每題 10 分)

1、(D) 設雙曲線 $4x^2-y^2=4$ 與直線 $y=x+1$ 相交於 A、B 兩點，則 $\overline{AB}$ 線段長爲

(A)$\frac{5}{3}$ (B)1 (C)$\frac{8}{3}$ (D)$\frac{8\sqrt{2}}{3}$ (E)$\frac{16\sqrt{2}}{3}$

解析：$\begin{cases}4x^2-y^2=4\\ y=x+1\end{cases} \Rightarrow 3x^2-2x-5=0$，$x=\frac{5}{3}$ 或 -1，

$A(\frac{5}{3},\frac{8}{3}),B(-1,0)\Rightarrow \overline{AB}=\sqrt{(\frac{5}{3}+1)^2+(\frac{8}{3}-0)^2}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$

2、(D) 設拋物線 $x=ay^2+by$ 與兩直線 $x+1=0$ 及 $x+4y+1=0$ 相切，則 $b=$ (A)2 (B)1 (C)−1 (D)−2 (E)−4

解析：$\begin{cases}x=ay^2+by\\ x+1=0\end{cases}\Rightarrow ay^2+by+1=0$ 有重根 $\therefore b^2-4a=0$

$\begin{cases}x=ay^2+by\\ x+4y+1=0\end{cases}\Rightarrow ay^2+(b+4)y+1=0$ 有重根

$\therefore (b+4)^2-4a=0\Rightarrow b^2=(b+4)^2\Rightarrow b=-2$

3、(A) 通過點(3,0)且與橢圓 $\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$ 相切於第一象限的切線方程式之斜率爲

(A)−4 (B)−3 (C)$-\sqrt{\frac{4}{7}}$ (D)$-\sqrt{\frac{2}{5}}$ (E)$-\frac{1}{4}$

解析：橢圓之切線公式 $y-2=m(x-1)\pm\sqrt{2m^2+4}$，代入(3,0)，$2m^2+8m=0$，$m=-4$ 或 0

4、(C) 方程式 $x^2-xy-2y^2-4x-y+3=0$ 之圖形爲

(A)一點 (B)一直線 (C)交於一點的兩直線 (D)兩平行直線 (E)沒有圖形

解析：雙十字因式分解 $(x+y-1)(x-2y-3)=0$

5、(D) 已知兩拋物線 $x=y^2-2y+4$ 與 $y=x^2-kx+10$ 有交點，其中有兩個交點在直線 $x=y+2$ 上，則 k 的值爲 (A)3 (B)4 (C)5 (D)6 (E)7

解析：解交點 $\begin{cases}x=y^2-2y+4\\ x=y+2\end{cases}\Rightarrow y=1$ 或 2 $\therefore$交點爲 (3,1)與(4,2)

點(3 , 1)代入 $y=x^2-kx+10$，$k=6$

6、(C) 設拋物線 $y=4x^2$ 與直線 $y=2x+k$ 相切，則 $k=$ (A)−4 (B)−1 (C)$-\frac{1}{4}$ (D)$\frac{1}{32}$ (E)$\frac{1}{2}$

解析：代入消去法 $2x+k=4x^2$，$D=0$ $\therefore 4+16k=0$，$k=-\frac{1}{4}$

7、(D) 橢圓 $2x^2+y^2=9$ 在(2 , 1)處的切線方程式爲 (A) $2x+y=5$ (B) $2x+y=18$ (C) $x+y=3$ (D) $4x+y=9$ (E)以上皆非

解析：切點爲(2,1)，切線爲 $2x\cdot 2+y\cdot 1=9\Rightarrow 4x+y=9$ (兩次給一次，一次給一半)

8、(A) 設拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 通過點(1,1)且與直線 $x+y+1=0$ 相切於(0 , −1)，則 $a=$

(A)3 (B)2 (C)1 (D)−1 (E)−2

解析：$\dfrac{y-1}{2}=ax\cdot 0+\dfrac{b}{2}(x+0)+c \Rightarrow bx-y+2c+1=0$ 與 $x+y+1=0$ 重合

$\therefore b=-1$，$c=-1$ 又 $a+b+c=1 \Rightarrow a=3$

9、(C) 兩端點在一橢圓上的線段稱爲該橢圓的弦，在橢圓 $25x^2+4y^2=100$ 的諸弦中，以點(1,–4)爲中點的弦方程式爲 (A) $3x-2y-11=0$ (B) $5x-4y-21=0$ (C) $8x-5y-28=0$ (D) $25x-4y-41=0$ (E) $25x-16y-89=0$

解析：設過(1,–4)且以(1,–4)爲中點之弦與橢圓相交於 P、Q 兩點，設 $P=(x,y)$，$Q=(2-x,-8-y)$，$\therefore 25x^2+4y^2=100$ ……①，$25(2-x)^2+4(-8-y)^2=100$ ……②

消去二次項 ②–① 可得 $25(4-4x)+4(64+16y)=0$，$25x-16y-89=0$

二、填充題 (每題 10 分)

1、拋物線 $x^2=4y$ 上有一弦，其中點爲(1,2)，則此弦之方程式爲_______，又其弦長爲_______。

答案：$x-2y+3=0$, $\sqrt{35}$

解析：$x^2=4y$ 上有一弦 $\overline{PQ}$ 之中點爲(1,2)，設 $P=(x,y)$，$Q=(2-x,4-y)$，代入前式

$\Rightarrow$ $x^2=4y$ ……①，$(2-x)^2=4(4-y)$ ……②

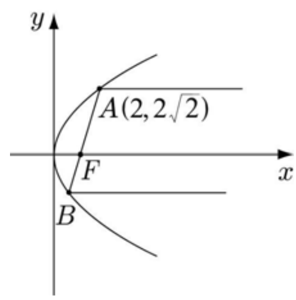
①–② 得 $4x-4=8y-16 \Rightarrow x-2y+3=0 \Rightarrow y=\dfrac{x+3}{2}$

解 $\begin{cases} x^2=4y \\ x-2y+3=0 \end{cases} \Rightarrow x^2-2x-6=0$ 二根 $x_1,x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=-6 \end{cases}$,

且 $\begin{cases} y_1=\dfrac{x_1+3}{2} \\ y_2=\dfrac{x_2+3}{2} \end{cases} \Rightarrow y_1-y_2=\dfrac{1}{2}(x_1-x_2)$

又 $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4-4\times(-6)=28$

$\therefore$ 弦長 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{\dfrac{5}{4}(x_1-x_2)^2}=\sqrt{\dfrac{5}{4}\times 28}=\sqrt{35}$



2、如圖：與拋物線 $y^2=4x$ 的軸平行的一光線碰到 $A(2,2\sqrt{2})$ 後，反射到 B，再反射回去，則 B 點坐標是__________。

答案：$(\dfrac{1}{2},-\sqrt{2})$

解析：$y^2=4x \Rightarrow (y-0)^2=4\cdot 1\cdot(x-0)$ 利用光學性質，光線必通過焦點 $F(1,0)$

$\overleftrightarrow{AF}:\dfrac{y-0}{x-1}=\dfrac{0-2\sqrt{2}}{1-2} \Rightarrow y=2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}$

$\therefore \begin{cases} y^2=4x \\ y=2\sqrt{2}x-2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow 2x^2-5x+2=0$，$\therefore x=\dfrac{1}{2}$ 或 2, $\therefore B(\dfrac{1}{2},-\sqrt{2})$。

3、拋物線 $y=x^2-2(a-2)x+a^2-6a$，不論 a 爲任何實數，拋物線恆與 $y=2mx+k$ 相切，則 $m=$________，$k=$________。

答案：–1, –9

解析：代入 $2mx+k=x^2-2(a-2)x+a^2-6a \Rightarrow D=0$ $\therefore (a+m-2)^2-(a^2-6a-k)=0$，

$\forall a\in\mathbb{R}$, $a(2m+2)+(m^2-4m+4+k)=0$ $\therefore m=-1$，$k=-9$

4、設 $F\,(5,0)$，$F'\,(-5,0)$ 爲雙曲線 Γ 的兩焦點，$3x-4y+10=0$ 與 Γ 相切，則 Γ 的貫軸長爲

_______，又Γ的方程式為_______。

答案：$4\sqrt{5}$，$\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{5}=1$

解析：Sol 一

設Γ方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1, c=5, a^2+b^2=5^2$，

切點 $P(a\sec\theta, b\tan\theta) \Rightarrow$ 切線 $\dfrac{a\sec\theta\cdot x}{a^2}-\dfrac{b\tan\theta\cdot y}{b^2}=1,$

$b\sec\theta\cdot x-b\tan\theta\cdot y=ab,$ 與 $3x-4y+10=0$ 重合

$\dfrac{b\sec\theta}{3}=\dfrac{a\tan\theta}{4}=\dfrac{ab}{-10} \Rightarrow \begin{cases} 3a=-10\sec\theta\cdots\cdots① \\ 4b=-10\tan\theta\cdots\cdots② \end{cases}$

$①^2 — ②^2 \Rightarrow 9a^2-16b^2=100(\sec^2\theta-\tan^2\theta)$；

$9a^2-16(25-a^2)=100 \Rightarrow a^2=20, a=2\sqrt{5}$，貫軸長 $=2a=4\sqrt{5}$，

又 $c=5$，$b=\sqrt{5}$，$\therefore$ 雙曲線為 $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{5}=1$

Sol 二

$F(5,0)$ 對 $3x-4y+10=0$ 之對稱點為 $Q(5-\dfrac{2\times3\times25}{3^2+(-4)^2}, 0-\dfrac{2\times(-4)\times25}{3^2+(-4)^2})=(-1,8)$

設切點 P，$\therefore$ 貫軸長 $2a=|\overline{PF}-\overline{PF'}|=\overline{PQ}-\overline{PF'}=\overline{QF'}=\sqrt{(-5+1)^2+(0-8)^2}=4\sqrt{5}$

$\therefore a=2\sqrt{5}$，又 $c=5$，$b=\sqrt{5}$，$\therefore$ 雙曲線為 $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{5}=1$

5、過點(3,4)與橢圓 $4x^2+9y^2=36$ 相切的直線方程式為______和______。

答案：$y-4=\dfrac{1}{2}(x-3)$，$x=3$

解析：橢圓 $4x^2+9y^2=36 \Rightarrow \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，切線為 $y=mx\pm\sqrt{9m^2+4}$，代入(3,4)得

$4=3m\pm\sqrt{9m^2+4}$，$m=\dfrac{1}{2}$，$\therefore$ 切線為 $y-4=\dfrac{1}{2}(x-3)$ 和 $x=3$

6、自橢圓外一點 $P(3,-3)$ 作橢圓 $\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{25}=1$ 之兩切線與橢圓相切於二點 A、B，若 A 為橢圓之頂點，則 A 點坐標為______又 AB 直線方程式為______。

答案：$(-1,-3)$，$5x-y+2=0$

解析：解 1：

$\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{25}=1 \Rightarrow$ 中心 $(-1,2), a=5, b=2$，四頂點 $(-1,2\pm5), (-1\pm\sqrt{2},2)$

$\therefore$ 所以切點 $A(-1,-3)$

切點 AB 之直線(切點弦)方程式為 $\dfrac{(x+1)(3+1)}{4}+\dfrac{(y-2)(-3-2)}{25}=1 \Rightarrow 5x-y+2=0$

解 2：

設橢圓外一點 $P(3,-3)$ 作橢圓之兩切線，切點 AB 之直線(切點弦)方程式為

$\dfrac{(x+1)(3+1)}{4}+\dfrac{(y-2)(-3-2)}{25}=1 \Rightarrow 5x-y+2=0$

$$\begin{cases} \dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{25}=1 \\ 5x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow 5x^2+2x-3=0\text{ ， }x=\frac{3}{5}\text{或}-1\text{，}\therefore A(-1,-3)$$

7、設 $x^2+axy-6y^2+bx+cy=0$ 表交於(2,–1)之二直線，則 $a=$_______，$b=$_______，$c=$_______。

答案：$-1, -5, -10$

解析：強迫分解 $x^2+axy-6y^2+bx+cy=0 \Rightarrow (x+\ell y+0)(x+my+n)=0$，兩線交點爲(2,–1)
$\therefore \ell=2$，$m=-3$，$a=-1$，將(2,–1)代入 $x-3y+n=0$，則 $n=-5$，$b=-5$，$c=-10$

8、過雙曲線 $4x^2-y^2-8x-2y-9=0$ 上一點(3,1)的切線方程式爲______。

答案：$4x-y-11=0$

解析：切線爲 $4\cdot 3\cdot x-1\cdot y-8(\frac{x+3}{2})-2(\frac{y+1}{2})-9=0 \Rightarrow 4x-y-11=0$

9、若方程式 $x^2-2xy-3y^2+3x+ky+2=0$ 的圖形爲交於一點的兩直線，則 $k=$_______或_______。

答案：$-1, -5$

解析：$(x-3y)(x+y)+3x+ky+2=0 \Rightarrow (x-3y+2)(x+y+1)=0$ 或
$(x-3y+1)(x+y+2)=0 \Rightarrow k=-1$ 或 -5

10、若雙曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$ 上有一弦，其中點坐標爲(4,1)，則此弦之方程式爲______，又其弦長爲______。

答案：$x-y=3$，$\frac{8}{3}\sqrt{3}$

解析：雙曲線上有一弦 $\overline{PQ}$，其中點坐標爲(4,1)，設 $P(x,y)$，$Q(8-x,2-y)$，代入

$\therefore \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1\cdots\cdots$① $\quad \frac{(8-x)^2}{4}-\frac{(2-y)^2}{1}=1\cdots\cdots$②

①–② 得 $16x-64-16y+16=0 \Rightarrow x-y=3$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{1}=1 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow 3y^2-6y-5=0 \quad \text{其二根爲 } y_1\text{，}y_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1+y_2=2 \\ y_1y_2=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

且 $P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2)$

$\Rightarrow (y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2=2^2-4\times(-\frac{5}{3})=\frac{32}{3} \quad \therefore |y_1-y_2|=\sqrt{\frac{32}{3}}$

又 $x_1=y_1+3, x_2=y_2+3 \Rightarrow x_1-x_2=y_1-y_2$

$\therefore$弦長爲 $\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{2(y_1-y_2)^2}=\sqrt{2\times\frac{32}{3}}=\frac{8}{3}\sqrt{3}$

11、設橢圓 $2x^2+y^2+4x=6$ 與直線 $x-2y+k=0$ 相切，則 $k=$______或______。

答案：$7, -5$

解析：橢圓 $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1 \Rightarrow$ 切線爲 $y=m(x+1)\pm\sqrt{4m^2+8}$

$x-2y+k=0 \Rightarrow m=\frac{1}{2}$，代入得 $y=\frac{1}{2}(x+1)\pm\sqrt{9} \Rightarrow x-2y+7=0$ 或 $x-2y-5=0$

$\therefore k=7$ 或 -5

12、直線 $L: x+2y-1=0$ 被橢圓 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=25$ 所截出之弦，其中點坐標爲__________。

答案：$(\dfrac{9}{25},\dfrac{8}{25})$

解析：令直線與橢圓之交點爲 $P(x_1,y_1),\ Q(x_2,y_2)$ ，$\therefore \begin{cases} x+2y-1=0\cdots\cdots\cdots① \\ 4x^2+9y^2=900\cdots\cdots② \end{cases}$

將①代入②得 $25y^2-16y-896=0$ ，其二根爲 y_1,y_2

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{16}{25},$ ，且 $x_1+x_2=-2(y_1+y_2)+2=\dfrac{18}{25}$ ，$\therefore \overline{PQ}$ 中點坐標 $M(\dfrac{9}{25},\dfrac{8}{25})$ 。

13、在第一象限內直線 L 與橢圓 $4x^2+25y^2=100$ 相切於 P，且與兩坐標軸分別交於 A，B 兩點，設 O 爲原點，則△OAB 面積之最小值爲_______，又此時 P 點坐標爲_______。

答案：10, $(\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$

解析：設切點 P 爲$(5\cos\theta$，$2\sin\theta)$，其中 $0<\sin\theta<1$，則切線方程式爲 $2\cos\theta x+5\sin\theta y=10$

$\therefore A=(\dfrac{5}{\cos\theta},0)$, $B=(0,\dfrac{2}{\sin\theta})$ $\therefore \Delta ABO$ 面積 $=\dfrac{5}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{10}{\sin 2\theta}\ge 10$

$\therefore$最小值爲 10，此時 $\sin 2\theta=1$ ，$\theta=45^\circ$ $\therefore P(\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$

14、拋物線 $y^2=16x$ 中，有一弦以(4, 3)爲中點，則此弦所在的直線方程式爲__________。

答案：$8x-3y-23=0$

解析：設此直線與拋物線交於 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 二點，$\therefore x_1+x_2=8, y_1+y_2=6,$

且 $\begin{cases} y_2^2=16x_2\cdots\cdots① \\ y_1^2=16x_1\cdots\cdots② \end{cases}$ ，且切線斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

由①－②得 $(y_2-y_1)(y_2+y_1)=16(x_2-x_1)$ ，$\therefore m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{8}{3}$

$\therefore$直線方程式爲 $y-3=\dfrac{8}{3}(x-4)\Rightarrow 8x-3y-23=0$ 。